Erlangův proces

Definice: Erlangův proces je HMŘ se spojitým časem, který má množinu stavů J = {0, 1, 2, …, m}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1, 0, …, 0) a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -(\lambda+(m-1)\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m\mu & -m\mu \end{pmatrix}.$$

Věta: Stacionární rozložení Erlangova procesu je dáno vzorcem:

$$a_j = \frac{\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k},\ j = 0, 1, \dots, m$$

Úkol:
Napište v MATLABu funkci, která bude počítat stacionární rozložení Erlangova procesu.
Vstupní parametry:
m … nejvyšší pořadové číslo v množině stavů J = {0, 1, …, m}
lambda … intenzita vstupu
mi … intenzita výstupu
Výstupní parametr:
vektor **a** … stacionární vektor

Návod:
```
function [a]=Erlang(m,lambda,mi)
a0=1;
for j=1:m
   a0=a0+(lambda/mi)^j/factorial(j);
end;
a0=1/a0;
for j=1:m
   a(j)=a0*(lambda/mi)^j/factorial(j);
end;
a=[a0 a];
```

Praktická aplikace: Je dán Erlangův proces s množinou stavů J = {0, 1, …, 4} a parametry $\lambda = 2$, $\mu = 3$. Najděte jeho stacionární rozložení.
Výsledek:

$$a_0 = \frac{243}{473} = 0{,}5137, a_1 = \frac{162}{473} = 0{,}3425, a_2 = \frac{54}{473} = 0{,}1142, a_3 = \frac{12}{473} = 0{,}0245, a_4 = \frac{2}{473} = 0{,}0042$$

Příklad 1.: Benzínová stanice má dvě čerpadla. U každého čerpadla může čerpat benzín jenom jedno auto. Když jsou obě čerpadla obsazená, další přijíždějící auta nečekají a odjíždějí. Průměrná doba čerpání benzínu je 2 min a průměrně přijíždí 40 aut za 1 h.

a) Kolik procent doby bude benzínová stanice nevyužitá? (31 %)
b) S jakou pravděpodobností nebude přijíždějící auto obslouženo? (0,28)
c) Jaká je střední hodnota počtu obsazených čerpadel? (0,97)

Příklad 2.: Vstupní kontrola do zábavního parku je prováděna třemi stejně zdatnými pracovníky ochranky. Návštěvník je kontrolován v případě, že některý z pracovníků ochranky je volný, jinak prochází bez kontroly. Předpokládejme, že všichni tři pracovníci dohromady zvládnou zkontrolovat během hodiny 9 návštěvníků a dále předpokládejme, že návštěvníci chodí jednotlivě a během hodiny přijdou v průměru čtyři. Vypočtěte pravděpodobnost, že návštěvník vstoupí do parku bez kontroly. (0,0094)

Příklad 3.: Kolik linek by minimálně měla mít telefonní ústředna, aby pravděpodobnost, že telefonní účastník zastihne všechny linky obsazené, byla nanejvýš 1/2? Přitom za minutu se vyskytne průměrně pět požadavků na zprostředkování hovoru a jeden hovor trvá v průměru dvě minuty. (6)