Systémy hromadné obsluhy s neomezenou kapacitou

1. Systém M/M/1/∞/FIFO
Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $Ex(\mu)$, v systému je 1 linka obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen“.
Podíl $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ se nazývá intenzita provozu. Systém se může stabilizovat, pokud $\rho < 1$.
Stacionární rozložení: $a_j = \rho^j (1-\rho)$, j = 0, 1, …
Počet N zákazníků ve stabilizovaném systému se tedy řídí rozložením $Ge(1-\rho)$.
Charakteristiky stabilizovaného systému:
Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$.

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě: $E(N_Q) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S) = \frac{\lambda}{\mu}$.

Střední hodnota doby strávené v systému: $E(W) = \frac{1}{\mu - \lambda}$.

Střední hodnota doby strávené ve frontě: $E(W_Q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$.

Střední hodnota doby obsluhy: $E(W_S) = \frac{1}{\mu}$.

Pravděpodobnost, že zákazník najde volnou linku = $1 - \frac{\lambda}{\mu}$.

Pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve frontě = $\frac{\lambda}{\mu}$.

```
function[a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi);
% [a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi)
% Vypočítá prvek a0 stacionárního rozložení, intenzitu provozu
% a charakteristiky systému hromadné obsluhy M|M|1|Inf|FIFO.
% Vstupní parametry:
% lambda .... parametr vstupního proudu, mi ........ parametr obsluhy
% Výstupní parametry:
% a0 ........ pst, že v systému nebude žádný zákazník
% ro ........ intenzita provozu
% ENS ....... střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků
% ENQ ....... střední hodnota počtu zákazníků ve frontě
% EN ........ střední hodnota počtu zákazníků v systému
% EWS ....... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví obsluhou
% EWQ ....... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví ve frontě
% EW ........ střední hodnota doby, kterou zákazník stráví v systému
ro=lambda/mi;
if ro<1
  a0=1-ro;
  ENS=ro;
  ENQ=lambda^2/(mi*(mi-lambda));
  EN=lambda/(mi-lambda);
  EW=1/(mi-lambda);
  EWS=1/mi;
  EWQ=lambda/(mi*(mi-lambda));
else
error('Systém se nemůže stabilizovat. Intenzita provozu je větší než 1.')
end;
```

Příklad 1.: K ortopedovi přichází v průměru 16 pacientů za 8 h jeho pracovní doby. Pacient je v průměru ošetřen za 20 min. Předpokládáme, že vstupní proud pacientů je Poissonův proces a doba ošetření se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se systém může stabilizovat. Pokud ano, vypočtěte všechny jeho charakteristiky.

Řešení: $\lambda = 2, \mu = 3, \rho = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ systém se může stabilizovat

Ortoped je využit na 66,6%.

Pravděpodobnost, že pacient nebude čekat: $a_0 = 1 - \rho = 0,\overline{3}$

$E(W) = 1$ h, $E(W_Q) = 40$ min, $E(W_S) = 20$ min

$E(N) = 2$ osoby, $E(N_Q) = 1\frac{1}{3}$ osoby, $E(N_S) = \frac{2}{3}$ osoby

Návod na řešení pomocí MATLABu:

```
lambda=2;mi=3;
[a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi)
```

Příklad 2.: Do pokladny na železniční stanici přichází v průměru 1 zákazník za 2 minuty. Obsluha trvá v průměru 1 minutu. Předpokládáme, že vstupní proud zákazníků je Poissonův proces a doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se systém může stabilizovat. Pokud ano, řešte následující úkoly:

a) Na kolik % je pokladna využita?
b) Jaká je pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve froně?
c) Jaká je střední hodnota doby pobytu v systému, ve frontě a doby obsluhy?
d) Jaká je střední hodnota počtu zákazníků v systému, ve frontě, u pokladny?

Úlohy řešte pomocí funkce neomezeny_1.m.

Výsledek: Systém se může stabilizovat.

Ad a) Pokladna je využita na 50 %.

Ad b) Pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve frontě, je 0,5.

Ad c) $E(W) = 2$ min, $E(W_Q) = 1$ min, $E(W_S) = 1$ min

Ad d) $E(N) = 1$ osoba, $E(N_Q) = 0{,}5$ osoby, $E(N_S) = 0{,}5$ osoby

2. Systém M/M/n/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $Ex(\mu)$, v systému je n linek obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen“.

Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$. Podíl $\rho = \frac{\beta}{n}$ se nazývá intenzita provozu. Systém se může stabilizovat, pokud $\rho < 1$.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \frac{\beta^j}{j!} a_0 \text{ pro } j = 1,2,\dots,n \\ \frac{\beta^j}{n!\,n^{j-n}} a_0 \text{ pro } j = n+1, n+2, \dots \end{cases}$, kde

$$a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)} \right]^{-1}$$

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě:

$$P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)}$$

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho} + n\rho$.

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě: $E(N_Q) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S) = n\rho$.

Střední hodnota doby strávené v systému: $E(W) = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$.

Střední hodnota doby strávené ve frontě: $E(W_Q) = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$.

Střední hodnota doby strávené obsluhou: $E(W_S) = \frac{1}{\mu}$.

Využití systému: $\kappa = \rho$.

```
function[a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi);
% [a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi)
%
% Vypočítá prvek a0 stacionárního rozložení, intenzitu provozu
% a charakteristiky systému hromadné obsluhy M|M|n|Inf|FIFO.
%
% Vstupní parametry:
% n ......... počet linek obsluhy,
% lambda .... parametr vstupního proudu,
% mi ........ parametr obsluhy
%
% Výstupní parametry:
% a0 ........ pst, že v systému nebude žádný zákazník
% ro ........ intenzita provozu (využití systému)
% PQ ........ pst, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě
% ENS ....... střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků
% ENQ ....... střední hodnota počtu zákazníků ve frontě
% EN ........ střední hodnota počtu zákazníků v systému
% EWS ....... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví obsluhou
% EWQ ....... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví ve frontě
% EW ........ střední hodnota doby, kterou zákazník stráví v systému

beta=lambda/mi;
ro=beta/n;
if ro<1
  a0=inv(sum(beta.^(0:n-1)./factorial(0:n-1))+n*beta^n/factorial(n)/(n-beta));
  PQ=a0*beta^n/(factorial(n)*(1-ro));
  ENS=n*ro;
  ENQ=PQ*ro/(1-ro);
  EN=ENQ+ENS;
  EWS=1/mi;
  EWQ=PQ*ro/(lambda*(1-ro));
  EW=EWS+EWQ;
else
error('Systém se nemůže stabilizovat. Intenzita provozu je větší než 1.')
end;
```

Příklad 3.: K benzínové stanici se dvěma čerpadly přijíždí každých 80 sekund jedno auto, přičemž průměrná doba čerpání je 2 min 30 s. Za předpokladu, že příjezdy aut tvoří Poissonův proces, doba čerpání se řídí exponenciálním rozložením a systém se může stabilizovat (ověřte!), vypočtěte

a) pravděpodobnost, že u čerpací stanice budou právě dvě auta
b) střední hodnotu počtu obsazených stojanů
c) střední hodnotu doby, kterou řidič stráví u čerpací stanice.

Řešení: n = 2, $\lambda = \frac{3600}{80} = 45, \mu = \frac{1}{\frac{2{,}5}{60}} = \frac{600}{25} = 24, \beta = \frac{45}{24} = \frac{15}{8}, \rho = \frac{\beta}{n} = \frac{15}{16} < 1 \Rightarrow$ systém se může stabilizovat

ad a) $$a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{15}{8} + \frac{2\left(\frac{15}{8}\right)^2}{2\left(2 - \frac{15}{8}\right)}\right]^{-1} = \frac{8}{248} = \frac{1}{31} = 0{,}0323$$

$$a_2 = \frac{\beta^2}{2!} a_0 = \left(\frac{15}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{31} = \frac{225}{3968} = 0{,}0567$$

ad b) $$E(N_S) = n\rho = 2\frac{15}{16} = \frac{15}{8} = 1{,}875$$

ad e)

$$P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)} = \frac{1}{31} \cdot \frac{\frac{225}{64}}{\frac{1}{8}} = \frac{225}{248}$$

$$E(W) = P_Q \frac{\rho}{(1-\rho)\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{225}{248} \cdot \frac{\frac{15}{16}}{\left(1 - \frac{15}{16}\right) \cdot 45} + \frac{1}{24} = \frac{32}{93} = 0{,}344\,\text{h} = 20 \text{ min } 38 \text{ s}$$

Návod na řešení pomocí MATLABu:

lambda=45;mi=24;n=2;

[a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi)

Příklad 4.: V laboratoři pracují 3 laborantky. V průměru přichází do laboratoře 15 požadavků za 1 h. Zpracování 1 požadavku trvá v průměru 10 min. Předpokládáme, že vstupní proud požadavků je Poissonův proces a doba zpracování 1 požadavku se řídí exponenciálním rozložením.

a) Může se systém stabilizovat?
b) Jaký je průměrný počet požadavků čekajících na zpracování?
c) Jaká je průměrná doba, která uplyne od předání požadavku po jeho zpracování?

Úlohy řešte pomocí funkce neomezeny_n.m.

Výsledek:

Ad a) Systém se může stabilizovat.

Ad b) Průměrný počet požadavků čekajících na zpracování je 3,51.

Ad c) Průměrná doba, která uplyne od předání požadavku po jeho zpracování, činí 24 min.