Algebra 2 30.5.2007

Jméno: ....

Hodnocení						$\sum$	

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Minimum (včetně semestrální písemky a DÚ) je 30 bodů.
Na práci máte 90 minut.

1. (10krát ± 1 bod — správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $27k + 4$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

(b) **ano — ne** Mezi čísly 1 až 50 existuje $\varphi(\varphi(50)) = 8$ primitivních kořenů modulo 50.

(c) **ano — ne** Lineární kongruence $ax \equiv b \pmod m$, kde $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$, má vždy řešení modulo m, platí-li $a \mid b$.

(d) **ano — ne** Libovolná redukovaná soustava zbytků modulo číslo m obsahuje stejný počet kvadratických zbytků a nezbytků modulo m.

(e) **ano — ne** Diofantická rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ s neznámými $x, y, z \in \mathbb{N}$ má za předpokladu $(x, y, z) = 1$ pouze konečně mnoho řešení.

(f) **ano — ne** Výraz $k^2 - 2$ není pro žádné přirozené číslo k násobkem 13.

(g) **ano — ne** Je-li $m \in \mathbb{N}$, pak pro každé přirozené číslo d takové, že $d \mid \varphi(m)$ existuje $x \in \mathbb{Z}$ řádu d modulo m.

(h) **ano — ne** Každé přirozené číslo dává při dělení libovolnou mocninou 3 stejný zbytek jako jeho ciferný součet.

(i) **ano — ne** Jsou-li $a, b, c \in \mathbb{Z}$ po dvou nesoudělná, pak jsou také nesoudělná.

(j) **ano — ne** Grupa $(\mathbb{Z}_m^\times, \cdot)$ je cyklická pouze, je-li m prvočíslo.

2. (6 bodů) Dokažte, že 4 není primitivní kořen modulo žádné prvočíslo p.
(Návod: uvažte možné hodnoty řádu čísla 2 a vztah mezi řádem čísel 2 a 4).

3. (6 bodů) Rozhodněte, pro která přirozená čísla n je číslo $2^{2^n} - 2^{n^2}$ dělitelné sedmi.

4. (6 bodů) Určete počet řešení kongruence $x^2 \equiv 280 \pmod{2295}$.
(Malá nápověda: modul je dělitelný třemi prvočísly).

5. (8 bodů) Učitel matematiky se zmínil, že dnes mají narozeniny obě jeho děti. Když se ho žáci zeptali na jejich věk, odpověděl hádankou: „Součet trojnásobku druhé mocniny dceřina věku a sedminásobku součinu věků obou dětí je o 16 větší než šestinásobek druhé mocniny synova věku.“ Určete věk obou dětí (všechny možnosti).

6. (4 body) Kolik je přirozených čísel menších než 1000, která jsou nesoudělná s 35?