A

1. (3 b.) Pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ platí $17 \mid 2a + 3b \iff 17 \mid 9a + 5b$. Dokažte.
2. (4 b.) Pro číslo $n = 2400$ určete **počet** a **součet** jeho kladných dělitelů a rovněž počet přirozených čísel $x \leq n$, pro která $(x, n) = 1$.
3. (5 b.) Když na Sokolském sletu vytvořili cvičenci osmistupy, zbývalo jich 5 navíc, při cvičení v kruzích o 9 lidech přebývali 2 a při tvorbě pyramid (na každou je potřeba 14 lidí), jich 7 muselo nevyužitě mávat divákům. Kolik cvičenců se vystoupení zúčastnilo, když jich bylo více než 1000 a méně než 1500?
4. (5b.)
   (a) Zformulujte větu o řešitelnosti a počtu řešení lineární kongruence a aplikujte ji na kongruenci $597x \equiv 27 \pmod{1144}$.
   (b) Tuto kongruenci vyřešte.
5. (3b.) Určete zbytek po dělení čísla $10^{10^{10}}$ sedmi.

B

1. (3 b.) Dokažte, že jsou-li a, b nesoudělná celá čísla, pak jsou nesoudělná také čísla $a^2 + ab + b^2$, $a^2 - ab + b^2$.
2. (4 b.) V oboru přirozených čísel řešte rovnici $\varphi(m) = 32$.
3. (5 b.) Šest loupežníků si chtělo rozdělit zlaťáky, které měli na stole. Když je rozdělovali na šest stejných hromádek, čtyři zlaťáky zbyly. Když je zkusili rozdělit na pět stejných hromádek, zbyl jeden zlaťák. Nakonec se nepoprali, protože se vrátil sedmý loupežník, který z kapsy přidal dva zlaťáky na stůl a všechny zlaťáky pak rozdělil na sedm stejných hromádek. Kolik zlaťáků bylo původně na stole, víte-li, že jich nebylo více než 400 a méně než 200.
4. (5b.)
   (a) Zformulujte větu o řešitelnosti a počtu řešení lineární kongruence a aplikujte ji na kongruenci $334x \equiv 1844 \pmod{1360}$.
   (b) Tuto kongruenci vyřešte.
5. (3 b.) Určete zbytek po dělení čísla $13^{15^{17}}$ číslem 17.