Obsah

Seznam symbolů

$\square$, $\blacksquare$	konec důkazu, konec příkladu
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$	rozšířená množina reálných čísel
$\mathcal{O}(\alpha)$	okolí $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $$\mathcal{O}(\alpha) = \begin{cases} (h, \infty), & \alpha = \infty, \\ (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon), & \alpha \in \mathbb{R}, \\ (-\infty, h), & \alpha = -\infty; \text{ přitom } h, \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0 \end{cases}$$
$\operatorname{sgn} \alpha$	znaménko reálného čísla α $$\operatorname{sgn} \alpha = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0 \\ -1, & \alpha < 0 \end{cases}$$
$f : A \to B$	zobrazení množiny A do množiny B
$\operatorname{Dom} f$	definiční obor zobrazení (funkce) f
$\operatorname{Im} f$	obor hodnot zobrazení (funkce) f
$[f]_a^b = f(b) - f(a)$	rozdíl funkčních hodnot funkce f
$f\|_A$	zúžení zobrazení f na množinu A
$\ker f$	jádro morfismu (lineárního zobrazení) f, $\ker f = \{x \in \operatorname{Dom} f : f(x) = 0\}$
id_A	identické zobrazení (identita) na množině A, $(\forall x \in A)\, \mathrm{id}_A(x) = x$
f', f'',..., $f^{(j)}$	obyčejná derivace funkce f podle její proměnné, druhá až j-tá derivace
$\\|\boldsymbol{x}\\|$	norma vektoru $\boldsymbol{x}$ ekvivalentní s normou euklidovskou
$\det \mathsf{A}$	determinant matice A
$\operatorname{tr} \mathsf{A}$	stopa matice $\mathsf{A} = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$, $\operatorname{tr} \mathsf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.
$\mathbb{Z}_{t_0}$	množina celých čísel nepřevyšujících celé číslo t_0, str. 1
$\mathcal{P}$	množina reálných posloupností, str. 1
$\mathcal{P}_{t_0}$	množina reálných posloupností definovaných na množině $\mathbb{Z}_{t_0}$, str. 1
$\mathcal{P}_{-\infty}$	množina reálných posloupností definovaných na množině $\mathbb{Z}$, str. 1
$a \equiv \alpha$	posloupnost α je stacionární, $(\forall t \in \operatorname{Dom} a) a(t) = \alpha$, str. 3
$\lim a$, $\lim\limits_{t\to\infty} a(t)$	limita posloupnosti a, str. 4
$\mathcal{P}_\tau^\bullet$	množina konvergentních posloupností z prostoru $\mathcal{P}_\tau$, $\mathcal{P}_\tau^\bullet = \left\{a \in \mathcal{P}_\tau : (\exists \alpha \in \mathbb{R})\, \alpha = \lim\limits_{t\to\infty} a(t)\right\}$, str. 5
$\limsup\limits_{t\to\infty} a(t)$, $\liminf\limits_{t\to\infty} a(t)$	limes superior a inferior posloupnosti a, str. 7

$\sum\limits_{t=m}^{n} a(t)$	součet členů posloupnosti a od m do n, str. 8
$\cdot^\sigma$, a^σ	operátor posunu, str. 10
Δ, $\Delta a(t)$	operátor (první) diference (vpřed), str. 10
$\sum_{t_0}$, $\sum_{t_0} a(t)$	operátor sumace od t_0, str. 11
$\vert_{t_0}$, $a\vert_{t_0}$	operátor odečtení členu posloupnosti $a(t_0)$, $a\vert_{t_0}(t) = a(t) - a(t_0)$, str. 12
$t^{(\nu)}$	faktoriálová funkce, str. 22
$\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_{t_0}$, $\mathcal{R}_{-\infty}$	množina regresivních posloupností, množina regresivních posloupností definovaných na $\mathbb{Z}_{t_0}$ a na $\mathbb{Z}$, str. 31
$\oplus$, $\ominus$	operace na množině regresivních posloupností, str. 31
$e_p(\,\cdot\,, t_0)$, $e_p(t, t_0)$	exponenciální posloupnost příslušná k posloupnosti $p \in \mathcal{R}$ s počátkem $t_0 \in \operatorname{Dom} p$, hodnota této posloupnosti v $t \in \operatorname{Dom} p$, str. 32

Kapitola 1

Přípravné úvahy

1.1 Posloupnosti

Pro celé číslo $t_0 \in \mathbb{Z}$ označíme

$$\mathbb{Z}_{t_0} = \{t_0 + n : n \in \mathbb{N}\} = \{t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots\}$$

množinu všech celých čísel větších nebo rovných číslu t_0.

Definice 1. *Reálná posloupnost* je zobrazení a z množiny celých čísel $\mathbb{Z}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ takové, že jeho definiční obor $\operatorname{Dom} a$ je celá množina $\mathbb{Z}$ nebo některá z množin $\mathbb{Z}_{t_0}$.

Přívlastek „reálná" budeme většinou vynechávat. Hodnotu posloupnosti $a(t)$ budeme nazývat *člen posloupnosti* nebo podrobněji *t-tý člen posloupnosti.* Hodnotu nezávisle proměnné t budeme někdy nazývat *index posloupnosti.* Pokud $\operatorname{Dom} a = \mathbb{Z}_{t_0}$, řekneme, že t_0 je *počáteční index* posloupnosti.

Množinu posloupností definovaných na $\mathbb{Z}_{t_0}$, resp. na $\mathbb{Z}$, označíme symbolem $\mathcal{P}_{t_0}$, resp. $\mathcal{P}_{-\infty}$; množinu všech posloupností označíme symbolem $\mathcal{P}$, tj.

$$\mathcal{P}_{t_0} = \{a : \mathbb{Z}_{t_0} \to \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{P}_{-\infty} = \{a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{P} = \bigcup_{t_0 \in \mathbb{Z}} \mathcal{P}_{t_0} \cup \mathcal{P}_{-\infty}.$$

Tvrzení 1. Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. Množina posloupností $\mathcal{P}_\tau$ je vektorovým prostorem nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$. Sčítání posloupností je definováno vztahem

$$(a + b)(t) = a(t) + b(t) \quad \text{pro všechny posloupnosti } a, b \in \mathcal{P}_\tau \text{ a každé } t \in \mathbb{Z}_{t_0},$$

nulovým prvkem je posloupnost $o \in \mathcal{P}_\tau$ taková, že $\operatorname{Im} o = \{0\}$, tj.

$$o(t) = 0 \quad \text{pro všechna } t \in \operatorname{Dom} o,$$

násobení skalárem je definováno vztahem

$$(\alpha a)(t) = \alpha a(t) \quad \text{pro všechny posloupnosti } a \in \mathcal{P}_\tau \text{ a všechna čísla } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Tvrzení 2. Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. Posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{P}_\tau$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když pro libovolný index $t_0 \in \operatorname{Dom} a_1$ platí

$$\begin{vmatrix} a_1(t_0) & a_2(t_0) & \ldots & a_n(t_0) \\ a_1(t_0+1) & a_2(t_0+1) & \ldots & a_n(t_0+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(t_0+n-1) & a_2(t_0+n-1) & \ldots & a_n(t_0+n-1) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.1}$$

Důkaz: Posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když z rovnosti

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = o \tag{1.2}$$

plyne, že všechny konstanty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou rovny nule. Buď $t_0 \in \operatorname{Dom} a_1$ libovolný index a nechť platí (1.2), tedy

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 a_1(t_0) & + & \alpha_2 a_2(t_0) & + \cdots + & \alpha_n a_n(t_0) & = 0 \\ \alpha_1 a_1(t_0+1) & + & \alpha_2 a_2(t_0+1) & + \cdots + & \alpha_n a_n(t_0+1) & = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 a_1(t_0+n-1) & + & \alpha_2 a_2(t_0+n-1) & + \cdots + & \alpha_n a_n(t_0+n-1) & = 0. \end{array}$$

Tato homogenní soustava n lineárních rovnic pro n neznámých $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ má jediné nulové řešení právě tehdy, když její determinant je roven nule. Tento determinant je levá strana nerovnosti v dokazovaném tvrzení. $\square$

Poznámka 1. Determinant na levé straně nerovnosti (1.1) se nazývá *Casoratián posloupností $a_1, a_2, \ldots, a_n$ v indexu t_0*. Tvrzení 2 lze tedy přeformulovat: Posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{P}_\tau$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jejich Casoratián je nenulový v každém indexu z definičního oboru těchto posloupností.

Definice 2. Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá

ohraničená zdola, pokud existuje nějaká hranice $h \in \mathbb{R}$ taková, že žádný člen posloupnosti a není menší než tato hranice, tj. $(\exists h \in \mathbb{R})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) \geq h$;

ohraničená shora, pokud existuje nějaká hranice $h \in \mathbb{R}$ taková, že žádný člen posloupnosti a není větší než tato hranice, tj. $(\exists h \in \mathbb{R})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) \leq h$;

ohraničená, pokud je ohraničená zdola i shora, tj. $(\exists h \in \mathbb{R})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, |a(t)| \leq h$;

ryze rostoucí, pokud pro každou hodnotu argumentu t platí nerovnost $a(t) < a(t+1)$, tj. $(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) < a(t+1)$;

rostoucí, pokud pro každou hodnotu argumentu t platí nerovnost $a(t) \leq a(t+1)$, tj. $(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) \leq a(t+1)$;

ryze klesající, pokud pro každou hodnotu argumentu t platí nerovnost $a(t) > a(t+1)$, tj. $(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) > a(t+1)$;

klesající, pokud pro každou hodnotu argumentu t platí nerovnost $a(t) \leq a(t+1)$, tj. $(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, a(t) \leq a(t+1)$;

ryze monotonní, pokud je ryze rostoucí nebo ryze klesající;

monotonní, pokud je rostoucí nebo klesající;

stacionární, pokud je současně rostoucí a klesající, tedy pokud její obor hodnot je jednoprvkový, tj. $(\forall t \in \mathrm{Dom}\, a)\, a(t) = a(t+1)$, tedy existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $\mathrm{Im}\, a = \{a_0\}$. Je-li $a \in \mathcal{P}$ stacionární posloupnost a $\mathrm{Im}\, a = \{\alpha\}$, budeme psát $a \equiv \alpha$.

Terminologická poznámka. Uvedená terminologie monotonních posloupností je méně obvyklá — posloupnost splňující podmínku

$$(\forall t_1 \in \mathbb{Z}_{t_0})(\forall t_2 \in \mathbb{Z}_{t_0})\, t_1 < t_2 \Rightarrow a(t_1) \leq a(t_2)$$

je častěji nazývaná „neklesající“ a posloupnost splňující podmínku

$$(\forall t_1 \in \mathbb{Z}_{t_0})(\forall t_2 \in \mathbb{Z}_{t_0})\, t_1 < t_2 \Rightarrow a(t_1) < a(t_2)$$

„rostoucí“, podobně pro posloupnosti klesající. V této tradičnější terminologii však posloupnost, která není „klesající“ ještě nemusí být „neklesající“ (např. posloupnost $a(t) = \sin t$). V terminologii zavedené v Definici 2 je ryze rostoucí posloupnost posloupností rostoucí; pojem označující zvláštní případ nějakého obecnějšího pojmu se od tohoto obecnějšího pojmu liší přívlastkem (v aristotelském nebo biologickém pojetí lze slovo „rostoucí“ považovat za rodové jméno, slovo „ryze“ za druhové jméno).

Poznámka 2. Všechny pojmy zavedené v Definici 2 lze relativizovat na interval nezávisle proměnné. Např. posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *ohraničená na intervalu* $[n, \infty)$, $n \in \mathbb{Z}$, pokud existuje nějaká hranice $h \in \mathbb{R}$ taková, že každý člen posloupnosti s indexem z tohoto intervalu v absolutní hodnotě nepřevýší hodnotu h, tj. $(\exists h \in \mathbb{R})(\forall t \in [n, \infty) \cap \mathrm{Dom}\, a)|a(t)| \leq h$; posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *klesající na intervalu* $[n, m]$ takovém, že $n, m \in \mathbb{Z}$, $n < m$ a $[n, m] \cap \mathrm{Dom}\, a$ je aspoň dvouprvkový, jestliže pro každý index posloupnosti t takový, že $\{t, t+1\} \subseteq [n, m] \cap \mathrm{Dom}\, a$ platí $a(t) \geq a(t+1)$, a každý index posloupnosti t takový, že $\{t-1, t\} \subseteq [n, m] \cap \mathrm{Dom}\, a$ platí $a(t-1) \geq a(t)$, tj.

$$(\forall t \in \mathrm{Dom}\, a)\, \{t, t+1\} \subseteq [n, m] \cap \mathrm{Dom}\, a \Rightarrow a(t) \leq a(t+1).$$

Relativní ohraničenost na intervalu I dostaneme z Definice 2 tak, že výraz „$\forall t \in \mathrm{Dom}\, a$“ nahradíme výrazem „$\forall t \in \mathrm{Dom}\, a \cap I$“.

Nechť I je takový interval, že $I \cap \mathrm{Dom}\, a$ je alespoň dvouprvkový. Relativní monotonnost na intervalu I dostaneme z Definice 2 tak, že místo příslušné nerovnosti $\mathcal{R}$ v definici napíšeme implikaci „$\{t, t+1\} \subseteq I \cap \mathrm{Dom}\, a \Rightarrow \mathcal{R}$“.

Poznámka 3. S použitím symboliky zavedené v Definici 2 můžeme nulovou posloupnost zapsat jako $o \equiv 0$.

Definice 3. Buď $a \in \mathcal{P}$ a $t \in \mathrm{Dom}\, a$. Řekneme, že index t je

uzel posloupnosti a, pokud $a(t) = 0$ nebo $a(t)a(t+1) < 0$;

argument lokálního maxima, pokud $a(t) \geq a(t+1)$ a $t-1 \in \mathrm{Dom}\, a \Rightarrow a(t) \geq a(t-1)$;

argument lokálního minima, pokud $a(t) \leq a(t+1)$ a $t-1 \in \mathrm{Dom}\, a \Rightarrow a(t) \leq a(t-1)$;

argument ostrého lokálního maxima, pokud $a(t) > a(t+1)$ a $t-1 \in \mathrm{Dom}\, a \Rightarrow a(t) > a(t-1)$;

argument ostrého lokálního minima, pokud $a(t) < a(t+1)$ a $t-1 \in \operatorname{Dom} a \Rightarrow a(t) < a(t-1)$;

argument lokálního extrému, pokud je argumentem lokálního maxima nebo minima;

argument ostrého lokálního extrému, pokud je argumentem ostrého lokálního maxima nebo minima.

Je-li t argumentem lokálního extrému, řekneme že hodnota $a(t)$ je *lokálním extrémem posloupnosti a.* Analogickou terminologii používáme pro ostré lokální extrémy, maxima a minima.

Definice 4. *Limita posloupnosti* lim je zobrazení z množiny posloupností $\mathcal{P}$ do rozšířené množiny reálných čísel $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Obraz posloupnosti a při zobrazení lim značíme $\lim\limits_{t\to\infty} a(t)$. Řekneme, že limita posloupnosti a je rovna hodnotě $\alpha \in \mathbb{R}^*$, pokud ke každému okolí α existuje takový index posloupnosti τ, že všechny členy posloupnosti a s indexy alespoň τ jsou v tomto okolí, tj.

$$\lim a = \lim_{t\to\infty} a(t) = \alpha \text{ pokud } \big(\forall \mathcal{O}(\alpha)\big)\big(\exists \tau \in \mathbb{Z}\big)\big(\forall t \in \operatorname{Dom} a\big)\, t \geq \tau \Rightarrow a(t) \in \mathcal{O}(\alpha).$$

Limita se nazývá *vlastní,* pokud $\alpha \in \mathbb{R}$, tj.

$$\lim a = \lim_{t\to\infty} a(t) = \alpha \in \mathbb{R} \text{ pokud } (\forall \varepsilon > 0)(\exists \tau \in \mathbb{Z})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, t \geq \tau \Rightarrow |a(t) - \alpha| < \varepsilon.$$

Limita se nazývá *nevlastní,* pokud $\alpha \in \{-\infty, \infty\}$, tj.

$$\lim a = \lim_{t\to\infty} a(t) = \infty \text{ pokud } (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \tau \in \mathbb{Z})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, t \geq \tau \Rightarrow a(t) > h,$$

$$\lim a = \lim_{t\to\infty} a(t) = -\infty \text{ pokud } (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \tau \in \mathbb{Z})(\forall t \in \operatorname{Dom} a)\, t \geq \tau \Rightarrow a(t) < h.$$

Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *konvergentní,* pokud existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = \lim\limits_{t\to\infty} a(t)$. Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *divergentní,* pokud $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \infty$ nebo $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = -\infty$.

Terminologická poznámka. Nevlastní limita posloupnosti obvykle v učebních textech o posloupnostech nebývá považována za limitu; „nevlastní limita není limita analogicky jako nevlastní matka není matka“. Terminologie zavedená v Definici 4 je však stejná jako terminologie používaná v textech o funkcích.

Věta 1. *Monotonní posloupnost má limitu. Podrobněji:*

- *je-li a rostoucí neohraničená posloupnost, pak $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \infty$;*
- *je-li rostoucí posloupnost a ohraničená shora, pak $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \sup\{a(t) : t \in \operatorname{Dom} a\}$;*
- *je-li klesající posloupnost a ohraničená zdola, pak $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \inf\{a(t) : t \in \operatorname{Dom} a\}$;*
- *je-li a klesající neohraničená posloupnost, pak $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = -\infty$.*

Důkaz: V. Novák. *Diferenciální počet v R.* Brno, MU, 1997. Věta 5.5., str. 127. □

Důsledek: Nechť $k \in \mathcal{P}_0$ je ryze rostoucí posloupnost taková, že $\operatorname{Im} k \subseteq \mathbb{Z}$. Pak $\lim\limits_{t\to\infty} k(t) = \infty$.

Důkaz: Poněvadž k je ryze rostoucí a $k(t) \in \mathbb{Z}$ pro každé $t \in \mathbb{N}$, je

$$k(t+1) > k(t) + 1 \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{N}.$$

Je-li $h \in \mathbb{R}$ libovolné číslo, pak pro $t \in \mathbb{N}$, $t\, h - k(0)$ je

$$k(t) \geq k(t-1) + 1 \geq k(t-2) + 2 \geq \cdots \geq k(0) + t > k(0) + h - k(0) = h$$

a dokazované tvrzení plyne z Tvrzení 1. □

Tvrzení 3. Nechť $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. Označme $\mathcal{P}_\tau^\bullet$ množinu konvergentních posloupností z vektorového prostoru $\mathcal{P}_\tau$, tj.

$$\mathcal{P}_\tau^\bullet = \left\{ a \in \mathcal{P}_\tau : \, (\exists \alpha \in \mathbb{R})\, \alpha = \lim_{t\to\infty} a(t) \right\}.$$

Pak $\mathcal{P}_\tau^\bullet$ je vektorový podprostor prostoru $\mathcal{P}_\tau$ a zobrazení $\lim : \mathcal{P}_\tau^\bullet \to \mathbb{R}$ je lineární.

Důkaz: $\lim(\alpha a + \beta b) = \lim_{t\to\infty} (\alpha a + \beta b)(t) = \alpha \lim_{t\to\infty} a(t) + \beta \lim_{t\to\infty} b(t) = \alpha \lim a + \beta \lim b \in \mathbb{R}$ □

Definice 5. Nechť $a \in \mathcal{P}_\tau$ je libovolná posloupnost celých čísel a $k \in \mathcal{P}_0$ je ryze rostoucí posloupnost taková, že $k(0) \geq \tau$, tj. $\operatorname{Im} k \subseteq \operatorname{Dom} a$. Pak složené zobrazení $a \circ k$ se nazývá *posloupnost vybraná z posloupnosti a.*

Vzhledem k důsledku Tvrzení 1 je složené zobrazení $a \circ k$ z předchozí definice skutečně posloupnost, t-tý člen vybrané posloupnosti je $a\big(k(t)\big)$.

Tvrzení 4. Nechť $a \in \mathcal{P}$ je konvergentní nebo divergentní posloupnost. Pak $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je její limitou, tj. $\lim a = \lim_{s\to\infty} a(s) = \alpha$, právě tehdy, když α je limitou každé posloupnosti vybrané z posloupnosti a;

$$\lim a = \lim_{s\to\infty} a(s) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \Big((\forall k \in \mathcal{P}_0)\ \operatorname{Im} k \subseteq \operatorname{Dom} a,\, \lim_{t\to\infty} k(t) = \infty \Rightarrow \lim a \circ k = \lim_{t\to\infty} a\big(k(t)\big) = \alpha \Big).$$

Důkaz: „$\Rightarrow$“: Buď $\mathcal{O}(\alpha)$ libovolné okolí limity α a $a \circ k$ libovolná posloupnost vybraná z posloupnosti a. K okolí $\mathcal{O}(\alpha)$ existuje $s_1 \in \mathbb{Z}$ takové, že pro všechna $s \in \operatorname{Dom} a$, $s \geq s_1$ je $a(s) \in \mathcal{O}(\alpha)$. Množina $\{t \in \mathbb{N} : \, k(t) \geq s_1\}$ je podmnožinou dobře uspořádané množiny přirozených čísel, a tato množina je neprázdná, neboť $\lim_{t\to\infty} k(t) = \infty$. Existuje tedy

$$t_1 = \min \{t \in \mathbb{N} : \, k(t) \geq s_1\}.$$

Pro libovolné $t > t_1$ je $k(t) > k(t_1) \geq s_1$, a tedy

$$a \circ k(t) = a\big(k(t)\big) \in \mathcal{O}(\alpha).$$

„$\Leftarrow$“: Nechť $s_0 \in \operatorname{Dom} a$. Definujme $k \in \mathcal{P}_0$ vztahem $k(t) = s_0 + t$. Pak $a \circ k$ je posloupnost vybraná z posloupnosti a. Je tedy

$$\lim_{s\to\infty} a(s) = \lim_{t\to\infty} a(s_0 + t) = \lim_{t\to\infty} a\big(k(t)\big) = \alpha.$$

□

Definice 6. Řekneme, že $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je *hromadný bod posloupnosti* a, pokud ke každému okolí α a každému celému číslu τ existuje takový index t posloupnosti a, který není menší než τ a člen $a(t)$ posloupnosti leží v tomto okolí, tj.

$\alpha \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod posloupnosti a pokud

$$\big(\forall \mathcal{O}(\alpha)\big)\big(\forall \tau \in \mathbb{Z}\big)\big(\exists t \in \operatorname{Dom} a\big)\, t \geq \tau, a(t) \in \mathcal{O}(\alpha).$$

Tvrzení 5. Hodnota $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem posloupnosti a právě tehdy, když existuje posloupnost $a \circ k$ vybraná z posloupnosti a taková, že $\lim a \circ k = \alpha$.

Důkaz: „$\Rightarrow$“: Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem posloupnosti a. Zkonstruujeme ryze rostoucí posloupnost $k \in \mathcal{P}_0$ takovou, že $\operatorname{Dom} a \subseteq \mathbb{Z}$ a $\lim a \circ k = \alpha$.

Buď $\mathcal{O}(\alpha)$ libovolné okolí bodu α a $s_0 \in \operatorname{Dom} a$ libovolný prvek.

Položíme $k(0) = s_0$. K s_0 existuje $s_1 \in \operatorname{Dom} a$, že $s_1 \geq s_0$ a $a(s_1) \in \mathcal{O}(\alpha)$.

Položíme $k(1) = s_1$. K s_1 existuje $s_2 \in \operatorname{Dom} a$, že $s_2 \geq s_1 + 1$ a $a(s_2) \in \mathcal{O}(\alpha)$.

Položíme $k(2) = s_2$ atd.

Výsledkem této induktivní konstrukce je ryze rostoucí posloupnost $k \in \mathcal{P}_0$; přitom $k(t) = s_t$ a $s_t \in \mathcal{O}(\alpha)$ pro každý index $t \geq 0$ a tedy $a \circ k(t) = a(s_t) \in \mathcal{O}(\alpha)$. Pro všechny indexy $t \geq 0$ je $a \circ k(t) \in \mathcal{O}(\alpha)$, což znamená, že $\lim a \circ k = \alpha$.

„$\Leftarrow$“: Nechť existuje vybraná posloupnost $a \circ k$ taková, že $\lim a \circ k = \alpha \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\mathcal{O}(\alpha)$ je libovolné okolí α a $\tau \in \mathbb{Z}$ je libovolné číslo. Podle Definice 4 existuje číslo $\tau_1 \in \mathbb{Z}$ takové, že pro každé $t \geq \tau_1$ je $a \circ k(t) \in \mathcal{O}(\alpha)$. Vezmeme $t_1 \in \operatorname{Dom} k$ takové, že $t_1 > \tau_1$, $k(t_1) \in \operatorname{Dom} a$ a $k(t_1) \geq \tau$; takové číslo t_1 existuje, neboť posloupnost k je rostoucí a $\lim k = \infty$. Položíme $s_1 = k(t_1)$. Pak $s_1 \geq \tau$ a $a(s_1) = a\big(k(t_1)\big) = a \circ k(t_1) \in \mathcal{O}(\alpha)$, tedy α je hromadným bodem posloupnosti a. □

Tvrzení 6. Nechť existuje limita posloupnosti a. Pak $\lim a$ je hromadným bodem posloupnosti a.

Důkaz plyne bezprostředně z Tvrzení 4 a 5. □

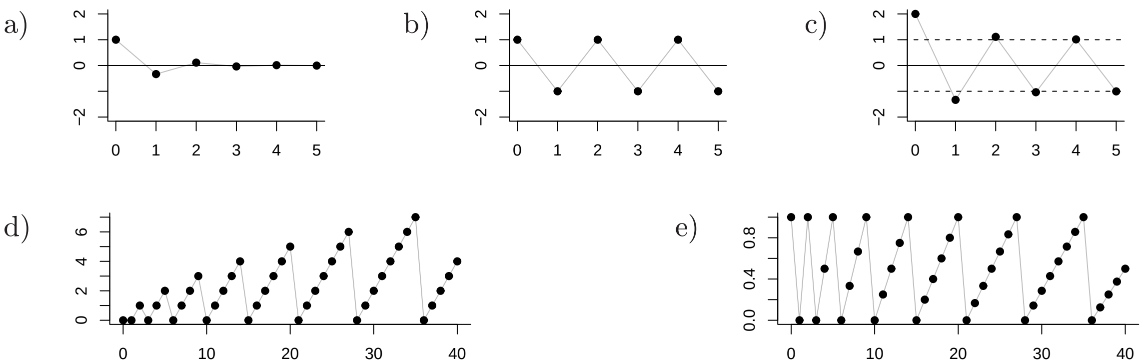
Příklady. Uvažujme posloupnosti z množiny $\mathcal{P}_0$.

1. $a(t) = \left(-\frac{1}{3}\right)^t$, obr. 1.1 a).
   Jediný hromadný bod je 0.

2. $b(t) = (-1)^t$, obr. 1.1 b).
   Hromadné body jsou 1 a -1.

3. $c(t) = (-1)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t = (-1)^t \dfrac{1 + 3^t}{3^t}$,
   $c = \left\{2, -\frac{4}{3}, \frac{10}{9}, -\frac{28}{27}, \frac{82}{81}, -\frac{244}{243}, \dots\right\}$, obr. 1.1 c). Hromadné body jsou 1 a -1.

4. Definujme posloupnost $m \in \mathcal{P}_0$ předpisem $m(t) = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8t} - 1\right)\right]$, kde $[x]$ označuje celou část z reálného čísla x.
   Položme $d(t) = t - \frac{1}{2}\big(m(t) + 1\big)m(t)$.
   $d = \{0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, \dots\}$, obr. 1.1 d).
   Každé přirozené číslo se v této posloupnosti vyskytuje nekonečně mnohokrát, je tedy jejím hromadným bodem. Vybraná posloupnost
   $$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \left\{a(0), a(2), a(5), a(9), a(14), \dots, a\big(\tfrac{1}{2}t(t+3)\big), \dots\right\}$$
   diverguje do ∞, je tedy také ∞ hromadným bodem posloupnosti d.



Obrázek 1.1: Příklady posloupností s různými množinami hromadných bodů.

5. Uvažujme posloupnosti m a d zavedené v předchozím příkladu a položme

$$e(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ \dfrac{d(t)}{m(t)}, & t \geq 1, \end{cases}$$

$e(t) = \left\{1, 0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 0, \ldots\right\}$, obr. 1.1 e).
Každé racionální číslo z intervalu $[0,1]$ se mezi členy této posloupnosti vyskytuje nekonečně mnohokrát. V každém okolí libovolného reálného čísla z intervalu $[0,1]$ existuje nějaké racionální číslo $q \in [0,1]$. To znamená, že každé reálné číslo z intervalu $[0,1]$ je hromadným bodem posloupnosti e, množina všech hromadných bodů vyplní kompaktní interval $[0,1]$.

Příklady ukazují, že posloupnost může mít jeden hromadný bod (a), konečně mnoho hromadných bodů (b, c), spočetně (d) nebo nespočetně (e) mnoho hromadných bodů; hromadný body mohou být konečné (a, b, c, e) nebo nekonečné (d); konečný hromadný bod může být členem posloupnosti (b, d, e) ale nemusí (a, c, e). ■

Tvrzení 7. Množina hromadných bodů libovolné posloupnosti $a \in \mathcal{P}$ má nejmenší a největší prvek.

Důkaz: V. Novák. *Diferenciální počet v R.* Brno, MU, 1997. Věta 5.7., str. 131. □

Definice 7. Nejmenší hromadný bod posloupnosti $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *limes inferior* a označuje $\liminf\limits_{t\to\infty} a(t)$; největší hromadný bod posloupnosti $a \in \mathcal{P}$ se nazývá *limes superior* a označuje $\limsup\limits_{t\to\infty} a(t)$.

Posloupnost $a \in \mathcal{P}$ je ohraničená zdola právě tehdy, když

$$-\infty < \liminf_{t\to\infty} a(t);$$

je ohraničená shora právě tehdy, když

$$\limsup_{t\to\infty} a(t) < \infty;$$

je konvergentní právě tehdy když

$$\liminf_{t\to\infty} a(t) = \limsup_{t\to\infty} a(t);$$

nemá (vlastní ani nevlastní) limitu právě tehdy, když

$$\liminf_{t\to\infty} a(t) < \limsup_{t\to\infty} a(t).$$

1.2 Operátory na prostoru posloupností

Definice 8. Nechť $a \in \mathcal{P}$, $m \in \operatorname{Dom} a$, $n \in \mathbb{Z}$ takové, že $n+1 \in \operatorname{Dom} a$. *Součet členů posloupnosti a od m do n* definujeme vztahem

$$\sum_{t=m}^{n} a(t) = \begin{cases} a(m) + a(m+1) + \cdots + a(n), & n \ge m, \\ 0, & n = m-1, \\ -\big(a(n+1) + a(n+2) + \cdots + a(m-1)\big), & n < m-1. \end{cases}$$

Součin členů posloupnosti a od m do n definujeme vztahem

$$\prod_{t=m}^{n} a(t) = \begin{cases} a(m)a(m+1)\cdots a(n), & n \ge m, \\ 1, & n = m-1, \\ 1/\big(a(n+1)a(n+2)\cdots a(m-1)\big), & n < m-1. \end{cases}$$

Tvrzení 8. Nechť $a \in \mathcal{P}$, $m, n, l \in \operatorname{Dom} a$. Pak platí

$$\sum_{t=m}^{n-1} a(t) = -\sum_{t=n}^{m-1} a(t), \qquad \sum_{t=m}^{l} a(t) + \sum_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum_{t=m}^{n} a(t).$$

$$\sum_{t=m}^{n} a(t) = \begin{cases} \sum\limits_{t=0}^{n-m} a(n-t), & n \ge m, \\ \sum\limits_{t=m-n}^{0} a(m-t), & n \le m-1, \end{cases} \qquad \sum_{t=m}^{n-1} \sum_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \sum_{t=m}^{n-1} (n-t) a(t).$$

Pokud navíc $a(t) \neq 0$ pro $t \in \operatorname{Dom} a$, pak

$$\prod_{t=m}^{n-1} a(t) = \left(\prod_{t=n}^{m-1} a(t)\right)^{-1}, \qquad \prod_{t=m}^{l} a(t) \prod_{t=l+1}^{n} a(t) = \prod_{t=m}^{n} a(t).$$

$$\prod_{t=m}^{n} a(t) = \begin{cases} \prod\limits_{t=0}^{n-m} a(n-t), & n \ge m, \\ \prod\limits_{t=m-n}^{0} a(m-t), & n \le m-1, \end{cases} \qquad \prod_{t=m}^{n-1} \prod_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \prod_{t=m}^{n-1} (n-t) a(t).$$

Důkaz: Nechť $m < n$. Pak také $m-1 < n-1$ a tedy

$$\sum_{t=n}^{m-1} a(t) = -\big(a(m) + a(m+1) + \cdots + a(n-1)\big) = -\sum_{t=m}^{n-1} a(t),$$

což je ekvivalentní s první rovností. Její platnost budeme v dalších částech důkazu využívat.

Je-li $m \le l < n$, pak

$$\sum_{t=m}^{l} a(t) + \sum_{t=l+1}^{n} a(t) = \big(a(m)+a(m+1)+\cdots+a(l)\big)+\big(a(l+1)+a(l+2)+\cdots+a(n)\big) = \sum_{t=m}^{n} a(t);$$

je-li $m < n = l$, pak $\sum\limits_{t=m}^{l} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{n} a(t) + 0;$

je-li $m < n < l$, pak $\sum\limits_{t=m}^{l} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{l} a(t) - \sum\limits_{t=n+1}^{l} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{n} a(t);$

je-li $l+1 = m < n$, pak $\sum\limits_{t=m}^{l} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{m-1} a(t) + \sum\limits_{t=m}^{n} a(t) = 0 + \sum\limits_{t=m}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{n} a(t);$

je-li $l+1 < m < n$, pak $\sum\limits_{t=m}^{l} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = -\sum\limits_{t=l+1}^{m-1} a(t) + \sum\limits_{t=l+1}^{n} a(t) = \sum\limits_{t=m}^{n} a(t).$

V případech $m > n$ a $m = n$ dokážeme platnost druhé rovnosti analogicky.

Při ověřování třetí rovnosti rozlišíme čtyři případy:

je-li $n \ge m$ pak $\sum\limits_{t=m}^{n} a(t) = a(m) + a(m+1) + \cdots + a(n-1) + a(n) =$

$$= a(n-0) + a(n-1) + \cdots + a\big(n-(n-m)\big) = \sum_{t=0}^{n-m} a(n-t);$$

je-li $n = m-1$ pak $\sum\limits_{t=m}^{m-1} a(t) = 0 = \sum\limits_{t=1}^{0} a(n-t);$

je-li $n = m-2$ pak $\sum\limits_{t=m}^{m-2} a(t) = \sum\limits_{t=m-1}^{m-1} a(t) = -a(m-1) = -\sum\limits_{t=1}^{1} a(m-t) = \sum\limits_{t=2}^{0} a(m-t);$

je-li $n < m-2$ pak $\sum\limits_{t=m}^{n} a(t) = -\sum\limits_{t=n+1}^{m-1} a(t) = -\sum\limits_{t=0}^{m-n-2} a(m-1-t) =$

$$= \sum_{t=m-n-1}^{1} a(m-1-t) = \sum_{t=m-n}^{0} a(m-t).$$

Čtvrtou rovnost dokážeme úplnou indukcí:

pro $n = m$ platí $\sum\limits_{t=m}^{m-1}\left(\sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau)\right) = 0 = \sum\limits_{t=m}^{m-1}(m-t)a(t);$

indukční krok „vpřed“: $\sum\limits_{t=m}^{n}\sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \sum\limits_{\tau=m}^{n} a(\tau) + \sum\limits_{t=m}^{n-1}\sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) =$

$$= \sum_{t=m}^{n} a(t) + \sum_{t=m}^{n-1}(n-t)a(t) = a(n) + \sum_{t=m}^{n-1}(n-t+1)a(t) =$$

$$= (n+1-n)a(n) + \sum_{t=m}^{n-1}(n+1-t)a(t) = \sum_{t=m}^{n}(n+1-t)a(t);$$

indukční krok „vzad“: $\sum\limits_{t=m}^{n-2}\sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \sum\limits_{t=m}^{n-1}\sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) + \sum\limits_{t=n}^{n-2}\sum\limits_{\tau=m}^{t} a(\tau) =$

$$= \sum_{t=m}^{n-1}(n-t)a(t) - \sum_{t=n-1}^{n-1}\sum_{\tau=m}^{t} a(\tau) = \sum_{t=m}^{n-1}(n-t)a(t) - \sum_{\tau=m}^{n-1} a(\tau) =$$

$$= \sum_{t=m}^{n-1}(n-t-1)a(t) = \sum_{t=m}^{n-2}(n-t-1)a(t).$$

Rovnosti pro součin ověříme stejně. □

Definice 9. *Operátor posunu (shift operator)* $\cdot^\sigma : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ přiřadí posloupnosti a posloupnost a^σ definovanou vztahem

$$a^\sigma(t) = a(t+1).$$

Obrazem posloupnosti $a \in \mathcal{P}_{t_0}$ při zobrazení $\cdot^\sigma$ je tedy posloupnost $a^\sigma \in \mathcal{P}_{t_0-1}$, obrazem posloupnosti $a \in \mathcal{P}_{-\infty}$ je posloupnost $a^\sigma \in \mathcal{P}_{-\infty}$.

Věta 2. *Operátor posunu $\cdot^\sigma$ je bijekce. Zúžení $\cdot^\sigma$ na množinu $\mathcal{P}_\tau$, kde $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ je lineární.*

Důkaz: Nechť $b \in \mathcal{P}$ je libovolná posloupnost. Definujme posloupnost $a \in \mathcal{P}$ tak, že pro každé $t \in \operatorname{Dom} b$ položíme $a(t) = b(t-1)$. Pak je $a^\sigma(t) = a(t+1) = b(t+1-1) = b(t)$, tedy $b = a^\sigma$. Zobrazení $\cdot^\sigma$ je tedy surjektivní.

Nechť posloupnosti $a, b \in \mathcal{P}$ jsou různé. Pokud $\operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$, existuje nějaká hodnota $t_1 \in \operatorname{Dom} a$ taková, že $a(t_1) \neq b(t_1)$; odtud plyne, že $a^\sigma(t_1-1) = a(t_1) \neq b(t_1) = b^\sigma(t_1-1)$, tedy $a^\sigma \neq b^\sigma$. Pokud $\operatorname{Dom} a \neq \operatorname{Dom} b$, pak podle Definice 9 je také $\operatorname{Dom} a^\sigma \neq \operatorname{Dom} b^\sigma$ a opět $a^\sigma \neq b^\sigma$. Zobrazení $\cdot^\sigma$ je tedy injektivní (prosté).

Pro všechny posloupnosti $a, b \in \mathcal{P}$ takové, že $\operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$, pro všechna reálná čísla α, β a každé celé číslo $t \in \operatorname{Dom} a$ platí

$$(\alpha a + \beta b)^\sigma(t) = (\alpha a + \beta b)(t+1) = \alpha a(t+1) + \beta b(t+1) = \alpha a^\sigma(t) + \beta b^\sigma(t),$$

takže zobrazení $\cdot^\sigma$ je lineární. □

Definice 10. *Operátor (první) diference (vpřed)* $\Delta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ přiřadí posloupnosti $a \in \mathcal{P}$ posloupnost $\Delta a \in \mathcal{P}$ definovanou vztahem

$$\Delta a(t) = a(t+1) - a(t).$$

Z definice operátorů diference a posunu plyne, že

$$\Delta a = a^\sigma - a, \qquad a^\sigma = a + \Delta a, \tag{1.3}$$

nebo stručněji $\Delta = \cdot^\sigma - \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$, $\cdot^\sigma = \Delta + \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.

Věta 3. *Operátor diference Δ je surjektivní zobrazení, které není prosté. Zúžení Δ na množinu $\mathcal{P}_\tau$, kde $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, je lineární a jeho jádrem je množina stacionárních posloupností.*

Důkaz: Buď $a \in \mathcal{P}$, $t_0 \in \operatorname{Dom} a$. Pro každé $t \in \operatorname{Dom} a$ položíme

$$s(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i).$$

Pak podle Tvrzení 8 platí

$$\Delta s(t) = \sum_{i=t_0}^{t} a(i) - \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i) = a(t),$$

což znamená, že posloupnost a je obrazem posloupnosti s při zobrazení Δ.

Nechť $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $a \in \mathcal{P}$ je libovolná posloupnost. Pro každé $t \in \operatorname{Dom} a$ položme $b(t) = a(t) + c$. Pak $b \in \mathcal{P}$ a $b \neq a$. Avšak pro libovolné $t \in \operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$ platí

$$\Delta b(t) = b(t+1) - b(t) = \big(a(t+1) + c\big) - \big(a(t) + c\big) = a(t+1) - a(t) = \Delta a(t),$$

tedy $\Delta a = \Delta b$.

Nechť $a, b \in \mathcal{P}_\tau$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha a + \beta b)(t) &= (\alpha a + \beta b)(t+1) - (\alpha a + \beta b)(t) = \\ &= \alpha\big(a(t+1) - a(t)\big) + \beta\big(b(t+1) - b(t)\big) = \alpha \Delta a(t) + \beta \Delta b(t).\end{aligned}$$

Nechť $a \in \mathcal{P}_\tau$, $a \equiv \alpha$. Pak $\Delta a(t) = \alpha - \alpha = 0$, tedy $a \in \ker \Delta|_{\mathcal{P}_\tau}$.

Nechť $b \in \ker \Delta|_{\mathcal{P}_\tau}$, tedy $\Delta b \equiv 0$. Pak pro každé $t \in \operatorname{Dom} b$ platí $0 = \Delta b(t) = b(t+1) - b(t)$, tedy pro všechna $t \in \operatorname{Dom} b$ je $b(t) = b(t+1)$, takže posloupnost b je stacionární. □

Poznámka 4. Z důkazu první části Věty 3 plyne

$$\Delta \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i) = a(t) \tag{1.4}$$

pro libovolnou posloupnost $a \in \mathcal{P}$ a indexy $t, t_0 \in \operatorname{Dom} a$.

Definice 11. Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ a $t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 \geq \tau$ libovolný index. *Operátor sumace od* t_0 $\sum_{t_0} : \mathcal{P}_\tau \to \mathcal{P}_\tau$ přiřadí posloupnosti $a \in \mathcal{P}_\tau$ posloupnost $\sum_{t_0} a$ definovanou vztahem

$$\sum\nolimits_{t_0} a(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i).$$

Věta 4. *Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ a $t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 \geq \tau$ libovolný index. Pak operátor sumace $\sum_{t_0}$: $\mathcal{P}_\tau \to \mathcal{P}_\tau$ je lineární prosté zobrazení, které není surjektivní.*

Důkaz: Buďte $a, b \in \mathcal{P}_\tau$ libovolné posloupnosti a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ libovolná čísla. Pak

$$\sum\nolimits_{t_0} (\alpha a + \beta b)(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} \big(\alpha a(i) + \beta b(i)\big) = \alpha \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i) + \beta \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) = \alpha \sum\nolimits_{t_0} a(t) + \beta \sum\nolimits_{t_0} b(t)$$

pro libovolný index $t \in \operatorname{Dom} a$. To znamená, že zobrazení $\sum_{t_0}$ je lineární.

Nechť $a, b \in \mathcal{P}_\tau$ jsou různé posloupnosti. Pak existuje index $t_1 \in \operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$ takový, že $a(t_1) \neq b(t_1)$. Je-li $t_1 = t_0$, pak

$$\sum\nolimits_{t_0} a(t_0 + 1) - \sum\nolimits_{t_0} b(t_0 + 1) = \sum_{i=t_0}^{t_0} a(i) - \sum_{i=t_0}^{t_0} b(i) = a(t_0) - b(t_0) = a(t_1) - b(t_1) \neq 0.$$

Je-li $t_1 > t_0$, pak množina $A = \{t : \ t > t_0, a(t) \neq b(t)\}$ je neprázdná zdola ohraničená množina celých čísel. Existuje tedy $t_2 = \min A$, pro které platí

$$a(t_0) = b(t_0),\ a(t_0 + 1) = b(t_0 + 1), \ldots,\ a(t_2 - 1) = b(t_2 - 1),\ a(t_2) \neq b(t_2),$$

$$\sum\nolimits_{t_0} a(t_2+1) - \sum\nolimits_{t_0} b(t_2+1) = \sum_{i=t_0}^{t_2} a(i) - \sum_{i=t_0}^{t_2} b(i) = a(t_2) - b(t_2) \neq 0.$$

Je-li $t_1 < t_0$, pak množina $B = \{t : t \in \operatorname{Dom} a, t \leq t_0, a(t) \neq b(t)\}$ je neprázdná shora ohraničená množina celých čísel. Existuje tedy $t_3 = \max B$, pro které platí

$$a(t_3) \neq b(t_3),\ a(t_3+1) = b(t_3+1),\ a(t_3+2) = b(t_3+2), \dots,\ a(t_0) = b(t_0),$$

$$\sum\nolimits_{t_0} a(t_3) - \sum\nolimits_{t_0} b(t3) = \sum_{i=t_0}^{t_3-1} a(i) - \sum_{i=t_0}^{t_3-1} b(i) = -\sum_{i=t_3}^{t_0-1} a(i) + \sum_{i=t_3}^{t_0-1} b(i) = -a(t_3) + b(t_3) \neq 0.$$

Pro libovolnou posloupnost $a \in \mathcal{P}_\tau$ platí $\sum_{t_0} a(t_0) = \sum\limits_{i=t_0}^{t_0-1} a(i) = 0$, takže posloupnost $b \in \mathcal{P}_\tau$ taková, že $b(t_0) \neq 0$ není obrazem žádné posloupnosti $a \in \mathcal{P}_\tau$ při zobrazení $\sum_{t_0}$. $\square$

Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ a $t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 \geq \tau$ libovolný index. Pak platí

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta a(i) = \sum_{i=t_0}^{t-1} \big(a(i+1) - a(i)\big) = \sum_{i=t_0+1}^{t} a(i) - \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i) = a(t) - a(t_0),$$

stručně

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta a(i) = a(t) - a(t_0), \tag{1.5}$$

Rovnosti (1.4) a (1.5) můžeme bezprostředně přepsat na tvar

$$\Delta \sum\nolimits_{t_0} a(t) = a(t), \qquad \sum\nolimits_{t_0} \Delta a(t) = [a]_{t_0}^{t}. \tag{1.6}$$

Abychom ještě zestručnili zápis, zavedeme operátor $|_{t_0} : \mathcal{P}_\tau \to \mathcal{P}_\tau$ předpisem

$$a|_{t_0}(t) = a(t) - a(t_0).$$

Porovnáním rovností (1.4) a (1.5) nyní vidíme, že

$$\mathrm{id}_{\mathcal{P}_\tau} = \Delta \sum_{t_0} \neq \sum_{t_0} \Delta = |_{t_0}.$$

To zejména znamená, že operátory diference a sumace nejsou vzájemně inversní.

Operátory $\cdot^\sigma$, Δ a $\sum_{t_0}$ jakožto zobrazení z množiny $\mathcal{P}$ do sebe můžeme skládat. Složený operátor $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$, tj. operátor, který posloupnosti a přiřadí posloupnost definovanou vztahem

$$\begin{aligned}\Delta^2 a(t) = \Delta\big(\Delta a(t)\big) = \Delta a(t+1) - \Delta a(t) = \big(a(t+2) - a(t+1)\big) - \big(a(t+1) - a(t)\big) = \\ = a(t+2) - 2a(t+1) + a(t)\end{aligned}$$

nazýváme *druhá diference (vpřed)*. Obecně pro $n \in Z$, $n > 1$ klademe $\Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$ a tento operátor nazýváme *n-tá diference (vpřed)*. Pro $n = 0$ můžeme psát $\Delta^0 a(t) = a(t)$, tj. $\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.

Složený operátor $\cdot^{\sigma^2} = \cdot^\sigma \circ \cdot^\sigma$ přiřadí posloupnosti a posloupnost definovanou vztahem $a^{\sigma^2}(t) = a(t+2)$. Obecně pro $n \in Z$, $n > 1$ klademe $\cdot^{\sigma^n} = \cdot^\sigma \circ \cdot^{\sigma^{n-1}}$, tedy $a^{\sigma^n}(t) = a(t+n)$, a $a^{\sigma^0}(t) = a(t+0) = a(t)$, tj. $\cdot^{\sigma^0} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.

Tvrzení 9. Buď $a \in \mathcal{P}$ libovolná posloupnost, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\Delta^n a(t) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a(t+n-i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a^{\sigma^{n-i}}(t),$$

$$a^{\sigma^n}(t) = a(t+n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i a(t).$$

Důkaz: Úplnou indukcí.

$$\Delta^0 a(t) = a(t) = (-1)^0 \binom{0}{0} a(t+0-0).$$

Indukční krok pro první formuli:

$$\begin{aligned}
\Delta^n a(t) &= \Delta\left(\Delta^{n-1} a(t)\right) = \Delta\left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} a(t+n-1-i)\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} a(t+n-i) - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} a(t+n-1-i) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} a(t+n-i) - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n-1}{i-1} a(t+n-i) = \\
&= a(t+n) + \sum_{i=1}^{n-1} \left((-1)^i \binom{n-1}{i} - (-1)^{i-1} \binom{n-1}{i-1}\right) a(t+n-i) - (-1)^{n-1} a(t) = \\
&= a(t+n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right) a(t+n-i) + (-1)^n a(t) = \\
&= a(t+n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} a(t+n-i) + (-1)^n a(t).
\end{aligned}$$

Indukční krok pro druhou formuli:

$$\begin{aligned}
a(t+n) &= \Delta a(t+n-1) + a(t+n-1) = \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) = \\
&= \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) + a(t) = \\
&= \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a(t) + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i+1} \Delta^{i+1} a(t) + a(t) = \\
&= \Delta\left(\Delta^{n-1} a(t) + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i+1}\right) \Delta^i a(t)\right) + a(t) = \\
&= \Delta^n a(t) + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i+1} \Delta^{i+1} a(t) + a(t) = \Delta^n a(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \Delta^i a(t) + a(t).
\end{aligned}$$

□

Poznámka 5. Tvrzení Věty 9 můžeme zapsat v operátorovém tvaru

$$\Delta^n = (\cdot^\sigma - \mathrm{id}_\mathcal{P})^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \cdot^{\sigma^{n-i}}, \qquad \cdot^{\sigma^n} = (\Delta + \mathrm{id}_\mathcal{P})^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i.$$

Poznámka 6. Poněvadž složení lineárních zobrazení dává lineární zobrazení, je n-tá diference lineární zobrazení množiny posloupností $\mathcal{P}_\tau$ na sebe pro libovolné $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

1.3 Obecné věty o diferenci

Následující tři věty plynou přímo z Definic 2, 3 a 10.

Věta 5. *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost a $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Pak platí*

- *a je ryze rostoucí na intervalu I právě tehdy, když pro každý index $t \in \operatorname{Dom} a$ takový, že $t \in I$ a $t+1 \in I$ platí nerovnost $\Delta a(t) > 0$, tj.*

$$(\forall t)\{t, t+1\} \subseteq \operatorname{Dom} a \cap I \;\Rightarrow\; \Delta a(t) > 0;$$

- *a je rostoucí na intervalu I právě tehdy, když*

$$(\forall t)\{t, t+1\} \subseteq \operatorname{Dom} a \cap I \;\Rightarrow\; \Delta a(t) \geq 0;$$

- *a je ryze klesající na intervalu I právě tehdy, když*

$$(\forall t)\{t, t+1\} \subseteq \operatorname{Dom} a \cap I \;\Rightarrow\; \Delta a(t) < 0;$$

- *a je klesající na intervalu I právě tehdy, když*

$$(\forall t)\{t, t+1\} \subseteq \operatorname{Dom} a \cap I \;\Rightarrow\; \Delta a(t) \leq 0;$$

- *a je ryze monotonní na intervalu I právě tehdy, když mezi indexy $t \in \operatorname{Dom} a$ takovými, že $t+2 \in I$ není uzel posloupnosti Δa, tj.*

$$(\forall t)\{t, t+2\} \in \operatorname{Dom} a \cap I \;\Rightarrow\; \big(\Delta a(t) \neq 0 \;\wedge\; \Delta a(t)\Delta a(t+1) \geq 0\big);$$

- *a je monotonní na intervalu I právě tehdy, když posloupnost Δa na intervalu I nemění znaménko, tj.*

$$(\forall t)\{t, t+2\} \subseteq \operatorname{Dom} a \cap I \;\Rightarrow\; \Delta a(t)\Delta a(t+1) \geq 0.$$

Věta 6. *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost a $t \in \operatorname{Dom} a$. Pak platí*

- *t je argumentem ostrého lokálního maxima právě tehdy, když $\Delta a(t) < 0$ a pokud t není počáteční index, pak $\Delta a(t-1) > 0$, tj.*

$$\Delta a(t) < 0 \;\wedge\; \big(t-1 \in \operatorname{Dom} a \;\Rightarrow\; \Delta a(t-1) > 0\big).$$

- *t je argumentem lokálního maxima právě tehdy, když*

$$\Delta a(t) \leq 0 \ \wedge \ \big(t-1 \in \operatorname{Dom} a \ \Rightarrow \ \Delta a(t-1) \geq 0\big).$$

- *t je argumentem ostrého lokálního minima právě tehdy, když*

$$\Delta a(t) > 0 \ \wedge \ \big(t-1 \in \operatorname{Dom} a \ \Rightarrow \ \Delta a(t-1) < 0\big).$$

- *t je argumentem lokálního minima právě tehdy, když*

$$\Delta a(t) \geq 0 \ \wedge \ \big(t-1 \in \operatorname{Dom} a \ \Rightarrow \ \Delta a(t-1) \leq 0\big).$$

Věta 7. *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost, index $t \in \operatorname{Dom} a$ není počáteční a $t-1$ je uzlem posloupnosti Δa. Pak index t je argumentem lokálního extrému. V případě $\Delta^2 a(t-1) \leq 0$ se jedná se o maximum, v případě $\Delta^2 a(t-1) \geq 0$ se jedná se o minimum. Pokud je přitom $\Delta a(t-1) \neq 0$, pak je tento extrém ostrý.*

Věta 8 (Rolleova)**.** *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost a $t_1, t_2 \in \operatorname{Dom} a$ jsou takové indexy, že $t_1 < t_2$ a $a(t_1) = a(t_2)$. Pak existuje index $s \in [t_1, t_2 - 1]$, který je uzlem posloupnosti Δa.*

Důkaz: Kdyby žádný index z intervalu $[t_1, t_2 - 1]$ nebyl uzlem, posloupnost a by podle Věty 5 byla ryze monotonní na intervalu $[t_1, t_2 + 1]$ a proto by nemohlo platit $a(t_1) = a(t_2)$. □

Věta 9 (Lagrangeova o střední hodnotě)**.** *Nechť $a \in \mathcal{P}$ je posloupnost a $t_1, t_2 \in \operatorname{Dom} a$ jsou takové indexy, že $t_1 < t_2 - 1$. Pak existuje index $s \in [t_1 + 1, t_2 - 1]$ takový, že platí aspoň jedna z nerovností*

$$\Delta a(s) \leq \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \Delta a(s-1), \qquad \Delta a(s-1) \leq \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \Delta a(s).$$

Důkaz: Položme

$$b(t) = a(t) - \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1}(t - t_1).$$

Pak $b(t_1) = a(t_1)$, $b(t_2) = a(t_2) - \big(a(t_2) - a(t_1)\big) = a(t_1)$, což znamená. že posloupnost b splňuje předpoklady Rolleovy věty. Existuje tedy $c \in [t_1, t_2 - 1]$ takový index, že $\Delta b(c) = 0$ nebo $\Delta b(c)\Delta b(c+1) < 0$. Položme $s = c + 1$. Pak je $s \in [t_1 + 1, t_1 - 1]$ a platí

$$\Delta b(s-1) = 0 \quad \text{nebo} \quad \Delta b(s-1)\Delta b(s) < 0.$$

Dále podle Věty 3 je

$$\Delta b(t) = \Delta a(t) - \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1}$$

pro každý index $t \in \operatorname{Dom} a$, takže

$$\Delta a(s-1) - \Delta b(s-1) = \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} = \Delta a(s) - \Delta b(s).$$

Pokud $\Delta b(s-1) = 0$, pak

$$\Delta a(s-1) = \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \Delta a(s) \quad \text{nebo} \quad \Delta a(s) \leq \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} = \Delta a(s-1).$$

Pokud $\Delta b(s-1)\Delta b(s) < 0$, pak v případě $\Delta b(s-1) > 0$, $\Delta b(s) < 0$ je

$$\Delta a(s) < \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} < \Delta a(s-1),$$

a v případě $\Delta b(s-1) < 0$, $\Delta b(s) > 0$ je

$$\Delta a(s-1) < \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} < \Delta a(s).$$

□

Věta 10 (de l'Hôpitalovo pravidlo, Stolzova-Cesàrova věta)**.** *Buďte $a, b \in \mathcal{P}$ posloupnosti a nechť je posloupnost b od jistého indexu ryze monotonní, tj.*

$$(\exists \tau \in \operatorname{Dom} b)(\forall t \in \operatorname{Dom} b)\ t \geq \tau \ \Rightarrow\ \operatorname{sgn} \Delta b(t) = \operatorname{sgn} \Delta b(\tau) \neq 0.$$

Jestliže $\left|\lim_{t\to\infty} b(t)\right| = \infty$ a existuje limita $\lim \frac{\Delta a}{\Delta b}$, pak existuje také limita $\lim \frac{a}{b}$ a platí

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)}. \tag{1.7}$$

Jestliže $\lim_{t\to\infty} a(t) = 0 = \lim_{t\to\infty} b(t)$ pak platí

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)}. \tag{1.8}$$

Zejména pokud existuje limita $\lim \frac{\Delta a}{\Delta b}$, pak existuje také limita $\lim \frac{a}{b}$ a opět platí rovnost (1.7).

Důkaz: Nechť pro určitost $\Delta b(t) < 0$ pro $t \geq \tau$. V případě ryze rostoucí posloupnosti b bychom postupovali analogicky.

Nechť $\left|\lim_{t\to\infty} b(t)\right| = \infty$. Poněvadž posloupnost b je klesající, musí být $\lim_{t\to\infty} b(t) = -\infty$ podle Věty 1 a tedy od jistého indexu ϱ jsou všechny členy posloupnosti b záporné

$$b(t) < 0 \text{ pro každý index } t \geq \varrho.$$

Nechť $\lim_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = c \in \mathbb{R}$. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje index σ takový, že

$$c - \varepsilon < \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} < c + \varepsilon$$

pro všechny indexy $t \geq \sigma$. Pro $t \geq \max\{\sigma, \tau\}$ tedy platí

$$(c - \varepsilon)\Delta b(t) > \Delta a(t) > (c + \varepsilon)\Delta b(t).$$

Vememe libovolné indexy $t_1 \geq \max\{\tau, \sigma, \varrho\}$, $t_2 > t_1$ a sečteme předchozí rovnosti od t_1 do $t_2 - 1$. Podle (1.5) dostaneme

$$(c - \varepsilon)\big(b(t_2) - b(t_1)\big) > a(t_2) - a(t_1) > (c + \varepsilon)\big(b(t_2) - b(t_1)\big).$$

Tyto nerovnosti upravíme na tvar

$$(c-\varepsilon)\left(1-\frac{b(t_1)}{b(t_2)}\right)+\frac{a(t_1)}{b(t_2)}<\frac{a(t_2)}{b(t_2)}<(c+\varepsilon)\left(1-\frac{b(t_1)}{b(t_2)}\right)+\frac{a(t_1)}{b(t_2)}.$$

Limitním přechodem $t_2 \to \infty$ nyní dostaneme nerovnosti

$$c-\varepsilon \le \liminf_{t\to\infty}\frac{a(t)}{b(t)} \le \limsup_{t\to\infty}\frac{a(t)}{b(t)} \le c+\varepsilon.$$

Poněvadž kladné číslo ε bylo libovolné, platí

$$c \le \liminf_{t\to\infty}\frac{a(t)}{b(t)} \le \limsup_{t\to\infty}\frac{a(t)}{b(t)} \le c,$$

což znamená, že ve všech nerovnostech nastane rovnost a tedy $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{a(t)}{b(t)}=c$.

Pokud $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)}=-\infty$, pak pro libovolné $h\in\mathbb{R}$ existuje index σ takový, že

$$\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)}<h$$

pro všechny indexy $t\ge\sigma$. Nyní můžeme zopakovat předchozí úvahy s tím, že budeme používat pouze „pravou část“ nerovností, v nichž místo $c+\varepsilon$ budeme psát h. Dostaneme

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{a(t)}{b(t)} \le \limsup_{t\to\infty}\frac{a(t)}{b(t)} \le h,$$

což vzhledem k tomu, že číslo h bylo libovolné, znamená, že $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{a(t)}{b(t)}=-\infty$.

Pokud $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)}=\infty$, provedeme důkaz analogicky.

Nechť nyní $\lim\limits_{t\to\infty}a(t)=0=\lim\limits_{t\to\infty}b(t)$. Poněvadž pro $t\ge\tau$ platí $\Delta b(t)<0$, podle Věty 5 je posloupnost b na intervalu $[\tau,\infty)$ klesající a poněvadž $\lim\limits_{t\to\infty}b(t)=0$, platí $b(t)>0$ pro každý index $t\ge\tau$.

Prostřední nerovnost v (1.8) je triviální. Pokud $\liminf\limits_{t\to\infty}\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)}=-\infty$, je triviální i první nerovnost. Nechť tedy

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)}=c\in\mathbb{R},$$

tj. existuje index σ takový, že pro libovolné kladné číslo ε a pro všechny indexy $t\ge\sigma$ platí

$$\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)}\ge c-\varepsilon.$$

Pro všechny indexy $t\ge\max\{\tau,\sigma\}$ tedy máme nerovnost

$$\Delta a(t)\le(c-\varepsilon)\Delta b(t).$$

Nechť t_1, t_2 jsou libovolné indexy takové, že $t_2 > t_1 \geq \max\{\tau, \sigma\}$. Sečtením předchozích nerovností od t_1 do t_2 dostaneme podle (1.5) nerovnost

$$a(t_2) - a(t_1) \leq (c - \varepsilon)\big(b(t_2) - b(t_1)\big)$$

ze které limitním přechodem $t_2 \to \infty$ plyne

$$a(t_1) \geq (c - \varepsilon) b(t_1).$$

Poněvadž index $t_1 \geq \max\{\tau, \sigma\}$ byl libovolný, pro každý index index $t \geq \max\{\tau, \sigma\}$ platí

$$\frac{a(t)}{b(t)} \geq c - \varepsilon,$$

což znamená, že $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{a(t)}{b(t)} \geq c + \varepsilon$. Poněvadž kladné číslo ε bylo libovolné, platí první nerovnost v (1.8).

Poslední nerovnost v (1.8) dokážeme analogicky. □

Poznámka 7. Předpoklad o ryzí monotonnosti posloupnosti b je podstatný. Uvažujme například posloupnosti a, b definované na $\mathbb{Z}_1$ vztahy

$$a(t) = t, \quad b(t) = \left(1 + (-1)^t\right) t^2 + \left(1 - (-1)^t\right) t = \begin{cases} 2t^2, & t \text{ sudé}, \\ 2t, & t \text{ liché}. \end{cases}$$

Pak je $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) = \infty$, $\Delta a(t) = (t + 1) - t = 1$ a

$$\begin{aligned} \Delta b(t) &= \left(1 + (-1)^{t+1}\right)(t + 1)^2 + \left(1 - (-1)^{t+1}\right)(t + 1) - \left(1 + (-1)^t\right) t^2 - \left(1 - (-1)^t\right) t = \\ &= 2\left((-1)^{t+1} t^2 + t\right), \end{aligned}$$

takže

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\left((-1)^{t+1} t^2 + t\right)} = 0,$$

avšak

$$\frac{a(t)}{b(t)} = \frac{1}{\left(1 + (-1)^t\right) t + \left(1 - (-1)^t\right)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2t}, & t \text{ sudé}, \\ \frac{1}{2}, & t \text{ liché}, \end{cases}$$

což znamená, že

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} = 0 < \frac{1}{2} = \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)}$$

a limita podílu posloupností a, b neexistuje.

Pro případ limity typu $\frac{0}{0}$ uvažujme posloupnosti a, b definované na $\mathbb{Z}_1$ vztahy

$$a(t) = \frac{1}{t}, \qquad b(t) = \frac{(-1)^t}{t}.$$

Pak

$$\Delta a(t) = \frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t} = \frac{t - (t + 1)}{t(t + 1)} = \frac{-1}{t(t + 1)},$$

$$\Delta b(t) = (-1)^{t+1}\frac{1}{t+1} - (-1)^t\frac{1}{t} = (-1)^{t+1}\frac{t+(t+1)}{t(t+1)} = (-1)^{t+1}\frac{2t+1}{t(t+1)},$$

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} b(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{(-1)^t}{t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\frac{\Delta a(t)}{\Delta b(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{(-1)^t}{2t+1} = 0$$

avšak limita posloupnosti $\dfrac{a(t)}{b(t)} = (-1)^t$ neexistuje.

1.4 Diferenční a sumační počet

Věta 11 (Diference součinu a podílu posloupností)**.** *Buď $\tau \in \mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$ a $a, b \in \mathcal{P}_\tau$. Pak pro každý index $t \in \operatorname{Dom} a$ platí*

$$\begin{aligned}\big(\Delta ab\big)(t) &= b(t)\Delta a(t) + a(t+1)\Delta b(t) = b(t+1)\Delta a(t) + a(t)\Delta b(t) = \\ &= \frac{b(t)+b(t+1)}{2}\Delta a(t) + \frac{a(t)+a(t+1)}{2}\Delta b(t)\end{aligned} \tag{1.9}$$

Pro každý index $t \in \operatorname{Dom} b$ takový, že $b(t) \neq 0 \neq b(t+1)$ platí

$$\left(\Delta\frac{1}{b}\right)(t) = -\frac{\Delta b(t)}{b(t)b(t+1)}, \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}\left(\Delta\frac{a}{b}\right)(t) &= \frac{b(t)\Delta a(t) - a(t)\Delta b(t)}{b(t)b(t+1)} = \frac{b(t+1)\Delta a(t) - a(t+1)\Delta b(t)}{b(t)b(t+1)} = \\ &= \frac{\big(b(t)+b(t+1)\big)\Delta a(t) - \big(a(t)+a(t+1)\big)\Delta b(t)}{2b(t)b(t+1)}.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Důkaz: První rovnost v (1.9) plyne z výpočtu

$$\begin{aligned}\big(\Delta ab\big)(t) &= a(t+1)b(t+1) - a(t)b(t) = \\ &= a(t+1)b(t+1) - a(t+1)b(t) + a(t+1)b(t) - a(t)b(t) = \\ &= a(t+1)\big(b(t+1) - b(t)\big) + b(t)\big(a(t+1) - a(t)\big),\end{aligned}$$

druhá z výpočtu

$$\begin{aligned}\big(\Delta ab\big)(t) &= a(t+1)b(t+1) - a(t)b(t) = \\ &= a(t+1)b(t+1) - a(t)b(t+1) + a(t)b(t+1) - a(t)b(t) = \\ &= \big(a(t+1) - a(t)\big)b(t+1) + a(t)\big(b(t+1) - b(t)\big)\end{aligned}$$

a třetí je důsledkem prvních dvou.

Nechť index t splňuje předpoklad druhé části věty. Pak

$$\left(\Delta\frac{1}{b}\right)(t) = \frac{1}{b(t+1)} - \frac{1}{b(t)} = \frac{b(t)-b(t+1)}{b(t+1)b(t)} = -\frac{b(t+1)-b(t)}{b(t)b(t+1)},$$

což je rovnost (1.10). Z ní a z rovností (1.9) plynou rovnosti (1.11). □

Věta 12 (Sumace „per partes“). *Buď $\tau \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $a, b \in \mathcal{P}_\tau$ a $t_0 \in \operatorname{Dom} a$. Pak pro každý index $t \in \operatorname{Dom} a$ platí*

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} a(i)\Delta b(i) = a(t)b(t) - a(t_0)b(t_0) - \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i+1)\Delta a(i), \tag{1.12}$$

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} a(i+1)\Delta b(i) = a(t)b(t) - a(t_0)b(t_0) - \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)\Delta a(i) \tag{1.13}$$

Důkaz: Podle (1.5) platí

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta(ab)(i) = a(t)b(t) - a(t_0)b(t_0)$$

a podle druhé z rovností (1.9) a Věty 4 platí

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta(ab)(i) = \sum_{i=t_0}^{t-1} \big(b(i+1)\Delta a(i) + a(i)\Delta b(i)\big) = \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i+1)\Delta a(i) + \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i)\Delta b(i).$$

Odtud již plyne rovnost (1.12). Rovnost (1.13) odvodíme analogicky s využitím první z rovností (1.9). □

Výsledky Vět 3, 4, 11, 12 a relace (1.4), (1.5) můžeme shrnout:

1.4.1 Přehled vzorců pro diferenci a sumaci

- $\Delta a = 0 \;\Leftrightarrow\; (\exists \gamma \in \mathbb{R}) a \equiv \gamma$
- $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$
- $\Delta(\alpha a) = \alpha \Delta a$
- $\Delta(ab) = b\Delta a + a^\sigma \Delta b = b^\sigma \Delta a + a\Delta b = \frac{1}{2}\big((b+b^\sigma)\Delta a + (a+a^\sigma)\Delta b\big)$
- $\Delta \dfrac{1}{b} = -\dfrac{\Delta b}{bb^\sigma}$
- $\Delta \dfrac{a}{b} = \dfrac{b\Delta a - a\Delta b}{bb^\sigma} = \dfrac{b^\sigma \Delta a - a^\sigma \Delta b}{bb^\sigma} = \dfrac{(b+b^\sigma)\Delta a - (a+a^\sigma)\Delta b}{2bb^\sigma}$
- $\sum_{t_0}(a+b) = \sum_{t_0} a + \sum_{t_0} b$
- $\sum_{t_0}(\alpha a) = \alpha \sum_{t_0} a$
- $\Delta \sum_{t_0} a = a$
- $\sum_{t_0} \Delta a = a|_{t_0}$
- $\sum_{t_0} a\Delta b = ab|_{t_0} - \sum_{t_0} b^\sigma \Delta a, \quad \sum_{t_0} a^\sigma \Delta b = ab|_{t_0} - \sum_{t_0} b\Delta a$

Uvedené vzorce platí pro posloupnosti $a, b \in \mathcal{P}_\tau$ se stejným definičním oborem, jejich index $t_0 \in \operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$ a číslo $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.4.2 Diference a sumy některých posloupností

- $\Delta\alpha^t = (\alpha-1)\alpha^t, \quad \sum_{t_0} \alpha^t = \dfrac{\alpha^{t_0}\left(\alpha^{t-t_0}-1\right)}{\alpha-1};$

  zejména $\Delta 2^t = 2^t, \quad \sum_0 2^t = 2^t - 1.$

  Důkaz: $\Delta\alpha^t = \alpha^{t+1} - \alpha^t = \alpha^t(\alpha-1)$,
  $\sum_{t_0} \alpha^t = \dfrac{1}{\alpha-1}\sum_{t_0}(\alpha-1)\alpha^t = \dfrac{1}{\alpha-1}\sum_{t_0}\Delta\alpha^t = \dfrac{1}{\alpha-1}\alpha^t|_{t_0} = \dfrac{\alpha^t-\alpha^{t_0}}{\alpha-1}\sum_{t_0}.$ □

- $\Delta\kappa^t\cos t\varphi = \kappa^t(\kappa\cos\varphi-1)\cos t\varphi - \kappa^{t+1}\sin t\varphi\sin\varphi,$

  $\Delta\kappa^t\sin t\varphi = \kappa^t(\kappa\cos\varphi-1)\sin t\varphi + \kappa^{t+1}\cos t\varphi\cos\varphi,$

  $\sum_{t_0}\kappa^t\cos t\varphi = \dfrac{\kappa^{t+1}\cos(t-1)\varphi - \kappa^{t_0+1}\cos(t_0-1)\varphi - \kappa^t\cos t\varphi + \kappa^{t_0}\cos t_0\varphi}{\kappa^2-2\kappa\cos\varphi+1},$

  $\sum_{t_0}\kappa^t\sin t\varphi = \dfrac{\kappa^{t+1}\sin(t-1)\varphi - \kappa^{t_0+1}\sin(t_0-1)\varphi - \kappa^t\sin t\varphi + \kappa^{t_0}\sin t_0\varphi}{\kappa^2-2\kappa\cos\varphi+1},$

  Důkaz:
  $\Delta\kappa^t\cos t\varphi = \kappa^{t+1}\cos t+1\varphi - \kappa^t\cos t\varphi = \kappa^{t+1}\left(\cos t\varphi\cos\varphi - \sin t\varphi\sin\varphi\right) - \kappa^t\cos t\varphi,$

  $\Delta\kappa^t\sin t\varphi = \kappa^{t+1}\sin t+1\varphi - \kappa^t\sin t\varphi = \kappa^{t+1}\left(\sin t\varphi\cos\varphi + \cos t\varphi\sin\varphi\right) - \kappa^t\sin t\varphi,$

  $$\begin{aligned}
  \sum_{t_0}\kappa^t(\cos t\varphi + \mathrm{i}\sin t\varphi) &= \sum_{t_0}\left(\kappa\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^t = \left(\kappa\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^{t_0}\frac{\left(\kappa\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^{t-t_0}-1}{\kappa\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-1} = \\
  &= \left(\kappa\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^{t_0}\frac{\left(\left(\kappa\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^{t-t_0}-1\right)\left(\kappa^{-\mathrm{i}\varphi}-1\right)}{\left(\kappa\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-1\right)\left(\kappa^{-\mathrm{i}\varphi}-1\right)} = \frac{\left(\left(\kappa\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^{t}-\left(\kappa\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^{t_0}\right)\left(\kappa^{-\mathrm{i}\varphi}-1\right)}{\kappa^2-\kappa\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}-\kappa\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+1} = \\
  &= \frac{\left(\kappa^t(\cos t\varphi+\mathrm{i}\sin t\varphi) - \kappa^{t_0}(\cos t_0\varphi + \mathrm{i}\sin t_0\varphi)\right)\left(\kappa(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)-1\right)}{\kappa^2-\kappa\left((\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)+(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)\right)+1} = \\
  &= \frac{\left(\kappa^t\cos t\varphi - \kappa^{t_0}\cos t_0\varphi + \mathrm{i}(\kappa^t\sin t\varphi - \kappa^{t_0}\sin t_0\varphi)\right)(\kappa\cos\varphi - 1 - \mathrm{i}\kappa\sin\varphi)}{\kappa^2-2\kappa\cos\varphi+1} = \\
  &= \frac{(\kappa^t\cos t\varphi - \kappa^{t_0}\cos t_0\varphi)(\kappa\cos\varphi-1) + (\kappa^t\sin t\varphi - \kappa^{t_0}\sin t_0\varphi)\kappa\sin\varphi}{\kappa^2-2\kappa\cos\varphi+1} + \\
  &\quad + \mathrm{i}\,\frac{-(\kappa^t\sin t\varphi - \kappa^{t_0}\sin t_0\varphi)\kappa\sin\varphi + (\kappa^t\cos t\varphi - \kappa^{t_0}\cos t_0\varphi)(\kappa\cos\varphi-1)}{\kappa^2-2\kappa\cos\varphi+1},
  \end{aligned}$$

  a formule pro sumy jsou reálnou a imaginární částí tohoto výrazu. □

- $\Delta t = 1, \quad \sum_{t_0} 1 = t - t_0, \quad \sum_{t_0} t = \frac{1}{2}(t-1+t_0)(t-t_0);$

  zejména $\sum_1 t = 1+2+3+\cdots+(t-1) = \frac{1}{2}t(t-1).$

  Důkaz: $\Delta t = (t+1) - t = 1.$
  $\sum_{t_0} 1 = \sum_{t_0}\Delta t = t|_{t_0} = t - t_0.$

V následujícím výpočtu využijeme sumaci „per partes".
$\sum_{t_0} t = \sum_{t_0} t\Delta t = t^2|_{t_0} - \sum_{t_0}(t+1)\Delta t = t^2 - t_0^2 - \sum_{t_0} t - \sum_{t_0} 1 = t^2 - t_0^2 - (t-t_0) - \sum_{t_0} t$
a odtud plyne $2\sum_{t_0} t = t^2 - t_0^2 - (t-t_0) = (t-t_0)(t+t_0-1)$. □

- Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\Delta t^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} t^{n-i},$$

$$\sum_{t_0} t^n = \frac{1}{n+1}\left[(t-t_0)\left((t-1)\sum_{i=0}^{n-1} t^{n-1-i}t_0^i + t_0^n\right) - \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i+1}\sum_{t_0} t^{n-i}\right],$$

zejména $\sum_1 t^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + (t-1)^2 = \frac{1}{6}t(t-1)(2t-1)$.

Důkaz: $\Delta t^n = (t+1)^n - t = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} t^{n-i} - t^n = t^n + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} t^{n-i} - t^n$.

$$\begin{aligned}
\sum_{t_0} t^n = \sum_{t_0} t^n \Delta t = t^{n+1}|_{t_0} - \sum_{t_0}(t+1)\Delta t^n &= \\
= t^{n+1} - t_0^{n+1} - \sum_{t_0} t\Delta t^n - \sum_{t_0} \Delta t^n &= \\
= t^{n+1} - t_0^{n+1} - t^n|_{t_0} - \sum_{t_0} t \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} t^{n-i} &= \\
= t^{n+1} - t_0^{n+1} - t^n - t_0^n - \sum_{t_0} \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} t^{n-i+1} &= \\
= (t-t_0)\sum_{i=0}^{n} t^{n-i}t_0^i - (t-t_0)\sum_{i=0}^{n-1} t^{n-1-i}t_0^i - \sum_{t_0}\left(nt^n + \sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i} t^{n-i+1}\right) &= \\
= (t-t_0)\left(\sum_{i=0}^{n-1} t^{n-i-1}(t-1)t_0^i + t_0^n\right) - \sum_{t_0}\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i+1} t^{n-i} - \sum_{t_0} nt^n &= \\
= (t-t_0)\left((t-1)\sum_{i=0}^{n-1} t^{n-i-1}t_0^i + t_0^n\right) - \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i+1}\sum_{t_0} t^{n-i} - n\sum_{t_0} t^n&;
\end{aligned}$$

z této rovnosti již plyne druhá dokazovaná formule.

$\sum_1 t^2 = \frac{1}{3}\left[(t-1)\big((t-1)(t+1)+1\big) - \binom{2}{2}\sum_{t_0} t\right] = \frac{1}{3}\left[(t-1)t^2 - \frac{1}{2}t(t-1)\right]$. □

- Buď $t \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \leq t$. Definujme *faktoriálovou funkci* rovností

$$t^{(\nu)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1)};$$

zejména pro $\nu \in \mathbb{Z}_t$ je $t^{(\nu)} = \dfrac{t!}{(t-\nu)!}$. Pak platí

$$\Delta t^{(\nu)} = \nu t^{(\nu-1)}, \qquad \sum_{t_0} t^{(\nu)} = \frac{t^{(\nu+1)} - t_0^{(\nu+1)}}{\nu+1}.$$

Důkaz: $\Delta t^{(\nu)} = (t+1)^{(\nu)} - t^{\nu} = \dfrac{\Gamma(t+2)}{\Gamma(t-\nu+2)} - \dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1)} =$

$$= \frac{(t+1)\Gamma(t+1)}{(t-\nu+1)\Gamma(t-\nu+1)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1)} \frac{t+1-(t-\nu+1)}{t-\nu+1} =$$

$$= \frac{\nu\Gamma(t+1)}{(t-\nu+1)\Gamma(t-\nu+1)} = \nu \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+2)}.$$

$\sum_{t_0} t^{(\nu)} = \dfrac{1}{\nu+1} \sum_{t_0} (\nu+1) t^{(\nu)} = \dfrac{1}{\nu+1} \sum_{t_0} \Delta t^{(\nu+1)} = \dfrac{1}{\nu+1} \sum_{t_0} t^{(\nu+1)}|_{t_0}.$ □

Kapitola 2

Diferenční rovnice

Definice 12. Nechť Φ je funkce $2k{+}2$ proměnných, která je nekonstantní ve druhé proměnné a je nekonstantní v $k{+}1$-ní nebo v poslední proměnné. *Diferenční rovnice k-tého řádu* je rovnice tvaru

$$\Phi\big(t, x(t), \Delta x(t), \Delta^2 x(t), \dots, \Delta^k x(t), x(t+1), x(t+2), \dots, x(t+k)\big) = 0.$$

Diferenční rovnice k-tého řádu prvního typu nerozřešená vzhledem k nejvyšší diferenci (*implicitní diferenční rovnice k-tého řádu*) je rovnice tvaru

$$F\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^k x\right) = 0, \tag{2.1}$$

kde F je reálná funkce $k+2$ proměnných, která není konstantní ve druhé a v poslední proměnné.

Diferenční rovnice k-tého řádu prvního typu rozřešená vzhledem k nejvyšší diferenci (*explicitní diferenční rovnice k-tého řádu*) je rovnice tvaru

$$\Delta^k x = f\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^{k-1} x\right), \tag{2.2}$$

kde f je reálná funkce $k+1$ proměnných, která není konstantní ve druhé proměnné.

Diferenční rovnice k-tého řádu druhého typu je rovnice tvaru

$$G\big(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+k)\big) = 0, \tag{2.3}$$

kde G je reálná funkce $k+2$ proměnných, která není konstantní ve druhé a v poslední proměnné.

Rekurentní formule k-tého řádu je rovnice tvaru

$$x(t+k) = g\big(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+k-1)\big), \tag{2.4}$$

kde g je reálná funkce $k+1$ proměnných, která není konstantní ve druhé proměnné.

Poznámka 8. Každou diferenční rovnici lze převést na diferenční rovnici prvního nebo druhého typu.

Každou implicitní diferenční rovnici prvního typu lze převést na diferenční rovnici druhého typu stejného řádu a naopak.

Každou explicitní diferenční rovnici prvního typu lze převést na rekurentní formuli stejného řádu a naopak.

Vzhledem k Tvrzení 9 totiž můžeme položit

$$F\big(t, x(t), \Delta x(t), \dots, \Delta^k x(t)\big) =$$
$$= \Phi\left(t, x(t), \Delta x(t), \dots, \Delta^k x(t), \Delta x(t) + x(t), \dots, \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i x(t)\right),$$

$$G\big(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+k)\big) =$$
$$= \Phi\left(t, x(t), x(t+1) - x(t), \dots, \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(t+k-i), x(t+1), \dots, x(t+k)\right).$$

$$G\big(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+k)\big) =$$
$$= F\left(t, x(t), x(t+1) - x(t), x(t+2) - 2x(t+1) + x(t), \dots, \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(t+k-i)\right),$$

$$F\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^k x\right) = G\left(t, x(t), \Delta x(t) + x(t), \dots, \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i x(t)\right).$$

$$g\big(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+k-1)\big) =$$
$$= f\left(t, x(t), x(t+1) - x(t), \dots, \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} x(t+k-i+1)\right) -$$
$$- \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(t+k-i),$$

$$f\left(t, x, \Delta x, \Delta^2 x, \dots, \Delta^{k-1} x\right) =$$
$$= g\left(t, x(t), \Delta x(t) + x(t), \dots, \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \Delta^i x(t)\right) - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \Delta^i x(t).$$

Definice 13. Nechť $t_0 \in \mathbb{Z}$ a $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1} \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že

$$(t_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \in \operatorname{Dom} g.$$

Rovnosti

$$x(t_0) = \xi_0,\ x(t_0+1) = \xi_1,\ x(t_0+2) = \xi_2, \dots,\ x(t_0+k-1) = \xi_{k-1} \tag{2.5}$$

nazveme *počáteční podmínky pro rekurentní formuli* (2.4).

Pokud ekvivalentně předpokládáme, že

$$\left(t_0, \xi_0, \xi_1 - \xi_0, \dots, \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} \xi_{k-1}\right) \in \operatorname{Dom} f,$$

nazýváme rovnosti (2.5) *počáteční podmínky pro diferenční rovnici* (2.2). Rovnici (2.2) s počátečními podmínkami (2.5) nazýváme *počáteční úloha (problém) pro diferenční rovnici* (2.2).

Definice 14. Libovolná posloupnost $x \in \mathcal{P}$ taková, že splňuje některou z rovností (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) se nazývá *partikulární řešení příslušné diferenční rovnice.*

Množina všech posloupností, které jsou partikulárním řešením některé diferenční rovnice (2.1), (2.2), (2.3) nebo (2.4), se nazývá *obecné řešení příslušné diferenční rovnice.*

Partikulární řešení, které splňuje počáteční podmínku (2.5) se nazývá *řešení počáteční úlohy.*

Příklad. Uvažujme rekurentní formuli pro geometrickou posloupnost s kvocientem 2, tj.

$$x(t+1) = 2x(t)$$

s počáteční podmínkou $x(t_0) = \xi_0$. Tuto formuli můžeme ekvivalentně zapsat jako explicitní nebo implicitní diferenční rovnici prvního typu

$$\Delta x = x, \text{ nebo } x - \Delta x = 0,$$

nebo jako diferenční rovnici druhého typu

$$x(t+1) - 2x(t) = 0.$$

Libovolná posloupnost definovaná vztahem $x(t) = a2^t$, kde a je nějaké reálné číslo, je partikulárním řešením rovnice.

Množina $\{x \in \mathcal{P} : x(t) = a2^t, a \in \mathbb{R}\}$ je obecným řešením rovnice.

Posloupnost definovaná vztahem $x(t) = \xi_0 2^{t-t_0}$ je řešením počáteční úlohy. ■

Definice 15. Nechť $f_1, f_2, \dots, f_k$ a $g_1, g_2, \dots, g_k$ jsou funkce $k+1$ proměnných se stejným definičním oborem. *Systém k explicitních diferenčních rovnic prvního řádu* je systém rovnic tvaru

$$\begin{aligned} \Delta x_1(t) &= f_1\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big), \\ \Delta x_2(t) &= f_2\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big), \\ &\vdots \\ \Delta x_k(t) &= f_k\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big), \end{aligned} \tag{2.6}$$

systém k rekurentních formulí prvního řádu je systém rovnic tvaru

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= g_1\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big), \\ x_2(t+1) &= g_2\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big), \\ &\vdots \\ x_k(t+1) &= g_k\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Poznámka 9. Systém explicitních diferenčních rovnic prvního řádu lze převést na systém rekurentních formulí prvního řádu a naopak. Stačí totiž položit

$$g_i\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big) = f_i\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big) + x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Vektorovou posloupnost $\boldsymbol{x}$ a její hodnotu v indexu t definujeme vztahy

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}$$

jako vektor (k-tici) posloupností. Označíme dále

$$\boldsymbol{f}\big(t,\boldsymbol{x}(t)\big)=\boldsymbol{f}\big(t,x_1(t),x_2(t),\dots,x_k(t)\big)=\begin{pmatrix} f_1\big(t,x_1(t),x_2(t),\dots,x_k(t)\big)\\ f_2\big(t,x_1(t),x_2(t),\dots,x_k(t)\big)\\ \vdots\\ f_k\big(t,x_1(t),x_2(t),\dots,x_k(t)\big)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1\big(t,\boldsymbol{x}(t)\big)\\ f_2\big(t,\boldsymbol{x}(t)\big)\\ \vdots\\ f_k\big(t,\boldsymbol{x}(t)\big)\end{pmatrix}$$

a podobně

$$\boldsymbol{g}\big(t,\boldsymbol{x}(t)\big)=\begin{pmatrix} g_1\big(t,\boldsymbol{x}(t)\big)\\ g_2\big(t,\boldsymbol{x}(t)\big)\\ \vdots\\ g_k\big(t,\boldsymbol{x}(t)\big)\end{pmatrix}.$$

Diferenci a posun vektorové posloupnosti $\boldsymbol{x}$ v indexu t definujeme vztahy

$$\Delta\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t+1)-\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}\Delta x_1(t)\\ \Delta x_2(t)\\ \vdots\\ \Delta x_k(t)\end{pmatrix}\quad\text{a}\quad \boldsymbol{x}^\sigma(t)=\boldsymbol{x}(t+1)=\begin{pmatrix}x_1^\sigma(t)\\ x_2^\sigma(t)\\ \vdots\\ x_k^\sigma(t)\end{pmatrix}.$$

Při tomto označení můžeme systém explicitních diferenčních rovnic zapsat jako rovnici vektorovou

$$\Delta\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}\big(t,\boldsymbol{x}(t)$$

a systém rekurentních formulí jako formuli vektorovou

$$\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{g}\big(t,\boldsymbol{x}(t)\big)\quad\text{nebo}\quad \boldsymbol{x}^\sigma(t)=\boldsymbol{g}\big(t,\boldsymbol{x}(t)\big).$$

Počáteční podmínky pro systém (2.6) nebo (2.7) jsou tvaru

$$x_1(t_0)=\xi_1,\ x_2(t_0)=\xi_2,\ \dots,\ x_k(t_0)=\xi(k)\quad\text{nebo vektorově}\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\xi}\tag{2.8}$$

Rovnice (2.6), resp. (2.7) s počáteční podmínkou (2.8) se nazývá *počáteční úloha pro systém* (2.6), resp. (2.7).

Nechť posloupnost x je řešením počáteční úlohy (2.4), (2.5). Položme

$$x_i(t)=x(t+i-1),\quad i=1,2,\dots,k.$$

Pak $x_i(t+1)=x(t+1+i-1)=x(t+i)$, pro $i=1,2,\dots,k$, tedy

$$x_i(t+1)=x_{i+1}(t),\quad i=1,2,\dots,k-1,$$

a

$$x_k(t+1)=x(t+k)=g\big(t,x(t),x(t+1),\dots,x(t+k-1)\big)=g\big(t,x_1(t),x_2(t),\dots,x_k(t)\big).$$

Dále

$$x_i(t_0)=x(t_0+i-1)=\xi_{i-1},\quad i=1,2,\dots,k.\tag{2.9}$$

Posloupnost x je tedy první složkou řešení systému

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t) \\ x_2(t+1) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ x_{k-1}(t+1) &= x_k(t) \\ x_k(t+1) &= g\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big) \end{aligned} \tag{2.10}$$

s počáteční podmínkou (2.9). Naopak, je-li posloupnost x_1 první složkou řešení počáteční úlohy (2.10), (2.9), pak je také řešením úlohy (2.4), (2.5), neboť

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t), \\ x_1(t+2) &= x_2(t+1) = x_3(t), \\ x_1(t+3) &= x_2(t+2) = x_3(t+1) = x_4(t), \\ &\vdots \\ x_1(t+k-1) &= x_k(t), \\ x_1(t+k) &= x_k(t+1) = g\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_{k-1}(t)\big) = \\ &= g\big(t, x_1(t), x_1(t+1), \dots, x_1(t+k-1)\big). \end{aligned}$$

Odvodili jsme tak

Tvrzení 10. Rekurentní formule, resp. explicitní diferenční rovnice, k-tého řádu je ekvivalentní se systémem k rekurentních formulí, resp. k explicitních rovnic, prvního řádu.

Kapitola 3

Lineární rovnice

3.1 Rovnice prvního řádu

Lineární diferenční rovnice je rovnice tvaru

$$\Delta x = a(t)x + b(t). \tag{3.1}$$

Tato rovnice se nazývá *homogenní*, pokud $b \equiv 0$, a *nehomogenní* v opačném případě. Lineární homogenní rovnice

$$\Delta x = a(t)x \tag{3.2}$$

se nazývá *přidružená homogenní rovnice k lineární rovnici* (3.1).

Jako rekurentní formuli rovnici (3.1) zapíšeme ve tvaru

$$x(t+1) = \big(1 + a(t)\big)x(t) + b(t). \tag{3.3}$$

3.1.1 Homogenní rovnice a exponenciální posloupnost

Definice 16. Řekneme, že posloupnost $p \in \mathcal{P}$ je *regresivní,* pokud $p(t) \neq -1$ pro všechny indexy $t \in \operatorname{Dom} p$. Množinu regresivních posloupností označíme $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{R} = \{p \in \mathcal{P} : \ (\forall t \in \operatorname{Dom} p)\ 1 + p(t) \neq 0\}\,.$$

Podobně jako v případě obecných posloupností můžeme zdůraznit definiční obor posloupnosti dolním indexem, tj.

$$\mathcal{R}_{t_0} = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}_{t_0}, \ \text{pro } t_0 \in \mathbb{Z}, \qquad \mathcal{R}_{-\infty} = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}_{-\infty}.$$

Na množině regresivních posloupností definujeme binární operaci $\oplus$ a unární operaci $\ominus$ vztahy

$$p \oplus q\,(t) = p(t) + q(t) + p(t)q(t), \qquad \ominus p(t) = \frac{-p(t)}{1 + p(t)}.$$

Snadno ověříme, že množina regresivních posloupností s operací $\oplus$ tvoří komutativní grupu, nulová posloupnost $o \equiv 0$ je neutrálním prvkem této grupy a $\ominus p$ je opačným prvkem k prvku p.

Tvrzení 11. Nechť $p \in \mathcal{R}$ je regresivní posloupnost. Pak pro každou hodnotu $x_0 \in \mathbb{R}$ existuje jediná posloupnost $x \in \mathcal{P}$ taková, že $\operatorname{Dom} x = \operatorname{Dom} p$, $x(t_0) = x_0$ a $\Delta x(t) = p(t)x(t)$.

Důkaz: Poněvadž $x(t+1) = \big(1+p(t)\big)x(t)$, je posloupnost x definována pro každé $t \geq t_0$. Dále pro každý index t takový, že $t-1 \in \operatorname{Dom} p$ platí $x(t) = \big(1+p(t-1)\big)x(t-1)$ a tedy

$$x(t-1) = \frac{x(t)}{1+p(t-1)},$$

což znamená, že posloupnost x je definována také pro $t \leq t_0$ takové, že $t \in \operatorname{Dom} p$. $\square$

Definice 17. Nechť $p \in \mathcal{R}$ je regresivní posloupnost. *Exponenciální posloupnost příslušnou k posloupnosti p s počátkem $t_0 \in \operatorname{Dom} p$* definujeme jako jediné řešení diferenční rovnice

$$\Delta x = p(t)x \tag{3.4}$$

s počáteční podmínkou $x(t_0) = 1$. Její t-tý člen značíme $e_p(t, t_0)$.

Věta 13 (Vlastnosti exponenciální posloupnosti)**.** *Nechť $p, q \in \mathcal{R}$ takové, že $\operatorname{Dom} p = \operatorname{Dom} q$, $t_0, t, s \in \operatorname{Dom} p$. Pak platí*

1. $e_p(t, t_0) = \prod\limits_{i=t_0}^{t-1} \big(1+p(i)\big)$,
2. $e_0(t, t_0) \equiv 1$, $e_1(t, t_0) = 2^{t-t_0}$,
3. $e_p(t, t_0)e_q(t, t_0) = e_{p\oplus q}(t, t_0)$,
4. $\big(e_p(t, t_0)\big)^{-1} = e_{\ominus p}(t, t_0)$,
5. $e_p(t, s)e_p(s, t_0) = e_p(t, t_0)$,
6. *Je-li $p(t) > -1$ pro všechny indexy $t \in \operatorname{Dom} p$, pak* $e_p(\,\cdot\,, t_0) = \mathrm{e}^{\sum_{t_0} \ln(1+p)}$.

Důkaz: Podle Tvrzení 8 platí $\prod\limits_{i=t_0}^{t_0-1} \big(1+p(i)\big) = 1$ a

$$\Delta \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1+p(i)\big) = \prod_{i=t_0}^{t} \big(1+p(i)\big) - \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1+p(i)\big) = \big(1+p(t)-1\big) \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1+p(i)\big) = \\ = p(t) \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1+p(i)\big).$$

Odtud plyne platnost první části věty. Nyní

$$e_0(t, t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1} (1+0) = 1, \quad e_1(t, t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1} (1+1) = 2^{(t-1)-(t_0-1)} = 2^{t-t_0},$$

což je druhé tvrzení věty. Třetí a čtvrté plyne z následujících výpočtů

$$e_p(t, t_0)e_q(t, t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1+p(i)\big) \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1+q(i)\big) = \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1+p(i)+q(i)+p(i)q(i)\big) = \\ = e_{p+q+pq}(t, t_0) = e_{p\oplus q}(t, t_0),$$

$$e_p(t,t_0)e_{\ominus p}(t,t_0) = \prod_{i=t_0}^{t-1}(1+p(i))\prod_{i=t_0}^{t-1}\left(1-\frac{p(i)}{1+p(i)}\right) =$$
$$= \prod_{i=t_0}^{t-1}\left(1+p(i)-\frac{p(i)}{1+p(i)}-\frac{p(i)^2}{1+p(i)}\right) = \prod_{i=t_0}^{t-1}1 = 1.$$

Podle Tvrzení 8 platí

$$e_p(t,s)e_p(s,t_0) = \prod_{i=s}^{t-1}(1+p(i))\prod_{i=t_0}^{s-1}(1+p(i)) = \prod_{i=t_0}^{t-1}(1+p(i))$$

a to je páté tvrzení věty. Rovnost v posledním tvrzení je ekvivalentní s rovnostmi

$$\ln e_p(t,t_0) = \sum_{t_0}^{t-1}\ln\big(1+p(i)\big) = \ln\prod_{t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big).$$ □

Nechť $p \in \mathcal{R}$ je regresivní posloupnost. Řešení počáteční úlohy pro homogenní lineární rovnici

$$\Delta x = p(t)x, \qquad x(t_0) = x_0$$

je dáno rovností

$$x(t) = x_0 e_p(t,t_0) = x_0\prod_{i=t_0}^{t-1}\big(1+p(i)\big), \tag{3.5}$$

neboť

$$x(t_0) = x_0 e_p(t_0,t_0) = x_0 1 = x_0$$

a podle Vět 3 a 13 platí

$$\Delta x(t) = x_0\Delta e_p(t,t_0) = x_0 p(t)e_p(t,t_0) = p(t)\big(x_0 e_p(t,t_0)\big).$$

3.1.2 Nehomogenní rovnice a metoda variace konstanty

Nechť $p \in \mathcal{R}$ je regresivní posloupnost a $b \in \mathrm{P}$ posloupnost se stejným definičním oborem. Uvažujme počáteční úlohu pro lineární nehomogení rovnici ve tvaru

$$\Delta x = p(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{3.6}$$

Řešení této úlohy budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = c(t)e_p(t,t_0). \tag{3.7}$$

Jedná se o analogii řešení daného formulí (3.5) s tím rozdílem, že místo konstanty x_0 uvažujeme nestacionární posloupnost c.

Aby byla splněna počáteční podmínka v úloze (3.6), musí platit

$$x_0 = x(t_0) = c(t_0)e_p(t_0,t_0) = c(t_0),$$

tedy

$$c(t_0) = x_0. \tag{3.8}$$

Současně musí být splněna rovnice, tedy podle Věty 11 má být

$$p(t)x(t) + b(t) = \Delta x(t) = \Delta\big(ce_p(\,\cdot\,, t_0)\big) = c(t)\Delta e_p(t, t_0) + e_p^\sigma(t, t_0)\Delta c(t) = \\ = c(t)p(t)e_p(t, t_0) + e_p(t + 1, t_0)\Delta c(t) = p(t)x(t) + e_p(t + 1, t_0)\Delta c(t).$$

Z této rovnosti vyjádříme $b(t) = e_p(t + 1, t_0)\Delta c(t)$. Pro posloupnost c tedy podle Věty 13.4 platí

$$\Delta c(t) = b(t)e_{\ominus p}(t + 1, t_0).$$

Rovnají-li se dvě posloupnosti, musí se rovnat i jejich sumy od t_0, takže podle (1.6) dostaneme

$$c(t) - c(t_0) = \sum\nolimits_{t_0} b(t)e_{\ominus p}(t + 1, t_0).$$

Z této rovnosti spolu s podmínkou (3.8) vyjádříme

$$c(t) = x_0 + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)e_{\ominus p}(i + 1, t_0).$$

Dosazením této posloupnosti do rovnosti (3.7) dostaneme s využitím Věty 13 řešení úlohy (3.6),

$$x(t) = \left(x_0 + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)e_{\ominus p}(i + 1, t_0)\right) e_p(t, t_0) = \\ = x_0e_p(t, t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)e_{\ominus p}(i + 1, t_0)e_p(i + 1, t_0)e_p(t, i + 1) = \\ = x_0e_p(t, t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)e_p(t, i + 1) = x_0e_p(t, t_0) + \sum\nolimits_{t_0} be_p(\,\cdot\,, i + 1)(t).$$

Exponenciální posloupnost můžeme přepsat jako součin podle Věty 13.1. Řešení počáteční úlohy pro nehomogenní lineární rovnici s regresivní posloupností v lineárním členu, tj. řešení úlohy (3.6) tedy můžeme psát v jednom z tvarů

$$x(t) = x_0e_p(t, t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)e_p(t, i + 1) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} (1 + p(i)) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} (1 + p(j)).$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že řešení počáteční úlohy pro obecnou lineární diferenční rovnici (3.1) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ je stejného tvaru. Jediný rozdíl je v tom, že definiční obor řešení může být menší než definiční obor posloupnosti a.

Věta 14. *Nechť* $\operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b$, $t_0 \in \operatorname{Dom} a$ *a* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Položme*

$$\tau = \sup\{t \in \operatorname{Dom} a : t \le t_0, a(t) = -1\}.$$

Řešení počáteční úlohy pro lineární diferenční rovnici,

$$\Delta x = a(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{3.9}$$

je posloupnost $x \in \mathcal{P}_\mathcal{T}$ definovaná vztahem

$$x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} (1 + a(i)) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} (1 + a(j)).$$

Podívejme se ještě na druhý sčítanec ve výrazu pro řešení úlohy (3.9), tedy na posloupnost danou předpisem

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} (1 + a(j)).$$

Platí $\tilde{x}(t_0) = 0$ a

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{x}(t) = \Delta \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} (1 + a(j)) &= \sum_{i=t_0}^{t} b(i) \prod_{j=i+1}^{t} (1 + a(j)) - \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} (1 + a(j)) = \\ &= b(t) + (1 + a(t)) \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} (1 + a(j)) - \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} (1 + a(j)) = \\ &= b(t) + a(t) \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} (1 + a(j)) = b(t) + a(t)\tilde{x}(t).\end{aligned}$$

To znamená, že posloupnost $\tilde{x}$ je řešením nehomogenní rovnice (3.1) s nulovou počáteční podmínkou. První sčítanec v řešení úlohy (3.9) je řešením přidružené homogenní rovnice (3.2). Dostáváme tak závěr:

Důsledek 1. *Řešení počáteční úlohy pro lineární diferenční rovnici (3.9) je součtem řešení počátečního problému pro přidruženou homogenní rovnici (3.2) a řešení nehomogenní rovnice s nulovou počáteční podmínkou.*

Některá z posloupností vystupujících v rovnici (3.1) může být stacionární. Dostáváme tak speciální případy:

- $\Delta x = \alpha x + b(t)$, $x(t_0) = x_0$.
  Řešení: $x(t) = x_0(1+\alpha)^{t-t_0} + \sum_{i=t_0}^{t-1} (1+\alpha)^{t-i-1} b(i)$.
- $\Delta x = a(t)x + \beta$, $x(t_0) = x_0$.
  Řešení: $x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} (1 + a(i)) + \beta \sum_{i=t_0}^{t-1} \prod_{j=i+1}^{t-1} (1 + a(j))$.
- $\Delta x = \alpha x + \beta$, $x(t_0) = x_0$.
  Řešení: $x(t) = x_0(1+\alpha)^{t-t_0} + \beta \dfrac{(1+\alpha)^{t-t_0} - 1}{\alpha} = \left(x_0 + \dfrac{\beta}{\alpha} \right) (1+\alpha)^{t-t_0} - \dfrac{\beta}{\alpha}$.

3.2 Lineární rovnice k-tého řádu

Jedná se o rovnici

$$\Delta^k x + a_{k-1}(t)\Delta^{k-1} x + a_{k-2}(t)\Delta^{k-2}(t)x + \cdots + a_1(t)\Delta x + a_0(t) = b(t). \tag{3.10}$$

O posloupnostech $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, b předpokládáme, že mají stejný definiční obor, označíme ho D, a pro každé t z tohoto definičního oboru platí

$$a_{k-1}(t) - \alpha_{k-2} + a_{k-3}(t) - \cdots + (-1)^{k-1} a_0(t) \neq 1. \tag{3.11}$$

V případě $b \equiv 0$ se rovnice (3.10) nazývá *homogenní,* v opačném případě *nehomogenní.*

Je-li $t_0 \in D$, jsou počáteční podmínky pro rovnici (3.10) tvaru

$$x(t_0) = \xi_0,\ x(t_0+1) = \xi_1,\ \dots,\ x(t_0+k-1) = \xi_{k-1}. \tag{3.12}$$

Rovnici (3.10) přepíšeme na rovnici druhého typu. Podle Tvrzení 8 platí

$$\Delta^k x(t) = x(t+k) + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} x(t+k-j) = x(t+k) + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x(t+j),$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} a_j(t)\Delta^j x(t) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t) \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} x(t+j-i) = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i}^{k-1} a_j(t)(-1)^i \binom{j}{i} x(t+j-i) =$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1-i} a_{j+i}(t)(-1)^i \binom{j+i}{i} x(t+j) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1-i} a_{i+j}(t)(-1)^i \binom{j+i}{i} x(t+j),$$

takže levá strana rovnice (3.10) je tvaru

$$x(t+k) + \sum_{j=0}^{k-1} \left[(-1)^{k-j}\binom{k}{j} + \sum_{i=0}^{k-1-j} a_{i+j}(t)(-1)^i \binom{j+i}{i} \right] x(t+j).$$

Označíme

$$c_j(t) = (-1)^{k-j}\binom{k}{j} + \sum_{i=0}^{k-1-j} a_{i+j}(t)(-1)^i \binom{j+i}{i} \qquad \text{pro } j = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

a dostaneme rovnici druhého typu ekvivalentní s rovnicí (3.10) ve tvaru

$$x(t+k) + c_{k-1}(t)x(t+k-1) + c_{k-2}(t)x(t+k-2) + \cdots + c_1(t)x(t+1) + c_0(t)x(t) = b(t); \tag{3.13}$$

podmínka (3.11) zaručí, že $c_0(t) \neq 0$ pro všechna $t \in D$, takže se skutečně jedná o rovnici k-tého řádu. Z tvaru rovnice (3.13) vidíme, že počáteční úloha (3.13), (3.12), nebo ekvivalentně úloha (3.10), (3.12), má jediné řešení, které je definováno na množině D.

3.2.1 Fundamentální systém řešení homogenní rovnice

Lineární homogenní diferenční rovnice k-tého řádu

$$x(t+k) + c_{k-1}(t)x(t+k-1) + c_{k-2}(t)x(t+k-2) + \cdots + c_1(t)x(t+1) + c_0(t)x(t) = 0 \tag{3.14}$$

splňuje *princip superpozice:* jsou-li posloupnosti x_1 a x_2 řešení rovnice (3.26) a p a q jsou libovolné reálné konstanty, pak také posloupnost $x = px_1 + qx_2$ je řešením rovnice (3.26), tj. libovolná lineární kombinace řešení této rovnice je jejím řešením. Navíc nulová posloupnost

$x \equiv 0$ je řešením rovnice (3.26). To znamená, že množina všech řešení lineární homogenní diferenční rovnice tvoří vektorový prostor.

Pro $i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ označme y_i posloupnost, která je řešením homogenní rovnice (3.14) s počátečními podmínkami

$$x(t_0 + j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \qquad j = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

Pak je zřejmé, že posloupnosti $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ jsou lineárně nezávislé. To znamená, že dimenze vektorového prostoru řešení je alespoň k.

Nechť y je libovolné řešení homogenní rovnice (3.14). Označme

$$\eta_0 = y(t_0), \;\; \eta_1 = y(t_0 + 1), \;\; \dots, \;\; \eta_{k-1} = y(t_0 + k - 1).$$

Lineární kombinace posloupností $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ s koeficienty $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}$, tj. posloupnost

$$\eta_0 y_0 + \eta_1 y_1 + \cdots + \eta_{k-1} y_{k-1} \tag{3.15}$$

je podle principu superpozice řešením rovnice (3.14) a splňuje stejné počáteční podmínky, jako posloupnost y. Z jednoznačnosti řešení počáteční úlohy plyne, že posloupnost y a lineární kombinace (3.15) jsou shodné. Odtud dále plyne, že prostor řešení lineární homogenní rovnice (3.14) má dimenzi k a posloupnosti y_i, $i = 0, 1, 2, \dots, k$ tvoří bázi tohoto prostoru.

Z provedených úvah plyne, že platí

Věta 15. *Množina všech řešení lineární homogenní difereneční rovnice k-tého řádu* (3.14) *tvoří vektorový prostor dimenze k.*

Definice 18. Báze vektorového prostoru všech řešení lineární homogenní rovnice (3.14) se nazývá *fundamentální systém řešení.*

Z Věty 15 a Tvrzení 2 bezprostředně plyne:

Věta 16. *Posloupnosti $z_1, z_2, \dots, z_k$ tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenční rovnice* (3.14) *právě tehdy, když každá z nich je řešením rovnice* (3.14) *a platí nerovnost*

$$\begin{vmatrix} z_1(t_0) & z_2(t_0) & \dots & z_k(t_0) \\ z_1(t_0+1) & z_2(t_0+1) & \dots & z_k(t_0+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1(t_0+k-1) & z_2(t_0+k-1) & \dots & z_k(t_0+k-1) \end{vmatrix} \neq 0$$

pro libovolný index t_0 z průniku definičních oborů posloupností $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$.

Nechť posloupnost x je řešením počáteční úlohy (3.14), (3.12) a posloupnosti $z_1, z_2, \dots, z_k$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice (3.14). Pak pro všechna $t \in D$ platí, že

$$x(t) = A_1 z_1(t) + A_2 z_2(t) + \cdots + A_k z_k(t) \tag{3.16}$$

pro jisté konstanty $A_1, A_2, \dots, A_k$. Tyto konstanty by měly být jednoznačně určeny počátečními podmínkami, proto musí splňovat (algebraické) rovnice

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 z_1(t_0) & + & A_2 z_2(t_0) & + \cdots + & A_k z_k(t_0) & = & \xi_0 \\ A_1 z_1(t_0+1) & + & A_2 z_2(t_0+1) & + \cdots + & A_k z_k(t_0+1) & = & \xi_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_1 z_1(t_0+k-1) & + & A_2 z_2(t_0+k-1) & + \cdots + & A_k z_k(t_0+k-1) & = & \xi_{k-1}. \end{array}$$

Determinant matice této soustavy lineárních rovnic pro neznámé $A_1, A_2, \ldots, A_k$ je však Casoratiánem báze vektorového prostoru, který je podle Věty 16 nenulový. Uvedený systém lineárních rovnic je skutečně jednoznačně řešitelný.

3.2.2 Nehomogenní rovnice a metoda variace konstant

Pokud jsou posloupnosti $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ v rovnicích (3.13) a (3.14) stejné, řekneme, že homogenní lineární diferenční rovnice (3.14) je *přidružená k nehomogenní rovnici* (3.13).

Je-li posloupnost y řešením nehomogenní rovnice (3.13) a posloupnost z je řešením přidružené homogenní rovnice (3.14), pak jejich součet $x = z + y$ je opět řešením nehomogenní rovnice (3.13), neboť

$$x(t+k) + \sum_{i=1}^{k} c_i(t)x(t+i) = z(t+k) + y(t+k) + \sum_{i=1}^{k} c_i(t)\big(z(t+i) + y(t+i)\big) =$$
$$= \left(z(t+k) + \sum_{i=1}^{k} c_i(t)z(t+i)\right) + \left(y(t+k) + \sum_{i=1}^{k} c_i(t)y(t+i)\right) = 0 + b(t) = b(t).$$

Platí tedy

Věta 17. *Nechť $z_1, z_2, \ldots, z_k$ tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenční rovnice* (3.14) *přidružené k nehomogenní rovnici* (3.13). *Pak každé řešení nehomogenní rovnice* (3.13) *je tvaru*

$$x(t) = B_1 z_1(t) + B_2 z_2(t) + \cdots + B_k z_k(t) + y(t),$$

kde y je nějaké řešení nehomogenní rovnice a $B_1, B_2, \ldots, B_k$ jsou konstanty.

Nechť posloupnosti $z_1, z_2, \ldots, z_k$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice (3.14) přidružené k nehomogenní rovnici (3.14). Pak je

$$z_i(t+k) = -\sum_{j=0}^{k-1} c_j(t) z_i(t+j) \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.17}$$

Řešení nehomogenní rovnice (3.14) budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t) z_i(t), \tag{3.18}$$

kde $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jsou zatím neurčené posloupnosti. Hledáme ho tedy jako analogii řešení homogenní rovnice (3.16); místo konstant $A_1, A_2, \ldots, A_k$ však píšeme posloupnosti — varírujeme konstanty. Z tohoto důvodu se tato metoda řešení nehomogenní rovnice nazývá *metoda variace konstant.*

Nyní můžeme vyjádřit

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t+1) z_i(t+1) = \sum_{i=1}^{k} \left[\big(\Delta u_i(t)\big) z_i(t+1) + u_i(t) z_i(t+1)\right].$$

Budeme požadovat, aby posloupnosti $u_1, u_2, \ldots, u_k$ splňovaly rovnici

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big) z_i(t+1) = 0.$$

Pak $x(t+1) = \sum\limits_{i=1}^{k} u_i(t) z_i(t+1)$, takže

$$x(t+2) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t+1) z_i(t+2) = \sum_{i=1}^{k} \big[\big(\Delta u_i(t)\big) z_i(t+2) + u_i(t) z_i(t+2)\big]\,.$$

Dále budeme požadovat, aby posloupnosti $u_1, u_2, \ldots, u_k$ splňovaly rovnice

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big) z_i(t+2) = 0,$$

takže $x(t+2) = \sum\limits_{i=1}^{k} u_i(t) z_i(t+2)$. Takto budeme pokračovat až k požadavku

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big) z_i(t+k-1) = 0$$

a vyjádření $x(t+k-1) = \sum\limits_{i=1}^{k} u_i(t) z_i(t+k-1)$.

Celkem tedy požadujeme

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big) z_i(t+j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1 \tag{3.19}$$

a dostáváme

$$x(t+j) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t) z_i(t+j), \quad j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{3.20}$$

V poslední z rovností (3.20), tj. v té, v níž $j = k-1$, budeme psát $t+1$ místo t a upravíme ji s použitím (3.17). Dostaneme

$$\begin{aligned} x(t+k) &= \sum_{i=1}^{k} u_i(t+1) z_i(t+k) = \sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big) z_i(t+k) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t) z_i(t+k) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big) z_i(t+k) - \sum_{i=1}^{k} u_i(t) \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t) z_i(t+j). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Současně posloupnost x má být řešením rovnice (3.13), takže s využitím vztahů (3.20) dostaneme

$$\begin{aligned} x(t+k) &= b(t) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t) x(t+j) = b(t) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t) \sum_{i=1}^{k} u_i(t) z_i(t+j) = \\ &= b(t) - \sum_{i=1}^{k} u_i(t) \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t) z_i(t+j). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Porovnáním (3.21) a (3.22) vidíme, že

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big) z_i(t+k) = b(t). \tag{3.23}$$

Diference posloupností $u_1, u_2, \dots, u_k$ tedy splňují systém rovnic (3.19), (3.23). Přepíšeme ho do tvaru

$$\begin{array}{rcrcccrcl}
z_1(t+1)\,\Delta u_1(t) & + & z_2(t+1)\,\Delta u_2(t) & + & \cdots & + & z_k(t+1)\,\Delta u_k(t) & = & 0\\
z_1(t+2)\,\Delta u_1(t) & + & z_2(t+2)\,\Delta u_2(t) & + & \cdots & + & z_k(t+2)\,\Delta u_k(t) & = & 0\\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\
z_1(t+k-1)\,\Delta u_1(t) & + & z_2(t+k-1)\,\Delta u_2(t) & + & \cdots & + & z_k(t+k-1)\,\Delta u_k(t) & = & 0\\
z_1(t+k)\,\Delta u_1(t) & + & z_2(t+k)\,\Delta u_2(t) & + & \cdots & + & z_k(t+k)\,\Delta u_k(t) & = & b(t).
\end{array}$$

Determinant této soustavy je Casoratiánem fundamentálního systému řešení homogenní rovnice (3.14) v indexu $t+1$. Je tedy nenulový a soustava je jednoznačně řešitelná. Označíme

$$w(t) = \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \dots & z_k(t)\\ z_1(t+1) & z_2(t+1) & \dots & z_k(t+1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ z_1(t+k-1) & z_2(t+k-1) & \dots & z_k(t+k-1)\end{vmatrix},$$

$$m_i(t) = \\ = \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \dots & z_{i-1}(t) & z_{i+1}(t) & \dots & z_k(t)\\ z_1(t+1) & z_2(t+1) & \dots & z_{i-1}(t+1) & z_{i+1}(t+1) & \dots & z_k(t+1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ z_1(t+k-2) & z_2(t+k-2) & \dots & z_{i-1}(t+k-2) & z_{i+1}(t+k-2) & \dots & z_k(t+k-2)\end{vmatrix};$$

$w(t)$ je Casoratián fundamentálního řešení homogenní rovnice (3.14). Diference posloupností $u_1, u_2, \dots u_k$ nyní můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\Delta u_i(t) = \frac{(-1)^{k+i} b(t) m_i(t+1)}{w(t+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Odtud a z rovnosti (1.5) dostaneme

$$u_i(t) = u_i(t_0) + (-1)^{k+i} \sum_{j=t_0}^{t-1} \frac{b(j) m_i(j+1)}{w(j+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Při označení $B_i = u_i(t_0)$ můžeme řešení rovnice (3.13) podle vztahu (3.18) psát ve tvaru

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} B_i z_i(t) + (-1)^k \sum_{j=t_0}^{t-1} \frac{b(j)}{w(j+1)} \sum_{i=1}^{k} (-1)^i m_i(j+1) z_i(t).$$

3.2.3 Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Jedná se o rovnici

$$\Delta^k x + \alpha_{k-1}\Delta^{k-1}x + \alpha_{k-2}\Delta^{k-2}x + \cdots + \alpha_1\Delta x + \alpha_0 = 0, \tag{3.24}$$

kde reálné koeficienty $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ splňují rovnost

$$\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2} + \alpha_{k-3} - \cdots + (-1)^{k-1}\alpha_0 \neq 1 \tag{3.25}$$

analogickou k rovnosti (3.11). Rovnice (3.24) má pro libovolné počáteční podmínky tvaru (3.12) jediné řešení, které je definováno pro každé $t \in \mathbb{Z}$.

Stejně jako v případě obecné lineární rovnice k-tého řádu můžeme rovnici (3.24) přepsat na rovnici druhého typu

$$x(t+k) + \gamma_{k-1}x(t+k-1) + \gamma_{k-2}x(t+k-2) + \cdots + \gamma_1 x(t+1) + \gamma_0 x(t) = 0, \tag{3.26}$$

kde jsme označili

$$\gamma_j = (-1)^{k-j}\binom{k}{j} + \sum_{i=0}^{k-1-j} \alpha_{i+j}(-1)^i \binom{j+i}{i} \quad \text{pro } j = 0, 1, 2, \ldots, k-1.$$

S pomocí operátoru posunu $^\sigma$ můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$x^{\sigma^k}(t) + \gamma_{k-1}x^{\sigma^{k-1}}x(t) + \gamma_{k-2}x^{\sigma^{k-2}}x(t) + \cdots + \gamma_1 x^\sigma(t) + \gamma_0 x(t) = 0.$$

Položíme-li $\gamma_k = 1$, můžeme operátorovou rovnici zapsat ještě stručněji

$$\left(\sum_{i=0}^{k} \gamma_i \cdot^{\sigma^i}\right) x \equiv 0. \tag{3.27}$$

Abychom našli řešení rovnice (3.26), provedeme následující heuristickou úvahu. Lineární homogenní diferenční rovnice prvního řádu druhého typu s konstantními koeficienty je tvaru

$$x(t+1) + \gamma x(t) = 0$$

a podle výsledků odstavce 3.1.2 má řešení

$$x(t) = x_0(-\gamma)^{t-t_0} = \left(x_0(-\gamma)^{-t_0}\right)(-\gamma)^t = const \cdot (-\gamma)^t.$$

Jako analogii tohoto výsledku budeme hledat řešení rovnice (3.26) ve tvaru $x(t) = \lambda^t$, kde λ je zatím neurčená nenulová konstanta. Dosadíme tuto posloupnost do rovnice (3.26)

$$\lambda^{t+k} + \gamma_{k-1}\lambda^{t+k-1} + \gamma_{k-2}\lambda^{t+k-2} + \cdots + \gamma_1\lambda^{t+1} + \gamma_0\lambda^t = 0$$

a po vynásobení výrazem λ^{-t} dostaneme *charakteristickou rovnici*

$$\lambda^k + \gamma_{k-1}\lambda^{k-1} + \gamma_{k-2}\lambda^{k-2} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0 = 0. \tag{3.28}$$

Řešení této algebraické rovnice se nazývají *charakteristické kořeny.* Povšimněme si, že žádný kořen rovnice (3.28) není nulový, neboť $\gamma_0 \neq 0$.

Příklad: Rovnice druhého řádu.

Uvažujme lineární homogenní diferenční rovnici

$$x(t+2) + bx(t+1) + cx(t) = 0 \tag{3.29}$$

s počátečními podmínkami

$$x(t_0) = \xi_0, \quad x(t_0+1) = \xi_1. \tag{3.30}$$

Aby rovnice (3.29) byla skutečně druhého řádu musí být $c \neq 0$. O počátečních hodnotách ξ_0 a ξ_1 budeme předpokládat, že aspoň jedna z nich je nenulová. V opačném případě by totiž počáteční úloha (3.29), (3.30) měla jedině triviální řešení $x \equiv 0$ při libovolných hodnotách svých parametrů b, c.

Charakteristickou rovnicí je kvadratická rovnice pro neznámou λ

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{3.31}$$

Mohou nastat tři případy.

• **(i)** $b^2 > 4c$. Charakteristická rovnice (3.31) má dva reálné různé kořeny λ_1, λ_2. Označení zvolíme tak, aby $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$, charakteristický kořen λ_1 nazveme *dominatní.* Diferenční rovnice (3.29) má řešení

$$x(t) = A\lambda_1^t + B\lambda_2^t, \tag{3.32}$$

neboť

$$\begin{aligned} x(t+2) + bx(t+1) + cx(t) &= \\ &= A\lambda_1^{t+2} + B\lambda_2^{t+2} + b\left(A\lambda_1^{t+1} + B\lambda_2^{t+1}\right) + c\left(A\lambda_1^t + B\lambda_2^t\right) = \\ &= A\lambda_1^t\left(\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c\right) + B\lambda_2^t\left(\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c\right) = 0 \end{aligned}$$

Konstanty A a B volíme tak, aby byly splněny počáteční podmínky (3.30), tedy jako řešení soustavy lineárních (algebraických) rovnic

$$\begin{aligned} A\lambda_1^{t_0} + B\lambda_2^{t_0} &= \xi_0 \\ A\lambda_1^{t_0+1} + B\lambda_2^{t_0+1} &= \xi_1. \end{aligned}$$

Determinant této soustavy je

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^{t_0} & \lambda_2^{t_0} \\ \lambda_1^{t_0+1} & \lambda_2^{t_0+1} \end{vmatrix} = (\lambda_1\lambda_2)^{t_0}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0,$$

což znamená, že soustava je jednoznačně řešitelná a že posloupnosti definované vztahy

$$x_1(t) = \lambda_1^t, \quad x_2(t) = \lambda_2^t$$

tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenční rovnice (3.29).

Posloupnost definovaná vztahem (3.32), kde konstanty A, B jsou dány vztahy

$$A = \frac{\xi_1 - \xi_0\lambda_2}{\lambda_1^{t_0}(\lambda_1 - \lambda_2)}, \qquad B = \frac{\xi_1 - \xi_0\lambda_1}{\lambda_2^{t_0}(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

je řešením počáteční úlohy (3.29), (3.30). Explicitněji můžeme řešení úlohy (3.29), (3.30) vyjádřit formulí
$$x(t) = \frac{\xi_1 - \xi_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_1^{t-t_0} - \frac{\xi_1 - \xi_0\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_2^{t-t_0}.$$

Pokud jsou počáteční podmínky takové, že $\xi_1 - \xi_0\lambda_2 \neq 0$, můžeme řešení úlohy (3.29), (3.30) přepsat do tvaru

$$x(t) = \frac{\xi_1 - \xi_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_1^{t-t_0}\left(1 - \frac{\xi_1 - \xi_0\lambda_1}{\xi_1 - \xi_0\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{t-t_0}\right).$$

Nechť nejprve $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Pak
$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{t-t_0} = 0.$$

Odtud je vidět, že v případě $\xi_1 - \xi_0\lambda_2 \neq 0$ „se pro velká t řešení úlohy (3.29), (3.30) chová jako geometrická posloupnost s kvocientem λ_1“. Chování řešení je tedy pro velká t určeno dominantním charakteristickým kořenem λ_1. Proto vyšetříme jeho znaménko a velikost v závislosti na parametrech b a c.

$b > 0$: $\lambda_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} < 0$ a $|\lambda_1| < 1$ právě tehdy, když $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} > -1$, tj. $2 - b > \sqrt{b^2 - 4c}$. Je-li $b \geq 2$, pak nelze tuto nerovnost splnit; je-li $b < 2$ pak je tato nerovnost ekvivalentní s nerovností $4 - 4b + b^2 > b^2 - 4c$, tj. $c > b - 1$.

$b < 0$: $\lambda_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} > 0$. Analogicky jako v předchozím případě zjistíme, že $\lambda_1 < 1$ právě tehdy, když $b > -2$ a $c > -b - 1$.

$b = 0$: $\lambda_1 = \sqrt{-c} = -\lambda_2$, takže neplatí $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.

Celkem dostáváme, že $|\lambda_1| < 1$ právě tehdy, když $|b| < 2$ a $c > |b| - 1$. Ještě poznamenejme, že charakteristické kořeny mají stejné znaménko, pokud $c > 0$, a mají různá znaménka, pokud $c < 0$.

Pokud $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, pak $\lambda_2 = -\lambda_1$, neboť charakteristické kořeny jsou různé. Tato situace nastává právě tehdy, když $b = 0$, $c < 0$; pro charakteristický kořen platí $\lambda_1 = \sqrt{-c}$. Řešení úlohy (3.29), (3.30) je v tomto případě tvaru

$$x(t) = \frac{\xi_1 + \xi_0\sqrt{-c}}{2\sqrt{-c}}\left(\sqrt{-c}\right)^{t-t_0} - \frac{\xi_1 - \xi_0\sqrt{-c}}{2\sqrt{-c}}\left(-\sqrt{-c}\right)^{t-t_0} =$$
$$= \left(\sqrt{-c}\right)^{t-t_0}\left(\frac{1 + (-1)^{t-t_0}}{2}\xi_0 + \frac{1 - (-1)^{t-t_0}}{2\sqrt{-c}}\xi_1\right)$$

a řešení úlohy (3.29), (3.30) je součinem geometrické posloupnosti s kvocientem $\sqrt{-c}$ a posloupnosti ohraničené, v níž se pravidelně střídají hodnoty ξ_0 a $\dfrac{1}{\sqrt{-c}}\xi_1$.

• **(ii)** $b^2 = 4c$. Vzhledem k podmínce (3.11) v tomto případě musí být $b \neq 0$. Charakteristická rovnice (3.31) má dvojnásobný kořen $\lambda = -\frac{1}{2}b$ a diferenční rovnice (3.29) má řešení

$$x(t) = \left(-\frac{b}{2}\right)^t (A + Bt), \tag{3.33}$$

neboť

$$
\begin{aligned}
&x(t+2)+bx(t+1)+cx(t)=\\
&\quad=\left(-\frac{b}{2}\right)^{t+2}(A+B(t+2))+b\left(-\frac{b}{2}\right)^{t+1}(A+B(t+1))+\frac{b^2}{4}\left(-\frac{b}{2}\right)^{t}(A+Bt)=\\
&\qquad\qquad=\left(-\frac{b}{2}\right)^{t}\left(\frac{b^2}{4}(A+2B+Bt)-\frac{b^2}{2}(A+B+Bt)+\frac{b^2}{4}(A+Bt)\right)=0.
\end{aligned}
$$

Konstanty A a B volíme tak, aby byly splněny počáteční podmínky (3.30), tedy jako řešení soustavy lineárních (algebraických) rovnic

$$
\begin{aligned}
A\lambda^{t_0}\quad &+Bt_0\lambda^{t_0} &&=\xi_0\\
A\lambda^{t_0+1}&+B(t_0+1)\lambda^{t_0+1} &&=\xi_1.
\end{aligned}
$$

Determinant této soustavy je

$$
\begin{vmatrix}\lambda^{t_0} & t_0\lambda^{t_0}\\ \lambda^{t_0+1} & (t_0+1)\lambda^{t_0+1}\end{vmatrix}=\lambda^{2t_0}\begin{vmatrix}1 & t_0\\ \lambda & (t_0+1)\lambda\end{vmatrix}=\lambda^{2t_0+1}=\left(-\frac{b}{2}\right)^{2t_0+1}\neq 0,
$$

což znamená, že soustava je jednoznačně řešitelná a že posloupnosti definované vztahy

$$
x_1(t)=\lambda^t,\quad x_2(t)=t\lambda^t
$$

tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenční rovnice (3.29).

Posloupnost definovaná vztahem (3.33), kde konstanty A, B jsou dány vztahy

$$
A=\left(-\frac{b}{2}\right)^{-t_0}\left((t_0+1)\xi_0+\frac{2t_0}{b}\xi_1\right),\qquad B=-\left(-\frac{b}{2}\right)^{-t_0}\left(\xi_0+\frac{2}{b}\xi_1\right)
$$

je řešením počáteční úlohy (3.29), (3.30). Explicitněji můžeme řešení úlohy (3.29), (3.30) v tomto případě vyjádřit formulí

$$
x(t)=\left(-\frac{b}{2}\right)^{t-t_0}\left((t_0-t+1)\xi_0+\frac{2(t_0-t)}{b}\xi_1\right).
$$

Řešení diferenční rovnice je v tomto případě součinem geometrické posloupnosti s kvocientem $-\dfrac{b}{2}$ a aritmetické posloupnosti s diferencí $-\left(\xi_0+\dfrac{2}{b}\xi_1\right)$.

• **(iii)** $b^2<4c$. V tomto případě je $c>0$. Charakteristická rovnice (3.31) má v tomto případě komplexně sdružené kořeny

$$
\lambda_{1,2}=-\frac{b}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}=\sqrt{c}\left(-\frac{b}{2\sqrt{c}}\pm\mathrm{i}\sqrt{1-\frac{b^2}{4c}}\right)=\sqrt{c}\,(\cos\varphi\pm\mathrm{i}\sin\varphi),
$$

kde $\varphi=\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{4c-b^2}}{b}\right)$. Je tedy

$$
\cos\varphi=-\frac{b}{2\sqrt{c}},\qquad \sin\varphi=\sqrt{1-\frac{b^2}{4c}},
$$

$$\cos 2\varphi = \frac{b^2}{4c} - \frac{4c-b^2}{4c} = \frac{b^2-2c}{2c}, \qquad \sin 2\varphi = 2\left(-\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)\sqrt{1-\frac{b^2}{4c}} = -\frac{b}{\sqrt{c}}\sqrt{1-\frac{b^2}{4c}},$$

$$\sqrt{c}\,\cos 2\varphi + b\cos\varphi + \sqrt{c} = \frac{b^2-2c}{2\sqrt{c}} - \frac{b^2}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c} = 0,$$

$$\sqrt{c}\,\sin 2\varphi + b\sin\varphi = -b\sqrt{1-\frac{b^2}{4c}} + b\sqrt{1-\frac{b^2}{4c}} = 0.$$

Nyní můžeme vyjádřit řešení diferenční rovnice (3.29) jako posloupnost

$$x(t) = \sqrt{c}^{\,t}(A\cos t\varphi + B\sin t\varphi), \tag{3.34}$$

neboť

$$\begin{aligned}
&x(t+2) + bx(t+1) + cx(t) = \\
&\quad= \sqrt{c}^{\,t+2}\big(A\cos(t+2)\varphi + B\sin(t+2)\varphi\big) + b\sqrt{c}^{\,t+1}\big(A\cos(t+1)\varphi + B\sin(t+1)\varphi\big) + \\
&\qquad\qquad + \sqrt{c}^{\,t+1}c(A\cos t\varphi + B\sin t\varphi) = \\
&= \sqrt{c}^{\,t+1}\Big(A\big(\sqrt{c}\,\cos(t+2)\varphi + b\cos(t+1)\varphi + \sqrt{c}\,\cos t\varphi\big) + \\
&\qquad\qquad + B\big(\sqrt{c}\,\sin(t+2)\varphi + b\sin(t+1)\varphi + \sqrt{c}\,\sin t\varphi\big)\Big) = \\
&= \sqrt{c}^{\,t+1}\big(A(\sqrt{c}\,(\cos t\varphi\cos 2\varphi - \sin t\varphi\sin 2\varphi) + b\cos t\varphi\cos\varphi - b\sin t\varphi\sin\varphi + \sqrt{c}\,\cos t\varphi) + \\
&\qquad\qquad + B(\sqrt{c}\,(\sin t\varphi\cos 2\varphi + \cos t\varphi\sin 2\varphi) + b(\sin t\varphi\sin\varphi + \sin t\varphi)\big) = \\
&= \sqrt{c}^{\,t+1}\Big(A\big(\cos t\varphi(\sqrt{c}\,\cos 2\varphi + b\cos\varphi + \sqrt{c}\,) - \sin t\varphi(\sqrt{c}\,\sin 2\varphi + b\sin\varphi)\big) + \\
&\qquad\qquad + B\big(\sin t\varphi(\sqrt{c}\,\cos 2\varphi + b\cos\varphi + \sqrt{c}\,) + cost\varphi(\sqrt{c}\,\sin 2\varphi + b\sin\varphi)\big)\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Konstanty A a B volíme tak, aby byly splňeny počáteční podmínky (3.30), tedy jako řešení soustavy lineárních (algebraických) rovnic

$$\begin{aligned}
A\sqrt{c}^{\,t_0}\cos t_0\varphi \quad &+ B\sqrt{c}^{\,t_0}\sin t_0\varphi &= \xi_0 \\
A\sqrt{c}^{\,t_0+1}\cos(t_0+1)\varphi &+ B\sqrt{c}^{\,t_0+1}\sin(t_0+1)\varphi &= \xi_1.
\end{aligned}$$

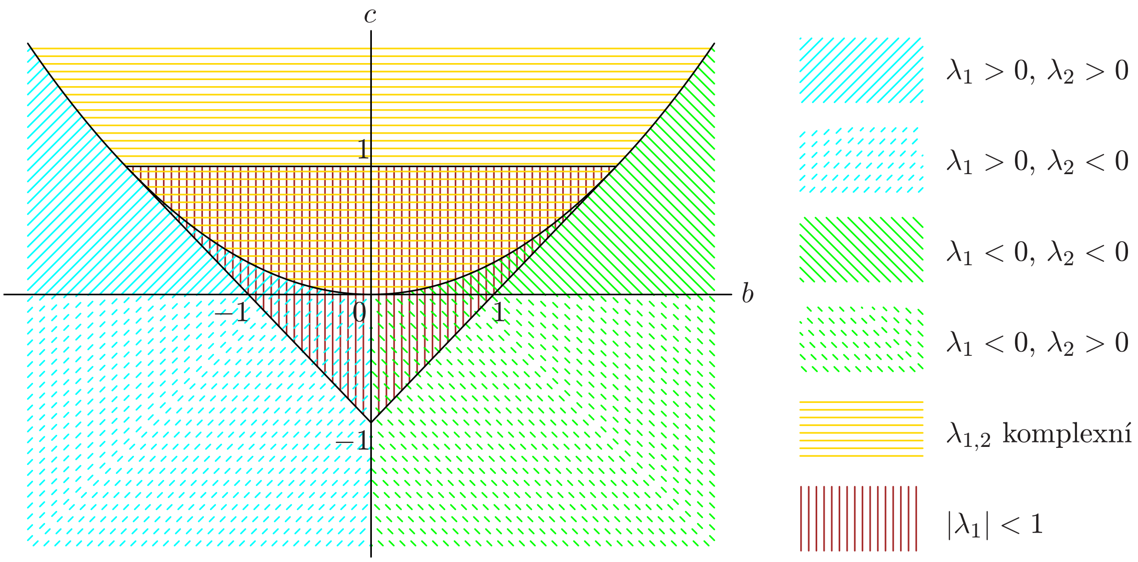
Determinant této soustavy je

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \sqrt{c}^{\,t_0}\cos t_0\varphi & \sqrt{c}^{\,t_0}\sin t_0\varphi \\ \sqrt{c}^{\,t_0+1}\cos(t_0+1)\varphi & \sqrt{c}^{\,t_0+1}\sin(t_0+1)\varphi \end{vmatrix} = \\
&\qquad = c^{t_0}\sqrt{c}\,\big(\cos t_0\varphi\sin(t_0+1)\varphi - \sin t_0\varphi\cos(t_0+1)\varphi\big) = \\
&= c^{t_0}\sqrt{c}\,\big(\cos t_0\varphi(\sin t_0\varphi\cos\varphi + \cos t_0\varphi\sin\varphi) - \sin t_0\varphi(\cos t_0\varphi(\cos t_0\varphi\cos\varphi - \sin t_0\varphi\sin\varphi\big) = \\
&\qquad\qquad = c^{t_0}\sqrt{c}\,\sin\varphi = c^{t_0}\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2} \neq 0,
\end{aligned}$$

což znamená, že soustava je jednoznačně řešitelná a že posloupnosti definované vztahy

$$x_1(t) = \sqrt{c}^{\,t}\cos t\varphi, \quad x_2(t) = \sqrt{c}^{\,t}\sin t\varphi$$

tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenční rovnice (3.29).



Obrázek 3.1: Závislost charakteristických kořenů $\lambda_{1,2}$ lineární diferenční rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty $x(t+2) + bx(t+1) + cx(t) = 0$ na koeficientech b, c.

Posloupnost definovaná formulí (3.34), kde konstanty A, B jsou dány vztahy

$$A = \frac{2\sqrt{c}^{\,-t_0}}{\sqrt{4c-b^2}}\left(\sqrt{c}\,\xi_0 \sin(t_0+1)\varphi - \xi_1 \sin t_0\varphi\right), \quad B = \frac{2\sqrt{c}^{\,-t_0}}{\sqrt{4c-b^2}}\left(\xi_1 \cos t_0\varphi - \sqrt{c}\,\xi_0 \cos(t_0+1)\varphi\right)$$

je řešením počáteční úlohy (3.29), (3.30). Explicitněji můžeme řešení úlohy (3.29), (3.30) v tomto případě vyjádřit formulí

$$x(t) = \sqrt{c}^{\,t-t_0}\left(\xi_0 \cos(t-t_0)\varphi + \frac{2\xi_1 + b\xi_0}{\sqrt{4c-b^2}} \sin(t-t_0)\varphi\right).$$

Řešení diferenční rovnice je tedy součinem geometrické posloupnosti s kvocientem $\sqrt{c}$ a posloupnosti ohraničené.

Odtud plyne, že pro $c < 1$ je

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Poněvadž podle předpokladu je alespoň jedna z počátečních hodnot ξ_0, ξ_1 nenulová, tak pro $c > 1$ je

$$-\infty = \liminf_{t\to\infty} x(t) < \limsup_{t\to\infty} x(t) = \infty.$$

Pro $c = 1$ platí

$$-|\xi_0| - \frac{|2\xi_1 + b\xi_0|}{\sqrt{4-b^2}} \le \liminf_{t\to\infty} x(t) < \limsup_{t\to\infty} x(t) \le |\xi_0| + \frac{|2\xi_1 + b\xi_0|}{\sqrt{4-b^2}}.$$

Výsledky analýzy charakteristické rovnice (3.31) lineární homogenní diferenční rovnice druhého řádu (3.29) jsou zobrazeny na obrázku 3.1.

Ještě poznamenejme, že pokud by $c = 0$, rovnice (3.29) by se redukovala na lineární diferenční rovnici prvního řádu, která má řešení

$$x(t) = x(t_0)(-b)^{t-t_0}.$$

Úloha (3.29), (3.30) by pak měla řešení jedině v případě $\xi_1 = -b\xi_0$. ■

Věta 18. *Nechť λ_p je r-násobný kořen charakteristické rovnice (3.28). Pak každá z posloupností definovaných vztahem*

$$x(t) = t^q \lambda_p^t, \qquad q = 0, 1, 2, \ldots, r-1$$

je řešením lineární homogenní diferenční rovnice (3.26).

Důkaz: Položíme $\gamma_k = 1$ a polynom na levé straně rovnice (3.28) označíme $P(\lambda)$, tj.

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \lambda^i.$$

Nejprve dokážeme pomocné tvrzení: Ke každému přirozenému číslu s a každému přirozenému číslu $j \in \{0, 1, 2, \ldots, s\}$ existuje polynom $p_{s,j}$ stupně nejvýše s ve dvou proměnných t, λ takový, že

$$\sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^s \lambda^i = \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda).$$

Tvrzení dokážeme úplnou indukcí vzhledem k proměnné s. Pro $s = 0$ je

$$\sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^0 \lambda^i = \sum_{i=0}^{k} \gamma_i \lambda^i = P(\lambda) = 1P^{(0)}(\lambda),$$

tedy $p_{0,0} \equiv 1$.

Indukční krok je obsažen ve výpočtu:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^{s+1} \lambda^i &= \sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^s (t+i) \lambda^i = t \sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^s \lambda^i + \lambda \sum_{i=1}^{k} \gamma_i (t+i)^s i \lambda^{i-1} = \\
&= t \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \sum_{i=1}^{k} \gamma_i (t+i)^s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \lambda^i = \\
&= t \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \sum_{i=1}^{k} \gamma_i (t+i)^s \lambda^i = \\
&= t \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(\sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^s \lambda^i - \gamma_0 t^s \right) = \\
&= t \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(\sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) - \gamma_0 t^s \right) = \\
&= t \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \sum_{j=0}^{s} \left(\frac{\partial p_{s,j}(t,\lambda)}{\partial \lambda} P^{(j)}(\lambda) + p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j+1)}(\lambda) \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{s} \left(t p_{s,j}(t,\lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,j}(t,\lambda)}{\partial \lambda} \right) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \sum_{j=1}^{s+1} p_{s,j-1}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) =
\end{aligned}$$

$$= \left(tp_{s,0}(t,\lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,0}(t,\lambda)}{\partial \lambda} \right) P(\lambda) + \\ + \sum_{j=1}^{s} \left(tp_{s,j}(t,\lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,j}(t,\lambda)}{\partial \lambda} + \lambda p_{s,j-1}(t,\lambda) \right) P^{(j)}(\lambda) + \\ + \lambda p_{s,s}(t,\lambda) P^{(s+1)}(\lambda).$$

Stačí tedy položit

$$\begin{aligned} p_{s+1,0}(t,\lambda) &= tp_{s,0}(t,\lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,0}(t,\lambda)}{\partial \lambda}, \\ p_{s+1,j}(t,\lambda) &= tp_{s,j}(t,\lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,j}(t,\lambda)}{\partial \lambda} + \lambda p_{s,j-1}(t,\lambda) \quad \text{pro } j = 1,2,\ldots,s, \\ p_{s+1,s+1}(t,\lambda) &= \lambda p_{s,s}(t,\lambda) \end{aligned}$$

a pomocné tvrzení je dokázáno.

Nechť nyní λ_p je r-násobný kořen charakteristické rovnice. Pak je také kořenem derivací polynomu P až do řádu $r-1$, tj.

$$P^{(j)}(\lambda_p) = 0 \quad \text{pro } j = 0,1,2,\ldots,r-1.$$

Nyní pro $x(t) = t^q \lambda_p^t$, $q \in \{0,1,2,\ldots,r-1\}$, podle pomocného tvrzení platí

$$\sum_{i=0}^{k} \gamma_i x(t+i) = \sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^q \lambda_p^{t+i} = \lambda^t \sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^q \lambda_p^i = \lambda^t \sum_{j=0}^{q} p_{q,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) = 0. \qquad \square$$

Věta 19. *Nechť $\lambda_c = a(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ je r-násobný komplexní kořen charakteristické rovnice (3.28). Pak každá z posloupností definovaných některým ze vztahů*

$$x_1(t) = t^q a^t \cos t\varphi, \quad x_2(t) = t^q a^t \sin t\varphi, \qquad q = 0,1,2,\ldots,r-1$$

je řešením lineární homogenní diferenční rovnice (3.26).

Důkaz: Poněvadž polynom na levé straně rovnice (3.28) má reálné koeficienty, je také komplexně sdružené číslo $\bar{\lambda}_c = a(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)$ kořenem charakteristické rovnice (3.28) a má stejnou násobnost r. Podle Věty 18 (v níž jsme nepředpokládali, že by kořen charakteristické rovnice byl reálný), je každá z posloupností definovaných vztahem

$$\tilde{x}_1(t) = t^q a^t (\cos t\varphi + \mathrm{i}\sin t\varphi), \quad \tilde{x}_2(t) = t^q a^t (\cos t\varphi - \mathrm{i}\sin t\varphi), \qquad q = 0,1,2,\ldots,r-1$$

řešením rovnice (3.26). Podle principu superpozice jsou také posloupnosti

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\big(\tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t)\big), \quad x_2(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_2(t)\big)$$

řešením této rovnice. $\square$

Důsledek 2. *Každému reálnému r-násobnému charakteristickému kořenu λ odpovídá r řešení lineární homogenní rovnice (3.26)*

$$\lambda^t,\ t\lambda^t,\ t^2\lambda^t, \dots,\ t^{r-1}\lambda^t$$

a každému komplexnímu r-násobnému charakteristickému kořenu $a(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ odpovídá $2r$ řešení lineární homogenní rovnice (3.26)

$$a^t\cos t\varphi,\ ta^t\cos t\varphi,\ t^2a^t\cos t\varphi, \dots,\ t^{r-1}a^t\cos t\varphi,$$

$$a^t\sin t\varphi,\ ta^t\sin t\varphi,\ t^2a^t\sin t\varphi, \dots,\ t^{r-1}a^t\sin t\varphi.$$

Důsledek 3. *Nechť*

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k_1}$$

jsou všechny jednoduché reálné různé charakteristické kořeny,

$$\lambda_{k_1+1}, \lambda_{k_1+2}, \dots, \lambda_{k_2}$$

jsou všechny reálné různé charakteristické kořeny, které mají násobnosti $r_{k_1+1}, r_{k_1+2}, \dots, r_{k_2}$ (v tomto pořadí) a

$$a_{k_2+1}(\cos\varphi_{k_2+1} + \mathrm{i}\sin\varphi_{k_2+1}), a_{k_2+2}(\cos\varphi_{k_2+2} + \mathrm{i}\sin\varphi_{k_2+2}), \dots, a_{k_3}(\cos\varphi_{k_3} + \mathrm{i}\sin\varphi_{k_3})$$

jsou všechny komplexní charakteristické kořeny takové, že žádné dva z nich nejsou komplexně sdružené a mají násobnosti $r_{k_2+1}, r_{k_2+2}, \dots, r_{k_3}$ (v tomto pořadí). Přitom samozřejmě platí

$$k_1 + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} r_i + 2\sum_{i=k_2+1}^{k_3} r_i = k.$$

Pak posloupnost definovaná vztahem

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k_1} A_i\lambda_i^t + \sum_{i=k_1+1}^{k_2}\sum_{j=0}^{r_i-1} B_{ij}t^j\lambda_i^t + \sum_{i=k_2+1}^{k_3}\sum_{j=0}^{r_i-1} C_{ij}t^ja_i^t\cos t\varphi_i + \sum_{i=k_2+1}^{k_3}\sum_{j=0}^{r_i-1} D_{ij}t^ja_i^t\sin t\varphi_i, \tag{3.35}$$

kde $A_i, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}$ jsou konstanty, je řešením lineární homogenní rovnice (3.26).

Nechť existuje charakteristický kořen, jehož modul (absolutní hodnota) je větší, než moduly všech ostatních charakteristických kořenů. Takový charakteristický kořen musí být reálný a jednoduchý, můžeme ho tedy označit λ_1. Platí

$$|\lambda_1| > |\lambda_i| \text{ pro } i = 2, 3, \dots, k_2, \qquad |\lambda_1| > a_i \text{ pro } i = k_2+1, k_2+2, \dots, k_3.$$

Charakteristický kořen λ_1 s těmito vlastnostmi nazveme *ryze dominantní.* Nyní pro řešení $x(t)$ rovnice (3.26) definované vztahem (3.35) za předpokladu $A_1 \neq 0$ platí

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x(t)}{A_1\lambda_1^t} = \lim_{t\to\infty}\left(1 + \sum_{i=2}^{k_1}\frac{A_i}{A_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^t + \sum_{i=k_1+1}^{k_2}\sum_{j=0}^{r_i-1}\frac{B_{ij}}{A_1}t^j\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^t + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=k_2+1}^{k_3}\sum_{j=0}^{r_i-1}\frac{C_{ij}}{A_1}t^j\left(\frac{a_i}{\lambda_1}\right)^t\cos t\varphi_i + \sum_{i=k_2+1}^{k_3}\sum_{j=0}^{r_i-1}\frac{D_{ij}}{A_1}t^j\left(\frac{a_i}{\lambda_1}\right)^t\sin t\varphi_i\right) = 1.$$

Dostáváme tak

Důsledek 4. *Pokud existuje ryze dominantní charakteristický kořen λ_1 a konstanta A_1 v řešení (3.35) rovnice (3.26) je nenulová, pak toto řešení je asymptoticky ekvivalentní s geometrickou posloupností s kvocientem λ_1.*

Řekneme, že charakteristický kořen je *dominantní,* pokud jeho modul není menší než modul jakéhokoliv charakteristického kořene, tj. dominantní charakteristický kořen má maximální modul. Označme tento maximální modul symbolem Λ.

Nechť jsou charakteristické kořeny označeny jako v Důsledku 3 a navíc platí

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq \cdots \geq |\lambda_{k_1}|,$$

$$|\lambda_{k_1+1}| \geq |\lambda_{k_1+2}| \geq \cdots \geq |\lambda_{k_2}|, \quad a_{k_2+1} \geq a_{k_2+2} \geq \cdots \geq a_{k_3}.$$

Položme

$$l_1 = \begin{cases} 2, & \Lambda = |\lambda_2|, \\ 1, & \Lambda = |\lambda_1| > |\lambda_2|, \\ 0, & \Lambda > |\lambda_1|, \end{cases} \qquad l_2 = \begin{cases} \max\left\{i \in \{k_2+1, k_2+2, \dots, k_3\} : a_i = \Lambda\right\}, & \Lambda = a_{k_2+1}, \\ k_2, & \Lambda > a_{k_2+1}. \end{cases}$$

Nechť dominantní charakteristické kořeny jsou jednoduché, tj. $|\lambda_{k_1+1}| < \Lambda$ a pokud $l_2 > k_2$ tak $\max\left\{r_i : i \in \{k_2+1, k_2+2, \dots, l_2\}\right\} = 1$. Označme

$$y(t) = \sum_{i=1}^{l_1} A_i (\operatorname{sgn} \lambda_i)^t + \sum_{i=k_2+1}^{l_2} (C_{i0} \cos t\varphi_i + D_{i0} \sin t\varphi_i).$$

Pak

$$\frac{x(t)}{\Lambda^t} - y(t) = \sum_{i=l_1+1}^{k_1} A_i \left(\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^t + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \sum_{j=0}^{r_i-1} B_{ij} t^j \left(\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^t + \\ + \sum_{i=l_2+1}^{k_3} \sum_{j=0}^{r_i-1} C_{ij} t^j \left(\frac{a_i}{\Lambda}\right)^t \cos t\varphi_i + \sum_{i=l_2+1}^{k_3} \sum_{j=0}^{r_i-1} D_{ij} t^j \left(\frac{a_i}{\Lambda}\right)^t \sin t\varphi_i.$$

Limita pro $t \to \infty$ posloupnosti na pravé straně této rovnosti je rovna 0. To — zhruba řečeno — znamená, že „pro dostatečně velké t se řešení rovnice (3.26) chová jako posloupnost y“.

Poněvadž pro libovolné t platí nerovnosti

$$-\infty < -\sum_{i=1}^{l_1} |A_i| - \sum_{i=k_2+1}^{l_2} \big(|C_{i0}| + |D_{i0}|\big) \leq y(t) \leq \infty < -\sum_{i=1}^{l_1} |A_i| + \sum_{i=k_2+1}^{l_2} \big(|C_{i0}| + |D_{i0}|\big) < \infty,$$

je

$$-\infty < m = \liminf_{t \to \infty} y(t) \leq \limsup_{t \to \infty} = M < \infty,$$

pro řešení $x(t)$ rovnice (3.26) definované rovností (3.35) platí

$$m\Lambda^t \leq x(t) \leq M\Lambda^t.$$

3.2.4 Rovnice s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou

Uvažujme nehomogenní lineární diferenční rovnici k-tého řádu druhého typu

$$x(t+k) + \gamma_{k-1}x(t+k-1) + \cdots + \gamma_1 x(t+1) + \gamma_0 = b(t) \tag{3.36}$$

a k ní přidruženou lineární homogenní rovnici (3.26). Označme polynomiální operátor posunu z levé strany operátorové rovnice (3.27) symbolem P^Σ; homogenní rovnici (3.26) tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$P^\Sigma x(t) \equiv 0 \quad \text{nebo} \quad P^\Sigma x = 0,$$

a nehomogenní rovnici ve tvaru

$$P^\Sigma x(t) = b(t) \quad \text{nebo} \quad P^\Sigma x = b.$$

Definice 19. Nechť $p \in \mathcal{P}$ je posloupnost, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{R}$ jsou konstanty takové, že $\beta_0 \neq 0 \neq \beta_l$, a nechť R^Σ je polynomiální operátor posunu, $R^\Sigma = \sum\limits_{i=0}^{l} \beta_i \cdot^{\sigma^i}$. Řekneme, že operátor R^Σ je *anihilátor* posloupnosti p, pokud

$$R^\Sigma p \equiv 0.$$

Podle této terminologie je P^Σ anihilátorem každého řešení homogenní rovnice (3.26).

Nechť existuje anihilátor $Q^\Sigma = \sum\limits_{i=0}^{l} \beta_i \cdot^{\sigma^i}$ posloupnosti b, která je na pravé straně nehomogenní rovnice (3.36). To znamená, že b je řešením nějaké lineární homogenní rovnice s konstatntními koeficienty, takže podle Důsledku 2 je posloupnost b lineární kombinací výrazů κ^t, $t^m\kappa^t$, $\cos t\psi$, $\sin t\psi$, $t^n \cos t\psi$, $t^n \sin t\psi$. Nechť dále y je řešením nehomogenní rovnice (3.36). Pak platí

$$Q^\Sigma P^\Sigma y \equiv 0. \tag{3.37}$$

To znamená, že řešení nehomogenní lineární rovnice k-tého řádu je současně řešením lineární rovnice $(k+l)$-tého řádu.

Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, $p \leq k$, jsou charakteristické kořeny homogenní rovnice

$$P^\Sigma x \equiv 0$$

a $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$, $q \leq l$, jsou charakteristické kořeny homogenní rovnice

$$Q^\Sigma x \equiv 0.$$

Nyní rozlišíme dva případy.

Případ 1: $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\} \cap \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q\} = \emptyset$. V tomto případě můžeme psát řešení nehomogenní rovnice podle tabulky 3.1. Takové obecně zapsané řešení dosadíme do rovnice (3.36) a vypočítáme konstanty C_j, D_j.

Případ 2: $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\} \cap \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q\} \neq \emptyset$. V tomto případě nejprve najdeme obecné řešení homogenní rovnice (3.37) a vynecháme v něm všechny členy, které se vyskytují v obecném řešení přidružené homogenní rovnice (3.26). Tím dostaneme řešení nehomogenní rovnice (3.36) s neurčitými koeficienty, které určíme dosazením do původní rovnice (3.36).

$b(t)$	tvar řešení
a^t	$C_1 a^t$
t^m	$C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_m t^m$
$t^m a^t$	$a^t \left(C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_m t^m\right)$
$\sin \psi t,\ \cos \psi t$	$C_1 \sin \psi t + C_2 \cos \psi t$
$a^t \sin \psi t,\ a^t \cos \psi t$	$a^t \left(C_1 \sin \psi t + C_2 \cos \psi t\right)$
$a^t t^m \sin \psi t,\ a^t t^m \cos \psi t$	$a^t \left[(C_0 + C_1 t + \cdots + C_m t^m) \sin \psi t + \right.$ $\left. + (D_0 + D_1 t + \cdots + D_m t^m) \cos \psi t\right]$

Tabulka 3.1: Tvary řešení nehomogenní rovnice (3.36) pro různé pravé strany b.

3.3 Systémy lineárních rovnic prvního řádu

Systém k lineárních diferenčních rovnic druhého typu (rekurentních formulí) je tvaru

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1k}(t)x_k(t) + b_1(t), \\ x_2(t+1) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2k}(t)x_k(t) + b_2(t), \\ &\vdots \\ x_k(t+1) &= a_{k1}(t)x_1(t) + a_{k2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{kk}(t)x_k(t) + b_k(t). \end{aligned} \tag{3.38}$$

O posloupnostech a_{ij}, b_i, $i, j = 11, 2, \ldots, k$ předpokládáme, že mají všechny stejný definiční obor. Při označení

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_k(t) \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1k}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2k}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}(t) & a_{k2}(t) & \ldots & a_{kk}(t) \end{pmatrix}$$

můžeme systém (3.38) přepsat ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{t}). \tag{3.39}$$

Pokud je vektor $\boldsymbol{b}$ v každém indexu t nulový, nazývá se systém (3.38) *homogenní,* v opačném případě se nazývá *nehomogenní.* Je-li každá z posloupností a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, stacionární, mluvíme o *systému s konstantními koeficienty.*

Podle Tvrzení 10 je lineární diferenční rovnice k-tého řádu (3.13) ekvivalentní se systémem k lineárních diferenčních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_2(t), \\ x_2(t) &= x_3(t), \\ &\vdots \\ x_{k-1}(t) &= x_k(t), \\ x_k(t) &= -c_0(t)x_1(t) - c_1(t)x_2(t) - \cdots - c_{k-1}(t)x_k(t) + b(t). \end{aligned}$$

Tento systém můžeme opět zapsat ve vektorovém tvaru (3.39), kde maticová posloupnost A

a vektorová posloupnost $\boldsymbol{v}$ jsou dány vztahy

$$\mathsf{A}(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -c_0(t) & -c_1(t) & -c_2(t) & \dots & -c_{k-1}(t)\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(t)=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ b(t)\end{pmatrix}.$$

Příklad: Systém dvou lineárních rovnic.
Uvažujme systém rovnic

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= a_{11}(t)x_1(t)+a_{12}(t)x_2(t)+b_1(t),\\ x_2(t+1) &= a_{21}(t)x_1(t)+a_{22}(t)x_2(t)+b_2(t). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Budeme předpokládat, že první rovnice je skutečně rovnice pro dvě posloupnosti, tj. že posloupnost a_{12} je v každém indexu nenulová. Za tohoto předpokladu můžeme provést následující výpočet.

V první rovnici tohoto systému budeme psát index $t+1$ místo indexu t, potom za $x_2(t+1)$ dosadíme pravou stranu druhé rovnice a poté dosadíme posloupnost $x_2(t)$ vyjádřenou z první. Dostaneme tak

$$\begin{aligned} x_1(t+2) &= a_{11}(t+1)x_1(t+1)+a_{12}(t+1)x_2(t+1)+b_1(t+1)=\\ &= a_{11}(t+1)x_1(t+1)+a_{12}(t+1)\big(a_{21}(t)x_1(t)+a_{22}(t)x_2(t)+b_2(t)\big)+b_1(t+1)=\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}(t+1)x_1(t+1)+a_{12}(t+1)a_{21}(t)x_1(t)+\\ &\qquad + a_{12}(t+1)a_{22}(t)\frac{x_1(t+1)-a_{11}(t)x_1(t)-b_1(t)}{a_{12}(t)}+a_{12}(t+1)b_2(t)+b_1(t+1)=\\ &= \left(a_{11}(t+1)+\frac{a_{12}(t+1)}{a_{12}(t)}a_{22}(t)\right)x_1(t+1)+\\ &\qquad + \frac{a_{12}(t+1)}{a_{12}(t)}\big(a_{12}(t)a_{21}(t)-a_{11}(t)a_{22}(t)\big)x_1(t)+\\ &\qquad + b_1(t+1)-\frac{a_{12}(t+1)}{a_{12}(t)}a_{22}(t)b_1(t)+a_{12}(t+1)b_2(t).\end{aligned}$$

To znamená, že první složka řešení systému (3.40) splňuje lineární diferenční rovnici druhého řádu. Analogicky dostaneme, že i druhá složka řešení systému (3.40) splňuje lineární diferenční rovnici druhého řádu

$$\begin{aligned} x_2(t+2) &= \left(\frac{a_{21}(t+1)}{a_{21}(t)}a_{11}(t)+a_{22}(t+1)\right)x_2(t+1)+\\ &\qquad + \frac{a_{21}(t+1)}{a_{21}(t)}\big(a_{21}(t)a_{12}(t)-a_{11}(t)a_{22}(t)\big)x_2(t)+\\ &\qquad + b_2(t+1)-\frac{a_{21}(t+1)}{a_{21}(t)}a_{11}b_2(t)+a_{21}(t+1)b_1(t)\end{aligned}$$

za předpokladu, že posloupnost a_{21} je v každém indexu nenulová.

Všimněme si ještě lineární diferenční rovnice druhého řádu

$$x(t+2) + c_1 x(t+1) + c_0 x(t) = b(t). \tag{3.41}$$

Položíme-li $x_1(t) = x(t)$ a $x_2(t) = x(t+1)$, můžeme tuto rovnici přepsat jako systém lineárních diferenčních rovnic

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t), \\ x_2(t+1) &= -c_0 x_1(t) - c_1 x_2(t) + b(t). \end{aligned}$$

Toto pozorování ukazuje, že struktura na množině řešení systému (3.40) a struktura na množině řešení rovnice (3.40) je stejná. Zejména tedy množina řešení lineárního homogenního systému dvou rovnic

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t), \\ x_2(t+1) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) \end{aligned}$$

takového, že $a_{12}(t) \neq 0 \neq a_{21}(t)$ pro všechny indexy $t \in \operatorname{Dom} a_{12} = \operatorname{Dom} a_{21}$, tvoří vektorový prostor dimenze 2.

Uvažujme nyní speciální případ systému (3.40), a to homogenní systém s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \alpha_{11}x_1(t) + \alpha_{12}x_2(t), \\ x_2(t+1) &= \alpha_{21}x_1(t) + \alpha_{22}x_2(t), \end{aligned} \tag{3.42}$$

nebo ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t),$$

kde

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Podle předchozích výpočtů obě složky tohoto systému splňují tutéž lineární diferenční rovnici prvního řádu

$$x_{1,2}(t+1) = (\alpha_{11} + \alpha_{22})\, x_{1,2}(t+1) - (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{22})\, x_{1,2}(t),$$

kterou můžeme stručněji zapsat ve tvaru

$$x_{1,2}(t+1) - (\operatorname{tr}\mathsf{A})\, x_{1,2}(t+1) + (\det\mathsf{A})\, x_{1,2}(t) = 0.$$

Z řešení příkladu na str. 42–47 nyní zejména plyne:

(i) Je-li $|\operatorname{tr}\mathsf{A}| - 1 < \det\mathsf{A} < 1$, pak pro každé řešení systému (3.42) platí

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} x_2(t) = 0$$

(oba charakteristické kořeny jsou v absolutní hodnotě menší než 1).

(ii) Je-li $|\operatorname{tr}\mathsf{A}| - 1 > \det\mathsf{A}$ nebo $\det\mathsf{A} > 1$, pak existuje řešení systému (3.42) takové, že

$$\lim_{t\to\infty} |x_1(t)| = \infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{t\to\infty} |x_2(t)| = \infty$$

(dominantní charakteristický kořen je v absolutní hodnotě větší než 1).

(iii) Je-li $\operatorname{tr}\mathsf{A} > 0$ a $1 < \det\mathsf{A} < \frac{1}{4}(\operatorname{tr}\mathsf{A})^2$, pak obě složky libovolného řešení systému (3.42) jsou ryze monotonní (oba charakteristické kořeny jsou reálné a kladné).

■

3.4 Nelineární rovnice transformovatelné na lineární

3.4.1 Ricattiho rovnice

Riccatiho diferenční rovnice zapsaná jako explicitní rovnice prvního typu nebo rekurentní formule je tvaru

$$\Delta x = \frac{p(t)x^2 + q(t)x + r(t)}{1 - p(t)x} \quad \text{nebo} \quad x(t+1) = \frac{\big(1+q(t)\big)x(t) + r(t)}{1 - p(t)x(t)}. \tag{3.43}$$

Rekurentní formuli můžeme také upravit na tvar

$$-\frac{p(t)}{1+q(t)}x(t+1)x(t) + \frac{1}{1+q(t)}x(t+1) - x(t) = 0. \tag{3.44}$$

Riccatiho rovnici řešíme pomocí substituce

$$x(t) = -\frac{\Delta y(t)}{p(t)y(t)} = \frac{y(t) - y(t+1)}{p(t)y(t)}.$$

Dosadíme do rekurentní formule (3.43) a postupně upravujeme:

$$\begin{aligned}
\frac{y(t+1) - y(t+2)}{p(t+1)y(t+1)} &= \frac{\big(1+q(t)\big)\dfrac{y(t)-y(t+1)}{p(t)y(t)} + r(t)}{1 - \dfrac{y(t)-y(t+1)}{y(t)}} \\
\frac{y(t+1) - y(t+2)}{p(t+1)y(t)} &= \big(1+q(t)\big)\frac{y(t)-y(t+1)}{p(t)y(t)} + r(t) \\
y(t+1) - y(t+2) &= -\frac{\big(1+q(t)\big)p(t+1)}{p(t)}y(t+1) + \left(\frac{1+q(t)}{p(t)} + r(t)p(t+1)\right)y(t).
\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že posloupnost y je řešením lineární homogenní diferenční rovnice druhého řádu

$$y(t+2) - \frac{p(t) + p(t+1) + q(t)p(t+1)}{p(t)}y(t+1) + \left(\frac{1+q(t)}{p(t)} + r(t)p(t+1)\right)y(t) = 0.$$

3.4.2 Bernoulliova rovnice

Jedná se o rovnici

$$\Delta x^{1-\alpha} = \big(a(t) - 1\big)x^{1-\alpha} + b(t),$$

kterou můžeme přepsat jako rekurentní formuli ve tvaru

$$x(t+1)^{1-\alpha} = a(t)x(t)^{1-\alpha} + b(t). \tag{3.45}$$

Přitom $\alpha \neq 1$ je reálné číslo. Substitucí

$$x(t)^{1-\alpha} = y(t)$$

Bernoulliova rovnice přejde na nehomogenní lineární rovnici

$$y(t+1) = a(t)y(t) + b(t).$$

Případ $\alpha = 2$ (*rovnice Riccatiho typu*):

Rovnici (3.45) s $\alpha = 2$

$$\frac{1}{x(t+1)} = \frac{a(t)}{x(t)} + b(t)$$

můžeme upravit na tvar

$$b(t)x(t+1)x(t) + a(t)x(t+1) - x(t) = 0. \tag{3.46}$$

Porovnáním s rovnicí (3.44) vidíme, že Riccatiho rovnice s parametry

$$r \equiv 0,\;\; q(t) = \frac{1}{a(t)} - 1,\;\; \text{a}\;\, p(t) = -\frac{b(t)}{a(t)}$$

je rovnicí (3.46); Bernoulliova rovnice s $\alpha = 2$ je vskutku speciálním případem Riccatiho rovnice. Můžeme ji však vyřešit pomocí jednodušší substituce

$$x(t) = \frac{1}{y(t)}. \tag{3.47}$$

Rovnici (3.46) můžeme také přepsat jako rekurentní formuli prvního řádu

$$x(t+1) = \frac{x(t)}{b(t)x(t) + a(t)}$$

nebo diferenční rovnici prvního typu

$$\Delta x = x\frac{1 - a(t) - b(t)x}{a(t) + b(t)x}.$$

Rovnici můžeme také zapsat ve tvaru

$$x(t+1) - x(t) = \frac{1 - a(t)}{a(t)}x(t)\left(1 - \frac{b(t)}{1 - a(t)}x(t+1)\right),$$

nebo stručněji s využitím operátorů posunu a diference

$$\Delta x = \frac{1 - a(t)}{a(t)}x\left(1 - \frac{b(t)}{1 - a(t)}x^{\sigma}\right).$$

Příklad: Logistická rovnice Evelyny C. Pielou.

Jako rekurentní formule je tato rovnice tvaru

$$x(t+1) = x(t)\frac{rK}{K + (r-1)x(t)}, \tag{3.48}$$

kde r, K jsou kladné konstanty, $r > 1$. Můžeme ji přepsat jako explicitní diferenční rovnici prvního typu

$$\Delta x = (r-1)x\frac{K - x}{K + (r-1)x}$$

nebo s použitím operátoru posunu $^\sigma$ ve tvaru

$$\Delta x = (r-1)x\left(1-\frac{x^\sigma}{K}\right).$$

Z těchto vyjádření je vidět, že se jedná o rovnici Riccatiho typu (3.46) s $a \equiv \frac{1}{r}$ a $b \equiv \frac{r-1}{rK}$. Rovnici (3.48) řešíme substitucí (3.47). Po dosazení dostaneme

$$\frac{1}{y(t+1)} = \frac{rK}{y(t)}\frac{y(t)}{Ky(t)+r-1}$$

a po úpravě

$$y(t+1) = \frac{1}{r}y(t) + \frac{r-1}{rK},$$

nebo ve tvaru diferenční rovnice prvního typu

$$\Delta y = -\frac{r-1}{r}y + \frac{r-1}{rK}.$$

Tato lineární rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty má podle výsledků odstavce 3.1.2 řešení

$$y(t) = \left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{K}\right)\left(\frac{1}{r}\right)^{t-t_0} + \frac{1}{K} = \frac{(K-x_0)r^{-(t-t_0)}+x_0}{Kx_0},$$

kde $x_0 = x(t_0)$. Řešení rovnice (3.48) tedy je

$$x(t) = \frac{Kx_0}{x_0+(K-x_0)r^{-(t-t_0)}}.$$

Z podmínky $r > 1$ plyne, že $\lim\limits_{t\to\infty} r^{-(t-t_0)} = 0$, takže pro každou počáteční podmínku $x_0 \neq 0$ řešení x splňuje

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{Kx_0}{x_0+(K-x_0)r^{-(t-t_0)}} = K.$$

Pro $x_0 = 0$ je řešení $x \equiv 0$. ∎

3.4.3 Rovnice $x(t+k)^{r_k(t)}x(t+k-1)^{r_{k-1}(t)}\cdots x(t+1)^{r_1(t)}x(t)^{r_0(t)} = b(t)$

Přitom $r_0, r_1, \dots, r_k$ jsou posloupnosti takové, že $r_0(t) \neq 0 \neq r_k(t)$ pro všechna t s definičního oboru. Substitucí

$$x(t) = \mathrm{e}^{z(t)} \tag{3.49}$$

tj. $z(t) = \ln x(t)$ převedeme uvažovanou rovnici na tvar

$$\mathrm{e}^{r_k(t)z(t+k)+r_{k-1}(t)z(t+k-1)+\cdots+r_1(t)z(t+1)+r_0(t)z(t)} = b(t),$$

a dále na lineární rovnici k-tého řádu

$$z(t+k) + \frac{r_{k-1}(t)}{r_k(t)}z(t+k-1) + \cdots + \frac{r_1(t)}{r_k(t)}z(t+1) + \frac{r_0(t)}{r_k(t)}z(t) = \ln b(t).$$

Povšimněme si, že z transformačního vztahu (3.49) plyne, že řešení původní rovnice musí být kladné. Uvedený postup tedy můžeme použít pouze v případě, že počáteční hodnoty hledané posloupnosti splňují podmínky

$$x(t_0) = x_0 > 0,\ \ x(t_0+1) = x_1 > 0.\ \ \dots,\ \ x(t_0+k-1) = x_{k-1} > 0.$$

Příklad: Logistická rovnice $x(t+1) = 2x(t)\big(1 - x(t)\big)$.

Uvažujme počáteční úlohu pro rekurentní formuli prvního řádu

$$x(t+1) = 2x(t)\big(1 - x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.50}$$

Tuto úlohu můžeme přepsat jako počáteční úlohu pro explicitní diferenční rovnici prvního řádu ve tvaru

$$\Delta x = x(1 - 2x).$$

Úlohu vyřešíme pro počáteční podmínku $x_0 \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$. Nejprve zavedeme substituci

$$y(t) = 1 - 2x(t), \quad \text{tj.} \quad x(t) = \frac{1}{2}\big(1 - y(t)\big).$$

Po dosazení a úpravách postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\big(1 - y(t+1)\big) &= \big(1 - y(t)\big)\left(1 - \frac{1}{2}\big(1 - y(t)\big)\right) \\
\frac{1}{2}\big(1 - y(t+1)\big) &= \frac{1}{2}\left(1 - y(t)^2\right) \\
y(t+1) &= y(t)^2 \\
y(t+1)y(t)^{-2} &= 1.
\end{aligned}$$

Dostali jsme tedy rovnici typu uvažovaného v tomto odstavci s $k = 1$, $r_1 \equiv 1$, $r_0 \equiv -2$, $b \equiv 1$. Substitucí $z(t) = \ln y(t)$ tato rovnice přejde na lineární homogenní rekurentní formuli prvního řádu

$$z(t+1) = 2z(t).$$

Je tedy $z(t) = z(t_0)2^{t-t_0}$, kde $z(t_0) = \ln y(t_0) = \ln\big(1 - 2x(t_0)\big) = \ln(1 - 2x_0)$, takže

$$\ln y(t) = z(t) = 2^{t-t_0}\ln(1 - 2x_0).$$

Odtud dále dostaneme $y(t) = (1 - 2x_0)^{2^{t-t_0}}$ a to znamená, že řešení úlohy (3.50) je

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(1 - (1 - 2x_0)^{2^{t-t_0}}\right).$$

Ještě poznamenejme, že z podmínky $0 < x_0 < \frac{1}{2}$ plyne $0 < 1 - 2x_0 < 1$ a odtud dále plyne

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}(1 - 2x_0)^{2^{t-t_0}} = \frac{1}{2}.$$

■

3.4.4 Logistická rovnice $x(t+1) = 4x(t)\big(1 - x(t)\big)$

Uvažujme počáteční úlohu pro rekurentní formuli prvního řádu

$$x(t) = 4x(t)\big(1 - x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.51}$$

kterou můžeme přepsat jako počáteční úlohu pro diferenční rovnici prvního typu ve tvaru

$$\Delta x = 3x(1 - 4x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Bude nás zajímat kladné řešení. Proto se musíme omezit na počáteční podmínky $x_0 \in (0,1)$; jinak by hned $x(t_0+1) < 0$. Zavedeme substituci

$$y(t) = \arcsin\sqrt{x(t)}, \quad \text{tj.} \quad x(t) = \big(\sin y(t)\big)^2.$$

Dosazením do pravé strany rovnice (3.51) dostaneme

$$4\big(\sin y(t)\big)^2\left(1 - \big(\sin(y(t)\big)^2\right) = \big(2\sin y(t)\cos y(t)\big)^2 = \big(2\sin 2y(t)\big)^2.$$

Posloupnost y tedy má splňovat rovnici

$$\big(\sin y(t+1)\big)^2 = \big(\sin 2y(t)\big)^2,$$

neboli $\sin y(t+1) = \pm \sin 2y(t)$. Tato rovnost je splněna pouze tehdy, když $y(t+1)$ se liší od $y(t)$ o nějaký násobek π; o sudý násobek v případě znaménka „+“, o lichý násobek v případě znaménka „−“. Dostáváme tak nekonečně mnoho lineárních nehomogenních rekurentních formulí prvního řádu

$$y(t+1) = 2y(t) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Podle výsledků odstavce 3.1.2 mají tyto rovnice řešení

$$y(t) = \big(y(t_0) + k\pi\big)2^{t-t_0} - k\pi = y(t_0)2^{t-t_0} + \left(2^{t-t_0} - 1\right)k\pi.$$

Přitom $y(t_0) = \arcsin\sqrt{x_0}$. Platí tedy

$$\sin y(t) = \sin\left[y(t_0)2^{t-t_0} + \left(2^{t-t_0}-1\right)k\pi\right] = -\sin\left(y(t_0)2^{t-t_0}\right) = -\sin\left(2^{t-t_0}\arcsin\sqrt{x_0}\right),$$

takže řešení úlohy (3.51) je

$$x(t) = \left[\sin\left(2^{t-t_0}\arcsin\sqrt{x_0}\right)\right]^2.$$

3.4.5 Rovnice $x(t+1)^2 + a(t)x(t+1)x(t) + b(t)x(t)^2 = 0$

Tato rovnice má řešení $x \equiv 0$. Budeme hledat také řešení nenulová. Upravíme proto rovnici na tvar

$$\left(\frac{x(t+1)}{x(t)}\right)^2 + a(t)\frac{x(t+1)}{x(t)} + b(t) = 0$$

a dále pravou stranu přepíšeme jako součin dvou výrazů

$$\left(\frac{x(t+1)}{x(t)} - p(t)\right)\left(\frac{x(t+1)}{x(t)} - q(t)\right) = 0,$$

kde

$$p(t) = \frac{1}{2}\left(-a(t) + \sqrt{a(t)^2 - 4b(t)}\right) \quad \text{a} \quad q(t) = \frac{1}{2}\left(-a(t) - \sqrt{a(t)^2 - 4b(t)}\right).$$

Odtud vidíme, že řešení každé z lineárních homogenních diferenčních rovnic prvního řádu

$$x(t+1) = p(t)x(t) \quad \text{a} \quad x(t+1) = q(t)x(t)$$

je také řešením původní rovnice.

Kapitola 4

Autonomní rovnice

4.1 Autonomní rovnice prvního řádu

Autonomní diferenční rovnice prvního řádu je taková rovnice, v níž se index posloupnosti t nevyskytuje explicitně. Ve tvaru rekurentní formule ji můžeme zapsat jako

$$x(t+1) = f\big(x(t)\big), \tag{4.1}$$

kde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je taková funkce, že $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Dom} f$. Pomocí operátoru posunu $^\sigma$ můžeme rovnici (4.1) zapsat ještě stručněji ve tvaru

$$x^\sigma = f(x).$$

Autonomní rovnice tedy mohou modelovat proces, který se odehrává v neměnných podmínkách. U takových procesů nezáleží na tom jaký čas zvolíme za počátek, podrobněji:

Tvrzení 12. Je-li posloupnost $\tilde{x}$ řešením rovnice (4.1) s počáteční podmínkou $\tilde{x}(t_0) = \xi_0$, pak posloupnost x definovaná vztahem $x(t) = \tilde{x}(t+t_0)$ je řešením rovnice (4.1) s počáteční podmínkou $x(0) = \xi_0$.

Důkaz: Posloupnost x je řešením rovnice (4.1), neboť

$$x(t+1) = \tilde{x}(t+1+t_0) = \tilde{x}\big((t+t_0)+1\big) = f\big(\tilde{x}(t+t_0)\big) = f\big(x(t)\big),$$

a splňuje počáteční podmínku $x(0) = \tilde{x}(0+t_0) = \tilde{x}(t_0) = \xi_0$. □

Bez újmy na obecnosti tedy můžeme rovnici (4.1) uvažovat s počáteční podmínkou

$$x(0) = \xi_0; \tag{4.2}$$

přitom musí být $\xi_0 \in \operatorname{Dom} f$.

Úlohu (4.1), (4.2) můžeme řešit tak, že postupně počítáme jednotlivé členy posloupnosti řešení, tj.

$$\begin{aligned}
x(0) &= \xi_0,\\
x(1) &= f\big(x(0)\big) = f(\xi_0),\\
x(2) &= f\big(x(1)\big) = f\big(f(\xi_0)\big) = f^2(\xi_0),\\
&\vdots\\
x(t) &= f^t(\xi_0),\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Posloupnost x je tedy řešením úlohy (4.1), (4.2) právě tehdy, když $x(t) = f^t(\xi_0)$ pro každý index $t \in \mathbb{N}$. Z tohoto vyjádření je vidět, že z ohraničenosti funkce f plyne ohraničenost řešení rovnice (4.1). Podrobněji:

Tvrzení 13. Pokud existuje konstanta $h \in \mathbb{R}$, resp. $H \in \mathbb{R}$, taková, že $h \leq f(x)$, resp. $f(x) \leq H$, pro všechna $x \in \operatorname{Dom} f$, pak pro každé řešení x rovnice (4.1) a pro všechny indexy $t > 0$ platí $h \leq x(t)$, resp. $x(t) \leq H$.

O odhadu řešení úlohy (4.1), (4.2) z jiného pohledu vypovídá následující

Tvrzení 14. Jestliže existuje číslo $q > 0$ takové, že pro všechna $\xi \in \operatorname{Dom} f$ platí

$$f(\xi) \leq q\xi, \quad \text{resp. } f(\xi) \geq q\xi,$$

pak řešení úlohy (4.1), (4.2) splňuje nerovnost

$$x(t) \leq \xi_0 q^t, \quad \text{resp. } x(t) \geq \xi_0 q^t$$

pro každý index $t \in \mathbb{N}$.

Důkaz: Nechť $f(\xi) \leq q\xi$ pro každé $\xi \in \operatorname{Dom} f$ a x je řešení úlohy (4.1), (4.2). Připusťme, že existuje index t posloupnosti x takový, že $x(t) > \xi_0 q^t$. Položme

$$t_1 = \min\left\{t \in \mathbb{N} : x(t) > \xi_0 q^t\right\}.$$

Pak $x(t_1) > \xi_0 q^{t_1}$ a $x(t_1 - 1) \leq \xi_0 q^{t_1 - 1}$. Z předpokladu nyní dostaneme

$$\xi_0 q^{t_1} < x(t_1) = f\big(x(t_1 - 1)\big) \leq q x(t_1 - 1) \leq \xi_0 q^{t_1},$$

což je spor. □

4.1.1 Rovnovážné body a jejich stabilita

Definice 20. Množina bodů $\mathcal{T}(\xi_0) = \{f^n(\xi_0) : n \in \mathbb{N}\}$ se nazývá *(pozitivní) trajektorie bodu* ξ_0 nebo *orbita bodu* ξ_0.

Trajektorie bodu ξ_0 je množinou členů řešení úlohy (4.1), (4.2).

Definice 21. Řekneme, že bod $x^* \in \operatorname{Dom} f$ je *rovnovážný (stacionární) bod rovnice* (4.1), pokud je pevným bodem funkce f, tj. pokud platí $f(x^*) = x^*$.

Bod x^* je rovnovážným bodem rovnice (4.1) právě tehdy, když stacionární posloupnost $x \equiv x^*$ je řešením této rovnice. To nastává právě tehdy, když x^* je první souřadnicí průsečíku grafu funkce f a osy prvního a třetího kvadrantu, tj. přímky o rovnici $y = x$.

Trajektorie rovnovážného bodu x^* je jednoprvková, $\mathcal{T}(x^*) = \{x^*\}$.

Definice 22. Řekneme, že rovnovážný bod x^* rovnice (4.1) je *dosažitelný z bodu* $\xi \in \operatorname{Dom} f$, pokud existuje kladné číslo $r \in \mathbb{N}$ takové, že $f^r(\xi) = x^*$ a $f^{r-1}(\xi) \neq x^*$.

Je-li rovnovážný bod x^* dosažitelný z nějakého bodu $\xi \neq x^*$, pak funkce f není prostá.

Příklad: Uvažujme rovnici

$$x(t+1) = T\big(x(t)\big),$$

kde funkce T je definována vztahem

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Platí $T(0) = 0$, $T(\frac{2}{3}) = 2 - 2\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, takže 0 a $\frac{2}{3}$ jsou rovnovážné body uvažované rovnice. Dále

$T(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$,

$T(\frac{1}{6}) = \frac{1}{3}$, $T^2(\frac{1}{6}) = T(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$,

$T(\frac{1}{12}) = \frac{1}{6}$, $T^2(\frac{1}{12}) = \frac{1}{3}$, $T^3(\frac{1}{12}) = \frac{2}{3}$,

...

$$T\left(\frac{1}{3\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{3\cdot 2^{n-1}},\ T^2\left(\frac{1}{3\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{3\cdot 2^{n-2}},\ \dots,\ T^n\left(\frac{1}{3\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{3},\ T^{n+1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{2}{3}.$$

To znamená, že rovnovážný bod $\frac{2}{3}$ je dosažitelný z každého bodu tvaru $\dfrac{1}{3\cdot 2^n}$. ■

Definice 23. Nechť x^* je rovnovážný bod rovnice (4.1) a posloupnost x je řešením úlohy (4.1), (4.2). Řekneme, že rovnovážný bod x^* je

stabilní, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že z nerovnosti $|\xi_0 - x^*| < \delta$ plyne nerovnost $|x(t) - x^*| < \varepsilon$ pro všechna $t > 0$;

atrahující (přitažlivý), pokud existuje $\eta > 0$ takové, že z nerovnosti $|\xi_0 - x^*| < \eta$ plyne rovnost $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x^*$; je-li navíc $\eta = \infty$, řekneme, že x^* je *globálně atrahující;*

asymptoticky stabilní, pokud je stabilní a atrahující; je-li x^* navíc globálně atrahující, řekneme, že rovnovážný bod x^* je globálně asymptoticky stabilní;

nestabilní, pokud není stabilní;

repelentní (odpuzující), pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že z nerovnosti $\xi_0 \neq x^*$ plyne, že existuje index posloupnosti t_0 takový, že $|x(t) - x^*| \geq \varepsilon$ pro všechny indexy $t \geq t_0$.

Poznamenejme, že je-li rovnovážný bod x^* rovnice (4.1) repelentní, pak je nestabilní. Obrácené tvrzení neplatí. Od nestabilního rovnovážného bodu x^* se řešení x rovnice (4.1) v jistém čase (indexu) t_1 vzdálí, ale v nějakém dalším čase $t_2 > t_1$ se k němu může opět přiblížit.

Příklad: Lineární rovnice

$$x(t+1) = \alpha x(t) + \beta$$

s počáteční podmínkou $x(0) = \xi_0$ má podle výsledků uvedených v 3.1.2 řešení

$$x(t) = \left(\xi_0 + \frac{\beta}{\alpha - 1}\right)\alpha^t + \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Pro jediný rovnovážný bod $x^* = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$ uvažované rovnice platí:

- je-li $|\alpha| > 1$, pak x^* je repelentní;
- je-li $|\alpha| = 1$, pak x^* je stabilní ale nikoliv atrahující;
- je-li $|\alpha| < 1$, pak x^* je globálně asymptoticky stabilní; je-li přitom navíc $\alpha = 0$, pak x^* je dosažitelný z jakéhokoliv bodu $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq x^*$.

■

Budeme vyšetřovat chování řešení rovnice (4.1) v okolí rovnovážného bodu x^*. Odchylku řešení x od rovnovážného stavu x^* definujeme jako posloupnost y danou vztahem

$$y(t) = x(t) - x^*.$$

Z Taylorovy věty plyne, že ke každému indexu t existuje číslo $\vartheta(t)$ z intervalu $[0,1]$ takové, že

$$\begin{aligned} y(t+1) &= x(t+1) - x^* = f\big(x(t)\big) - f(x^*) = \\ &= f'(x^*)\big(x(t) - x^*\big) + \frac{1}{2} f''\Big(x^* + \vartheta(t)\big(x(t) - x^*\big)\Big)\big(x(t) - x^*\big)^2 = \\ &= f'(x^*)y(t) + \frac{1}{2} f''\big(x^* + \vartheta(t)y(t)\big)y(t)^2. \end{aligned}$$

Pokud je odchylka $y(t)$ „malá“, „výrazně menší než 1“, pak je její druhá mocnina $y(t)^2$ „ještě menší“, „skoro nulová“. Na základě této úvahy zanedbáme v poslední rovnost poslední sčítanec a dostaneme, že odchylka $y(t)$ od rovnovážného stavu přibližně splňuje lineární homogenní diferenční rovnici

$$y(t+1) = f'(x^*)y(t).$$

Pokud tedy $|f'(x^*)| < 1$, pak malá odchylka se bude s rostoucím indexem t zmenšovat, až vymizí. Lze tedy očekávat, že v případě $|f'(x^*)| < 1$ bude rovnovážný bod x^* asymptoticky stabilní. Pokud naopak $|f'(x^*)| > 1$, malá odchylka se bude s rostoucím t zvětšovat, až přestane být malou. V tomto případě lze očekávat, že rovnovážný bod x^* je nestabilní. Z této úvahy ovšem neplyne, že by v případě $|f'(x^*)| > 1$ byl rovnovážný bod x^* repelentní. Odchylka se může zvětšit a poté znovu zmenšit na hodnotu menší, než předem daná hranice ε.

Uvedené závěry jsou přesně vyjádřeny a rozšířeny i na případ $|f'(x^*)| = 1$ ve Větě 4.1.1. Pro její formulaci však potřebujeme zavést ještě jeden pojem.

Poznámka 10. *Schwarzova derivace* funkce f je definována vztahem

$$\mathrm{S}f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

Zejména v případě $f'(x) = -1$ platí

$$\mathrm{S}f(x) = -f'''(x) - \frac{3}{2}\big(f''(x)\big)^2.$$

Věta 20. *Nechť x^* je rovnovážný bod rovnice (4.1) a funkce f je spojitě diferencovatelná v bodě x^*. Pak platí:*

(i) Je-li $|f'(x^*)| > 1$, pak x^* je nestabilní.

(ii) Je-li $|f'(x^*)| < 1$, pak x^* je asymptoticky stabilní.

(iii) Je-li $f'(x^*) = 1$ a funkce f je v bodě x^* dvakrát spojitě diferencovatelná, pak:

(a) je-li $f''(x^*) \neq 0$, pak x^* je nestabilní.

(b) je-li $f''(x^*) = 0$ a funkce f je v bodě x^* třikrát spojitě diferencovatelná, pak

(α) je-li $f'''(x^*) > 0$, pak x^* je nestabilní,

(β) je-li $f'''(x^*) < 0$, pak x^* je asymptoticky stabilní.

(iv) Je-li $f'(x^*) = -1$ a funkce f je v bodě x^* třikrát spojitě diferencovatelná, pak

(a) je-li $\mathrm{S}f(x^*) > 0$, pak x^* je nestabilní,

(b) je-li $\mathrm{S}f(x^*) < 0$, pak x^* je asymptoticky stabilní.

Důkaz: Nechť $|f'(x^*)| > 1$. Položme $\gamma = \frac{1}{2}(|f'(x^*)| - 1) > 0$. Poněvadž funkce f' je spojitá v bodě x^*, je v tomto bodě spojitá i její absolutní hodnota a tedy existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\xi \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ je

$$\left|f'(\xi)\right| > \left|f'(x^*)\right| - \gamma.$$

Položme $q = \inf\{|f'(\xi)| : -\varepsilon < \xi - x^* < \varepsilon\}$. Pak

$$q \geq \left|f'(\xi)\right| - \gamma = \frac{1}{2}\left(\left|f'(x^*)\right| + 1\right) > 1.$$

Nechť nyní $0 < |\xi_0 - x^*| < \varepsilon$ a x je řešením úlohy (4.1), (4.2). Označme $y(t) = |x(t) - x^*|$ a připusťme, že $y(t) < \varepsilon$ pro všechna $t \in \mathbb{N}$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje $\vartheta = \vartheta(t) \in (0,1)$ takové, že

$$\begin{aligned} y(t+1) = |x(t+1) - x^*| = \left|f\big(x(t)\big) - f(x^*)\right| = \left|f'\big(x^* + \vartheta(x^* - x(t))\big)\big(x(t) - x^*\big)\right| = \\ = \left|f'\big(x^* + \vartheta(x^* - x(t))\big)\right| |x(t) - x^*| \geq q\,|x(t) - x^*| = qy(t). \end{aligned}$$

Podle Tvrzení 14 je $y(t) \geq q^t y(0) = q^t\,|\xi_0 - x^*|$, což znamená, že $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \infty$. Proto nemůže být $y(t) < \varepsilon$ pro všechny indexy $t \in \mathbb{N}$. Existuje tedy index t, že $|x(t) - x^*| \geq \varepsilon$, tj. rovnovážný bod x^* je nestabilní. Tvrzení (i) je dokázáno.

Při důkazu tvrzení (ii) postupujeme analogicky. V případě $|f'(x^*)| < 1$ klademe

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(1 - \left|f'(x^*)\right|\right) > 0$$

a pro ξ z okolí rovnovážného bodu x^* je

$$\left|f'(\xi)\right| < \left|f'(x^*)\right| + \gamma < 1.$$

Zbývající část důkazu snad dopíšu v dohledné době. □

Definice 24. Řekneme, že rovnovážný bod x^* rovnice (4.1) je *hyperbolický,* pokud

$$\left|f'(x^*)\right| \neq 1.$$

4.1.2 Cykly

Definice 25. Nechť $b \in \mathrm{Dom}\, f$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

Řekneme, že b je *p-periodický bod* rovnice (4.1), pokud $f^p(b) = b$. V takovém případě se trajektorie $\mathcal{T}(b) = \{b, f(b), f^2(b), \dots, f^{p-1}(b)\}$ nazývá *cyklus délky p* (*p-cyklus*).

Řekneme, že p-periodický bod je *dosažitelný z bodu b*, pokud existuje $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ takové, že $f^m(b)$ je p-periodický bod.

Bod $b \in \mathrm{Dom}\, f$ je p-periodickým bodem rovnice (4.1) právě tehdy, když je rovnovážným bodem rovnice

$$x(t+1) = f^p\big(x(t)\big). \tag{4.3}$$

Definice 26. Řekneme, že p-cyklus $\mathcal{T}(b)$ rovnice (4.1) je

stabilní, pokud b je stabilní rovnovážný bod rovnice (4.3);

asymptoticky stabilní, pokud b je asymptoticky stabilní rovnovážný bod rovnice (4.3);

nestabilní, pokud b je nestabilní rovnovážný bod rovnice (4.3).

Věta 21. *Nechť $\mathcal{T}(b) = \{b, f(b), f\big(f(b)\big), \dots, f^{k-1}(b)\} = \{x(0), x(1), x(2), \dots, x(k-1)\}$ je p-cyklus rovnice (4.1).*

Je-li $\big|f'\big(x(0)\big) f'\big(x(1)\big) f'\big(x(2)\big) \cdots f'\big(x(p-1)\big)\big| < 1$, pak je $\mathcal{T}(b)$ asymptoticky stabilní.

Je-li $\big|f'\big(x(0)\big) f'\big(x(1)\big) f'\big(x(2)\big) \cdots f'\big(x(p-1)\big)\big| > 1$, pak je $\mathcal{T}(b)$ nestabilní.

Důkaz: Podle věty o derivaci složené funkce platí

$$\begin{aligned}(f^p)'(b) &= f'\big(f^{p-1}(b)\big)\left(f^{p-1}\right)'(b) = f'\big(x(p-1)\big) f'\big(f^{p-2}(b)\big)\left(f^{p-2}\right)'(b) = \\ &= f'\big(x(p-1)\big) f'\big(x(p-2)\big) f'\big(f^{p-3}(b)\big)\left(f^{p-3}\right)'(b) = \cdots \\ &\cdots = f'\big(x(p-1)\big) f'\big(x(p-2)\big) f'\big(x(p-3)\big) \cdots f'\big(x(1)\big) f'\big(x(0)\big).\end{aligned}$$

Tvrzení jsou nyní důsledkem Věty 4.1.1. □

4.1.3 Autonomní rovnice závislé na parametru

Nechť nyní $f : \Omega \times A \to \mathbb{R}$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, je funkce dvou proměnných taková, že pro každé $\mu \in A$ a každé $x \in \Omega$ platí $f(x, \mu) \in \Omega$. Pro pevně zvolené $\mu \in A$ můžeme funkci f chápat jako funkci jedné proměnné x a μ považovat za parametr. Tuto funkci jedné proměnné budeme značit $f(\,\cdot\,, \mu)$.

Uvažujme rekurentní formuli

$$x(t+1) = f\big(x(t), \mu\big). \tag{4.4}$$

Řekneme, že při hodnotě parametru $\mu = \mu_0$ dochází k *bifurkaci,* pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro $\mu \in (\mu_0 - \varepsilon)$ je řešení rovnice (4.4) „kvalitativně odlišné“ od řešení této rovnice pro $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \varepsilon)$.

Příklad: Rovnice

$$x(t+1) = \mu x(t)\big(1 - x(t)\big)$$

má rovnovážný bod $x_1^* = 0$. Vyšetříme jeho stabilitu:

$$f(x) = \mu x(1-x), \quad f'(x) = \mu(1-2x), \quad f'(0) = \mu,$$

tedy $|f'(0)| < 1$ pro $\mu(-1,1)$ a $|f'(0)| > 1$ pro $\mu(1,3)$. Při hodnotě $\mu = 0$ tedy dochází k bifurkaci: rovnice má stabilní rovnovážný bod 0 pro hodnoty parametru μ v levém okolí μ_0 a má nestabilní rovnovážný bod 0 pro hodnoty parametru μ v pravém okolí μ_0. ∎

Konstrukce *bifurkačního diagramu:*

1. Specifikujeme hodnoty $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_M$ parametru μ. Zvolíme čas τ, který budeme považovat za dobu, během níž se „chování řešení ustálí“, a maximální čas T.
2. Položíme $i = 1$.
3. Položíme $\mu = \mu_i$ a zvolíme $\xi_0 \in \operatorname{Dom} f(\,\cdot\,,\mu)$.
4. Najdeme řešení rovnice (4.4) s počáteční podmínkou $x(0) = \xi_0$ pro indexy $t \le T$, tj. najdeme množinu $\{\xi_0 = x(0), x(1), x(2), \ldots, x(T)\}$.
5. Zakreslíme množinu bodů $\big\{\big(\mu_i, x(\tau+1)\big), \big(\mu_i, x(\tau+2)\big), \ldots, \big(\mu_i, x(T)\big)\big\}$.
6. Pokud $i < M$, zvětšíme i o jedna a vrátíme se k bodu 3.

4.2 Grafické řešení

Uvažujme nelineární diferenční rovnici (rekurentní formuli) prvního řádu ve tvaru

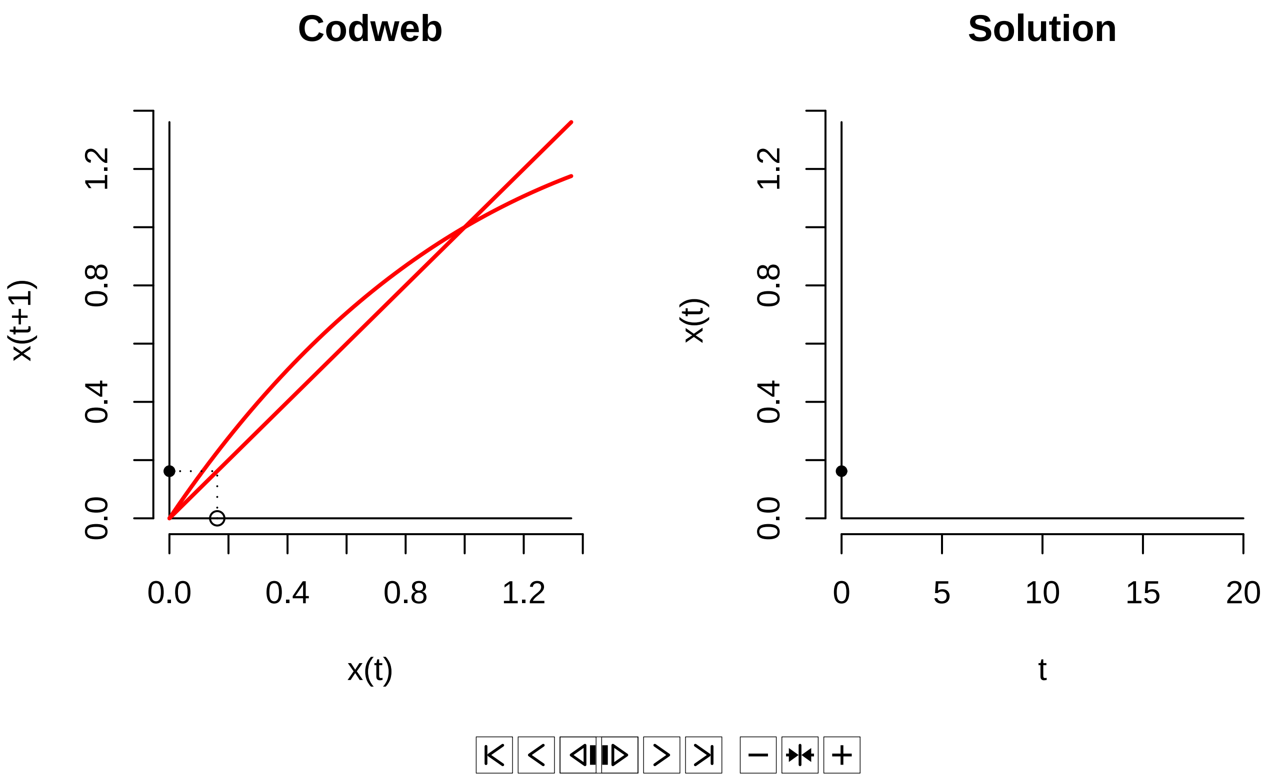
$$x(t+1) = f\big(x(t)\big)$$

s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$. Rovnici lze chápat také jako zápis zobrazení, které reálné hodnotě $x(t)$ přiřadí hodnotu $x(t+1)$, tj. jako reálnou funkci jedné reálné proměnné. Toto zobrazení lze znázornit v souřadné rovině — na vodorovnou osu nanášíme hodnoty $x(t)$, na svislou hodnoty $x(t+1)$. Nakreslíme tedy graf funkce f a pro danou hodnotu x_0 na něm najdeme hodnotu $x(1)$.

Stejným způsobem chceme najít hodnotu $x(2)$ pomocí hodnoty $x(1)$. Hodnotu $x(1)$ tedy přeneseme na vodorovnou osu; to můžeme udělat tak, že sestrojíme vodorovnou úsečku ve výšce $x(1)$ („výškou“ rozumím, že přímka incidentní s touto úsečkou prochází bodem $\big(0, x(1)\big)$ na svislé ose) a najdeme její průsečík s osou prvního kvadrantu, tedy bod $\big(x(1), x(1)\big)$. Nyní průsečík svislé přímky procházející tímto bodem a grafu funkce f má druhou souřadnici rovnu hledané hodnotě $x(2) = f\big(x(1)\big)$.

Při hledání hodnoty $x(2)$ řešení uvažované diferenční rovnice tedy sestrojíme vodorovnou úsečku s krajními body $\big(x_0, x(1)\big)$ a $\big(x(1), x(1)\big)$, poté úsečku s krajními body $\big(x(1), x(1)\big)$ a $\big(x(1), x(2)\big)$. Tímto způsobem můžeme pokračovat a postupně nacházet (konstruovat) jednotlivé členy posloupnosti, která řeší danou diferenční rovnici. V závislosti na tvaru grafu funkce f, úsečky konstruované popsaným způsobem vytváří „schody“, obr. 1, (odtud používaný název „stair step diagram“) nebo „pavučinu“ („codweb diagram“), obr. 2–4.

Pokud je funkce f konkávní, má nejvýše dva pevné body. To znamená, že existují nejvýše dvě hodnoty x^* takové, že $f(x^*) = x^*$. Tyto body jsou souřadnicemi průsečíků grafu funkce f a osy prvního kvadrantu. Na diagramech konstruovaných popsaným způsobem je dobře vidět, za jakých podmínek (tj. při jakém tvaru funkce f) se řešení uvažované diferenční rovnice od stacionárního bodu vzdaluje nebo se k němu přibližuje.

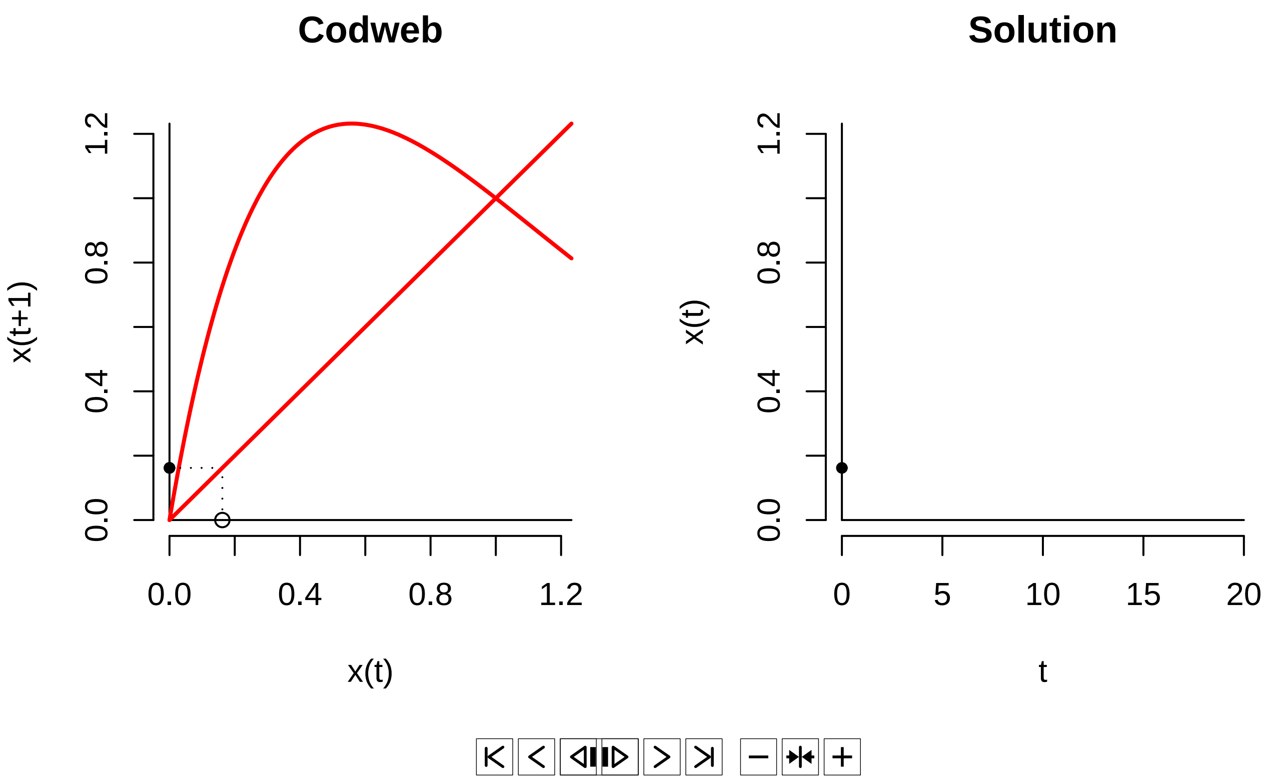


Obr. 1. Ilustrace řešení diferenční rovnice $x(t+1) = x(t)1{,}5^{1-x(t)}$. V levé části obrázku je „schodovitá procedura“ konstrukce řešení, v pravé části obrázku je výsledné řešení rovnice zobrazené jako hodnoty závislé na čase.

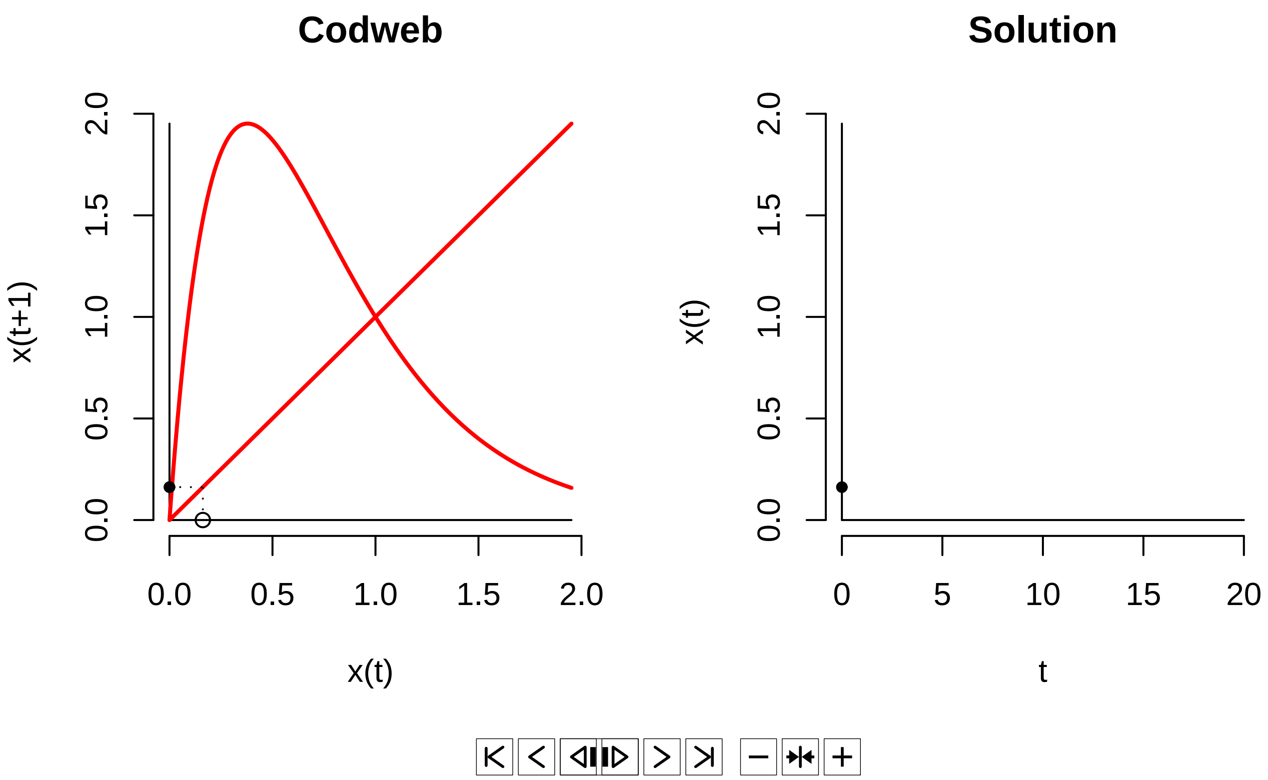
Procedura řešení diferenční rovnice je na obrázcích ilustrována pro funkci f danou předpisem

$$f(x) = xr^{1-x},$$

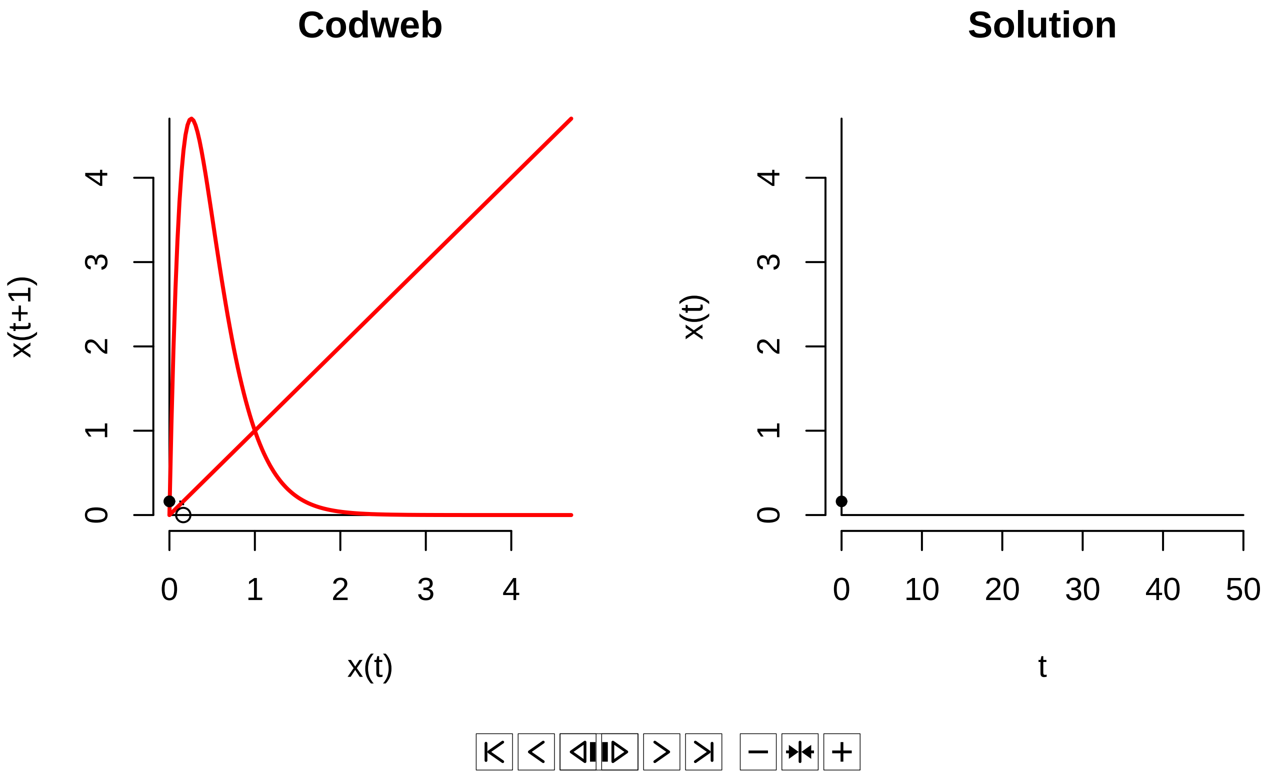
což je známý Rickerův model vývoje velikosti populace s nepřekrývajícími se generacemi, přičemž kapacitu prostředí považujeme za jednotkovou. V závislosti na velikosti růstového koeficientu r může řešení monotonně konvergovat k pevnému bodu $x^* = 1$ (na obr. 1 pro $r = 1{,}5$), konvergovat k němu s tlumenými oscilacemi (na obr. 2 pro $r = 6$), periodicky kolem něho kolísat (na obr. 3 pro $r = 14$ je perioda rovna 4), nebo kolem něho kolísat nepravidelně, chaoticky (na obr. 4 pro $r = 50$).



Obr. 2. Ilustrace řešení diferenční rovnice $x(t+1) = x(t)6^{1-x(t)}$. V levé části obrázku je „pavučinová procedura“ konstrukce řešení, v pravé části obrázku je výsledné řešení rovnice zobrazené jako hodnoty závislé na čase.



Obr. 3. Ilustrace řešení diferenční rovnice $x(t+1) = x(t)14^{1-x(t)}$. V levé části obrázku je „pavučinová procedura“ konstrukce řešení, v pravé části obrázku je výsledné řešení rovnice zobrazené jako hodnoty závislé na čase.



Obr. 4. Ilustrace řešení diferenční rovnice $x(t+1) = x(t)50^{1-x(t)}$. V levé části obrázku je „pavučinová procedura“ konstrukce řešení, v pravé části obrázku je výsledné řešení rovnice zobrazené jako hodnoty závislé na čase.

4.3 Autonomní systémy

Autonomní systém k diferenčních rovnic (rekurentních formulí) prvního řádu je systém, ve kterém se index posloupnosti t nevyskytuje explicitně. Jako systém rekurentních formulí ho můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= f_1\big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big), \\ x_2(t+1) &= f_2\big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big), \\ &\vdots \\ x_k(t+1) &= f_k\big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\big). \end{aligned} \tag{4.5}$$

O funkcích $f_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, předpokládáme, že všechny mají stejný definiční obor Ω, který zobrazují do sebe, tj. $\operatorname{Im} f_i \subseteq \operatorname{Dom} f_i = \Omega$. Společný definiční obor Ω funkcí f_i se nazývá *stavový* nebo *fázový prostor.* Při označení

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix},$$

můžeme systém (4.5) zapsat ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t)\big), \tag{4.6}$$

nebo stručněji

$$\boldsymbol{x}^\sigma = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Z tohoto vyjádření vidíme, že autonomní systém je bezprostředním zobecněním autonomní rovnice (4.1). Formálně stejně jako Tvrzení 12 můžeme ukázat, že nezáleží na volbě počátečního času t_0. Počáteční podmínku pro systém (4.5), resp. (4.6), budeme uvažovat ve tvaru

$$x_1(0) = \xi_{01},\ x_2(0) = \xi_{02},\ \dots,\ x_k(0) = \xi_{0k}, \tag{4.7}$$

resp.

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\xi_0}. \tag{4.8}$$

Řešení úlohy (4.6), (4.8) je podobně jako v oddílu 4.1 dáno výrazy

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}^t\big(\boldsymbol{\xi}_0)\big).$$

Pro autonomní systémy zavádíme pojmy analogické, jako pro autonomní rovnice:

Definice 27. Množina bodů $\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi_0}) = \{\boldsymbol{f}^n(\xi_0) : n \in \mathbb{N}\}$ se nazývá *(pozitivní) trajektorie bodu* $\boldsymbol{\xi_0}$ nebo *orbita bodu* $\boldsymbol{\xi_0}$ (vzhledem k rovnici (4.6)).

Nechť $S \subseteq \Omega$. Množina $\mathcal{T}(S) = \bigcup\limits_{\boldsymbol{x}\in S} \mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ se nazývá *trajektorie (orbita) množiny* S.

Definice 28. Řekneme, že bod $\boldsymbol{x}^* \in \operatorname{Dom} \boldsymbol{f}$ je *rovnovážný (stacionární) bod rovnice* (4.6), pokud je pevným bodem zobrazení $\boldsymbol{f}$, tj. pokud platí $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*$.

Trajektorie rovnovážného bodu $\boldsymbol{x}^*$ je jednoprvková, $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{x}^*\}$.

Definice 29. Řekneme, že rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ rovnice (4.1) je *dosažitelný z bodu* $\boldsymbol{\xi} \in \operatorname{Dom} \boldsymbol{f}$, pokud existuje kladné číslo $r \in \mathbb{N}$ takové, že $\boldsymbol{f}^r(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{x}^*$ a $\boldsymbol{f}^{r-1}(\boldsymbol{\xi}) \neq \boldsymbol{x}^*$.

Definice 30. Nechť $\boldsymbol{x}^*$ je rovnovážný bod rovnice (4.6) a vektorová posloupnost $\boldsymbol{x}$ je řešením úlohy (4.6), (4.8). Řekneme, že rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ je

stabilní, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že z nerovnosti $\|\boldsymbol{\xi_0} - \boldsymbol{x}^*\| < \delta$ plyne nerovnost $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*\| < \varepsilon$ pro všechna $t > 0$;

atrahující (přitažlivý), pokud existuje $\eta > 0$ takové, že z nerovnosti $\|\boldsymbol{\xi_0} - \boldsymbol{x}^*\| < \eta$ plyne rovnost $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*$; je-li navíc $\eta = \infty$, řekneme, že $\boldsymbol{x}^*$ je *globálně atrahující;*

asymptoticky stabilní, pokud je stabilní a atrahující; je-li $\boldsymbol{x}^*$ navíc globálně atrahující, řekneme, že rovnovážný bod $\boldsymbol{x}^*$ je *globálně asymptoticky stabilní;*

nestabilní, pokud není stabilní;

repelentní (odpuzující), pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že z nerovnosti $\boldsymbol{\xi_0} \neq \boldsymbol{x}^*$ plyne existence indexu t_0 posloupnosti $\boldsymbol{x}$ takového, že $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*\| \geq \varepsilon$ pro všechny indexy $t \geq t_0$.

Nechť $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ je rovnovážný bod rovnice (4.6). Jeho stabilitu budeme vyšetřovat pomocí vývoje odchylky $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*$. Podle Taylorovy věty pro libovolné $i \in \{1, 2, \dots k\}$ platí

$$\begin{aligned} y_i(t+1) = x_i(t+1) - x_i^* = f_i\big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\big) - f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = \\ = f_i\big(\boldsymbol{x}(t)\big) - f_i(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_j}\big(x_j(t) - x_j^*\big) + O\left(\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*\|^2\right) = \\ = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_j} y_j(t) + O\left(\|\boldsymbol{y}(t)\|^2\right). \end{aligned}$$

Při označení

$$\mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

přepíšeme předchozí rovnost ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(t+1) = \mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)\boldsymbol{y}(t) + O\left(\|\boldsymbol{y}(t)\|^2\right).$$

Z tohoto vyjádření usuzujeme, že odchylka od rovnovážného stavy $\boldsymbol{x}^*$ se „přibližně vyvíjí“ podle lineární homogenní rovnice

$$\boldsymbol{y}(t+1) = \mathsf{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)\boldsymbol{y}(t).$$

Příklad: Dvojrozměrný autonomní systém Uvažujme systém

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f\big(x(t), y(t)\big), \\ y(t+1) &= g\big(x(t), y(t)\big). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Souřadnice rovnovážného bodu (x^*, y^*) jsou řešením soustavy dvou rovnic

$$x = f(x, y), \quad y = g(x, y).$$

Nechť (x^*, y^*) je rovnovážným bodem rovnice (4.9) a

$$\mathsf{J}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}.$$

Ze závěru příkladu na str. 53–54 můžeme nyní usoudit, že platí tvrzení:

(i) Je-li $|\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*)| - 1 < \det \mathsf{J}(x^*, y^*) < 1$, pak rovnovážný bod (x^*, y^*) rovnice (4.9) je asymptoticky stabilní.

(ii) Je-li $|\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*)| - 1 > \det \mathsf{J}(x^*, y^*)$ nebo $\det \mathsf{J}(x^*, y^*) > 1$, pak rovnovážný bod (x^*, y^*) rovnice (4.9) je nestabilní.

(iii) Je-li (x^*, y^*) asymptoticky stabilní, $\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*) > 0$ a $1 < \det \mathsf{J}(x^*, y^*) < \frac{1}{4}\left(\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*)\right)^2$, pak obě složky řešení systému (4.9) konvergujícího k rovnovážnému bodu (x^*, y^*) jsou od jistého indexu počínaje ryze monotonní.

■

Rovnovážný bod $\boldsymbol{x^*}$ systému (4.6) je charakteristický tím, že jeho trajektorie je jednoprvková a obsahuje právě tento bod, $\mathcal{T}(\boldsymbol{x^*}) = \{\boldsymbol{x^*}\}$. Této vlastnosti využijeme k zavedení obecnějších pojmů.

Definice 31. Množina $S \subseteq \Omega$ se nazývá *invariantní množina rovnice* (4.6), pokud $\mathcal{T}(S) \subseteq S$.
Množina $S \subseteq \Omega$ se nazývá *minimální invariantní množina rovnice* (4.6), pokud pro každou vlastní podmnožinu Q invariantní množiny S platí, že Q není invariantní.

Množina $S \subseteq \Omega$ je maximální invariantní množinou rovnice (4.6) právě tehdy, když ke každé množině $Q \subseteq S$ takové, že $Q \subseteq S$ a $S \setminus Q \neq \emptyset$, a ke každému bodu $\boldsymbol{x} \in S$ existuje přirozené číslo n, že $\boldsymbol{f}^n(\boldsymbol{x}) \in S \setminus Q$. To je dále ekvivalentní s tím, že $S = \mathcal{T}(S)$.

Definice 32 (Typy invariantních množin)**.** Minimální invariantní množina $S \subseteq \Omega$ rovnice (4.6) se nazývá:

rovnovážný (stacionární) bod, pokud množina S je jednoprvkvá;

cyklus délky p (p-cyklus), pokud množina S je p-prvková (přitom p je kladné celé číslo);

invariantní smyčka, pokud množina S je uzavřená spojitá křivka v $\mathbb{R}^k$;

podivná, pokud není žádného z předchozích typů.

Poznamenejme, že *okolím množiny* A ve stavovém prostoru Ω rozumíme množinu V, která je otevřená v relativní topologii prostoru Ω a pro kterou platí $S \subseteq V$.

Definice 33. Minimální invariantní množina $S \subseteq \Omega$ rovnice (4.6) se nazývá:

stabilní, pokud ke každému okolí V množiny S existuje okolí U množiny S tak, že $\mathcal{T}(U) \subseteq V$;

atraktor, pokud existuje množina $U \subseteq \Omega$ taková, že

$$\lim_{t\to\infty} \left(\inf\left\{\left\|\boldsymbol{f}^t(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{x}\right\| : \boldsymbol{x} \in S, \boldsymbol{\xi} \in U\right\}\right) = 0,$$

množina U se v takovém případě nazývá *obor atraktoru* S; pokud vlastnost množiny U má celý stavový prostor Ω, atraktor S se nazývá *globální;*

repelor, pokud existuje $\varepsilon > 0$ a okolí U množiny S takové, že

$$\lim_{t\to\infty} \left(\inf\left\{\left\|\boldsymbol{f}^t(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{x}\right\| : \boldsymbol{x} \in S, \boldsymbol{\xi} \in U\right\}\right) > \varepsilon.$$

Kapitola 5

Aplikace

5.1 Růst populace

5.1.1 Fibonacciovi králíci a jejich modifikace

Leonardo Pisánský, známější jako Fibonacci, se narodil kolem roku 1170 v italské Pise a zemřel roku 1250. Vzdělání získal v severní Africe, kde jeho otec Guilielmo Bonacci působil jako diplomat. Svoje vědomosti sepsal do knihy *Liber abaci*. Toto dílo publikované roku 1202 má hlavní zásluhu na tom, že v Evropě byl přijat poziční systém zápisu čísel (pomocí indických symbolů, kterým dnes říkáme arabské číslice). Ve třetí části knihy Fibonacci zformuloval a řešil úlohu:

> Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.[1]

Tuto úlohu a její řešení lze považovat za jeden z prvních matematických modelů růstu populace. Budeme ji řešit s použitím současné symboliky.

Ze zadání úlohy plyne, že králíky můžeme rozdělit do dvou kategorií (tříd) — na ty, kteří jsou mladší než dva měsíce a tedy dosud „nerodí“ potomky, a na ty staré aspoň dva měsíce a tedy plodné. Označme $x(t)$, resp. $y(t)$, počet párů juvenilních (mladých, dosud neplodných), resp. dospělých (plodných), králíků v t-tém měsíci. Z poněkud vágního Fibonacciova popisu však není jasné, co přesně má vyjadřovat „počet párů králíků v t-tém měsíci“. Budeme si tedy představovat, že každý měsíc v určený den proběhne sčítání králíků, kterým získáme hodnoty $x(t)$ a $y(t)$. Nyní je potřeba vyjasnit, kdy se nové páry rodí. Jedna z možností je, že také k porodům dochází určitý den v měsíci. Abychom úvahy dále zjednodušili (a zreprodukovali Fibonacciův výsledek) budeme předpokládat, že králíci se rodí první den a jejich sčítání provádíme poslední den měsíce. Při sčítání mají tedy novorození králíci věk již jeden měsíc. Při sčítání následujícího měsíce mají tito králíci již věk dva měsíce a patří tedy mezi plodné. Poněvadž pár plodných králíků „zrodí“ (tj. zplodí a porodí) jeden pár mladých, bude počet párů mladých v t-tém měsíci stejný jako počet párů plodných v měsíci předchozím,

$$x(t) = y(t-1). \tag{5.1}$$

[1] Překlad E. Čecha. Citováno dle J. Bečvář a kol., Matematika ve středověké Evropě. Praha: Prometheus 2001, str. 277.

měsíc t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
počet juvenilních párů $x(t)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
počet plodných párů $y(t)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
celkový počet párů $z(t)$	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Tabulka 5.1: Řešení Fibonacciovy úlohy o králících za předpokladu, že k rození dochází na začátku měsíce, počty zjišťujeme na konci měsíce, tj. používáme model (5.3).

Králíci jsou na místě ohrazeném zdí. Tomu můžeme rozumět tak, že jsou chráněni před predátory a tedy neumírají, a také, že nemohou nikam utéci. Proto bude počet plodných v t-tém měsíci roven jejich počtu v předchozím měsíci zvětšenému o počet mladých, kteří se v předchozím měsíci narodili a během měsíce dospěli,

$$y(t) = y(t-1) + x(t-1). \tag{5.2}$$

Rovnice (5.1) a (5.2) můžeme považovat za model růstu populace králíků; její aktuální velikost počítáme z velikosti v minulosti. Při matematickém modelování nějakých procesů je ovšem obvyklé usuzovat na budoucnost z přítomnosti. V rovnicích (5.1) a (5.2) budeme psát $t+1$ místo t, rovnice tedy přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \qquad\quad y(t), \\ y(t+1) &= x(t) + y(t). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Měsíc, ve kterém „kdosi umístil pár králíků na určitém místě“, budeme považovat za nultý, onen „umístěný pár“ za dospělé. Máme tedy počáteční podmínku $x(0) = 0$, $y(0) = 1$. Odtud již můžeme postupně počítat počty $x(t)$ a $y(t)$ pro libovolné $t = 1, 2, 3, \ldots$ a z nich celkový počet párů $z(t) = x(t) + y(t)$. Výpočet je shrnut v tabulce 5.1. Výsledek 377 párů odpovídá výsledku v *Liber abaci.*[2]

Jiná z možností, jak zadání porozumět, je mírně realističtější představa, že králíci se rodí kdykoliv, ale opět je sčítáme v určitý den měsíce. Při sčítání tedy mohou mít novorozenci, tj. králíci narození od předchozího sčítání, věk z intervalu $[0, 1)$ a starší, ale dosud neplodní králíci věk z intervalu $[1, 2)$. Při této interpretaci rozdělíme třídu juvenilních párů na dvě a označíme $x_0(t)$ počet novorozených párů a $x_1(t)$ počet neplodných párů věku alespoň jeden měsíc, ale méně než dva měsíce. Poněvadž novorozenci jsou bezprostředními potomky plodných párů, mladí jsou ti, kteří se v předchozím měsíci narodili, a počet plodných je počtem plodných z předchozího měsíce zvětšeným o počet mladých, kteří dosáhli věku aspoň dva měsíce, dostaneme model

$$\begin{aligned} x_0(t+1) &= \qquad\qquad\quad y(t) \\ x_1(t+1) &= x_0(t) \\ y(t+1) &= \qquad\quad x_1(t) + y(t). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Při počátečních podmínkách $x_0(0) = 0$, $x_1(0) = 0$, $y(0) = 1$ a označení celkového počtu párů jako $z(t) = x_0(t) + x_1(t) + y(t)$, dostaneme počty králíků, jak je uvedeno v tabulce 5.2. Výsledný počet párů králíků za rok je při této interpretaci téměř třikrát menší, než původní Fibonacciův výsledek.

[2]To nemusí znamenat, že by si Fibonacci skutečně představoval rození na začátku měsíce a sčítání na jeho konci. Pravděpodobnější je, že si neuměl představit nulový věk a proto jeho novorozenci měli hned věk 1 a v následujícím měsíci tak byli dvouměsíční a tedy již plodní.

měsíc	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
počet novorozených párů	$x_0(t)$	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41
počet neplodných párů	$x_1(t)$	0	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28
počet plodných párů	$y(t)$	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60
celkový počet párů	$z(t)$	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129

Tabulka 5.2: Řešení Fibonacciovy úlohy o králících za předpokladu, že k rození dochází kdykoliv v průběhu měsíce a králíky sčítáme v pevně určený den měsíce, tj. používáme model (5.4).

Prvním obecným poučením tedy může být to, že sestavení modelu růstu populace je potřebné věnovat pozornost, přesně formulovat a zdůvodnit předpoklady, za kterých je model sestaven. Různé modely téhož procesu mohou totiž dávat různé výsledky.

Vraťme se ještě k Fibonnaciovu modelu (5.3). V rovnicích budeme psát $t+1$ místo t a rovnice sečteme. Dostaneme tak

$$x(t+2)+y(t+2)=x(t+1)+y(t+1)+y(t+1)=x(t+1)+y(t+1)+x(t)+y(t).$$

Označíme-li stejně jako v tabulce 5.3 symbolem $z(t)=x(t)+y(t)$ celkový počet králíků v t-tém měsíci, dostaneme pro vývoj tohoto počtu rekurentní formuli druhého řádu

$$z(t+2)=z(t+1)+z(t). \tag{5.5}$$

Pro její rozbor využijeme teorii lineárních homogenních diferenčních rovnic vyššího řádu s konstantními koeficienty 3.2.3. Charakteristická rovnice příslušná k diferenční rovnici (5.3)je tvaru

$$\lambda^2-\lambda-1=0$$

a její kořeny jsou

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{5}\right).$$

To znamená, že řešení rovnice (5.5) s počátečními podmínkami

$$z(0)=1,\quad z(1)=2$$

je rovno

$$z(t)=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t.$$

Toto řešení odpovídá původnímu Fibonacciovu řešení, které je uvedeno v tabulce 5.1.

Řešení rovnice (5.5) s počátečními podmínkami

$$z(0)=0,\quad z(1)=1$$

je rovno

$$z(t)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^t\left(1-\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^t\right).$$

Fibonacciův model je krásný matematicky, není ovšem příliš realistický biologicky. Králíci neumírají, dospívají v přesně určených časech, plodí přesně určený počet potomků v pravidelných intervalech. Fibonacci samozřejmě nepředstíral, že popisuje vývoj populace králíků, vytvořil jakousi umělou skutečnost — jeho králíci žijí a množí se na „místě ohraženém zdí“. Navíc svou úlohu o králících uzavírá větou: „tak je to možné dělat dál do nekonečného počtu měsíců“; tím se Fibonacci projevil jako skutečný matematik — uvažuje o nekonečnu a abstraktních nesmrtelných králících. Myšlenka modelovat pomocí rovnic typu (5.3) nebo (5.4) vývoj populace rozdělené na několik disjunktních tříd, přičemž čas plyne v diskrétních krocích, je však velmi plodná.

Pokusíme se modelovat vývoj populace za realističtějších předpokladů. Ponecháme původní představu času plynoucího v diskrétních krocích (nejedná se tedy o čas fyzikální) a zvolíme nějakou časovou jednotku (ve Fibonacciově úloze jí byl jeden měsíc). Populaci si budeme představovat jako tvořenou velkým počtem jedinců (v případě organismů rozmnožujících se pohlavně budeme za „jedince“ považovat páry nebo samice). Každý z jedinců může být jednoho z typů — *juvenilní* (mladý, neplodný) nebo *dospělý* (plodný). Jinak jsou jedinci nerozlišitelní.

V populaci probíhají tři procesy — rození (vznik nových jedinců), dospívání (maturace, přeměna juvenilního jedince na plodného) a umírání (nebo z jiného pohledu přežívání). Narození jedince, jeho přeměnu na plodného a jeho úmrtí považujeme za náhodné jevy. O umírání (přežívání) a dospívání budeme předpokládat, že se jedná o jevy stochasticky nezávislé. Označme

σ_1 ... pravděpodobnost, že juvenilní jedinec přežije jedno období,
σ_2 ... pravděpodobnost, že plodný jedinec přežije jedno období,
γ ... pravděpodobnost, že juvenilní jedinec během období dospěje,
φ ... střední počet potomků plodného jedince za jedno období.

O pravděpodobnostech přežití σ_1 a σ_2, pravděpodobnosti maturace γ a fertilitě φ budeme předpokládat

$$0 < \sigma_1 < 1, \quad 0 \le \sigma_2 < 1, \quad 0 < \gamma \le 1, \quad 0 < \varphi; \tag{5.6}$$

v reálně existující populaci totiž musí být možné, že se juvenilní jedinec dožije plodnosti ($\sigma_1 > 0$, $\gamma > 0$) a že se nějací noví jedinci rodí ($\varphi > 0$), přežití nikdy není jisté ($\sigma_1 < 1$, $\sigma_2 < 1$). Nevylučujeme možnost $\sigma_2 = 0$, tj. že jedinci po „produkci potomků“ (porodu, nakladení vajíček a podobně) hynou; taková populace se nazývá *semelparní*. Nevylučujeme však ani možnost $\sigma_2 > 0$, tj. že dospělí jedinci plodí po delší úsek života; taková populace se nazývá *iteroparní*. Jedinci mohou dospívat bezprostředně po narození, tj. v čase kratším, než je zvolené období. V období po narození tedy takový jedinec, pokud nezemře, jistě dospěje, $\gamma = 1$. Jedinci z populace mohou dospívat i s jistým zpožděním, $\gamma < 1$. Zhruba řečeno, při délce časového kroku jeden rok jsou jednoleté organismy semelparní s bezprostředním dospíváním, drobní ptáci a savci jsou iteroparní s bezprostředním dospíváním, lososi nebo cikády jsou semelparní se zpožděným dospíváním, velcí ptáci a savci (včetně člověka) jsou iteroparní se zpožděným dospíváním. Snažíme se tedy modelovat dosti obecnou populaci.

Označme dále $x(t)$, resp. $y(t)$, velikost (počet jedinců, populační hustotu, celkovou biomasu a podobně) části populace tvořené juvenilními, resp. plodnými, jedinci v t-tém časovém kroku. Juvenilní část populace je tvořena jedinci, kteří se za poslední období narodili, a jedinci, kteří již tuto třídu populace tvořili, přežili období a nedospěli v něm. Očekávaná velikost juvenilní části populace v následujícím období tedy bude

$$x(t+1) = \sigma_1(1-\gamma)x(t) + \varphi y(t). \tag{5.7}$$

Plodná část populace bude tvořena jedinci, kteří byli juvenilní, nezemřeli a dospěli, a jedinci, kteří již dospělí byli a přežili. Očekávaná velikost plodné části populace v následujícím období tedy bude

$$y(t+1) = \sigma_1\gamma x(t) + \sigma_2 y(t). \tag{5.8}$$

Poznamenejme ještě, že kdybychom připustili $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ a položili $\gamma = \varphi = 1$ (jedinci jistě přežívají, tj. neumírají, jistě během období dospějí a dospělí vždy vyprodukují právě jednoho potomka), dostaneme původní Fibonacciův model (5.3).

Opět označíme celkovou velikost populace v čase t symbolem $z(t)$, tj. $z(t) = x(t) + y(t)$. Z rovnic (5.7) a (5.8) postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
z(t+2) &= x(t+2) + y(t+2) = \\
&= \sigma_1(1-\gamma)x(t+1) + \varphi y(t+1) + \sigma_1\gamma x(t+1) + \sigma_2 y(t+1) = \\
&= \big(\sigma_1(1-\gamma) + \sigma_2\big)\big(x(t+1) + y(t+1)\big) + \\
&\quad + (\sigma_1\gamma - \sigma_2)x(t+1) + \big(\varphi - \sigma_1(1-\gamma)\big)y(t+1) = \\
&= \big(\sigma_1(1-\gamma) + \sigma_2\big)z(t+1) + \\
&\quad + (\sigma_1\gamma - \sigma_2)\big(\sigma_1(1-\gamma)x(t) + \varphi y(t)\big) + \big(\varphi - \sigma_1(1-\gamma)\big)\big(\sigma_1\gamma x(t) + \sigma_2 y(t)\big) = \\
&= \big(\sigma_1(1-\gamma) + \sigma_2\big)z(t+1) + \\
&\quad + \big(\sigma_1\gamma\varphi - \sigma_1\sigma_2(1-\gamma)\big)x(t) + \big(\sigma_1\gamma\varphi - \sigma_1\sigma_2(1-\gamma)\big)y(t) = \\
&= \big(\sigma_1(1-\gamma) + \sigma_2\big)z(t+1) + \big(\sigma_1\gamma\varphi - \sigma_1\sigma_2(1-\gamma)\big)z(t).
\end{aligned}$$

Celková velikost populace z je tedy řešením lineární diferenční rovnice druhého řádu

$$z(t+2) - \big(\sigma_1(1-\gamma) + \sigma_2\big)z(t+1) + \sigma_1\big(\sigma_2(1-\gamma) - \gamma\varphi\big)z(t) = 0. \tag{5.9}$$

K analýze této rovnice využijeme výsledky oddílu 3.2.3, zejména příkladu začínajícího na str. 42. Při označení používaném ve zmíněném příkladu je

$$b = -\big(\sigma_1(1-\gamma) + \sigma_2\big) < 0, \quad c = \sigma_1\big(\sigma_2(1-\gamma) - \gamma\varphi\big),$$

$$\begin{aligned}
b^2 - 4c &= \sigma_1^2(1-\gamma)^2 + 2\sigma_1\sigma_2(1-\gamma) + \sigma_2^2 - 4\sigma_1\sigma_2(1-\gamma) + 4\sigma_1\gamma\varphi = \\
&= \big(\sigma_1(1-\gamma) - \sigma_2\big)^2 + 4\sigma_1\gamma\varphi > 0,
\end{aligned}$$

neboť podle (5.6) je $\sigma_1\gamma\varphi > 0$. To znamená, že ryze dominantní charakteristický kořen je

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_1(1-\gamma) + \sigma_2 + \sqrt{\big(\sigma_1(1-\gamma) - \sigma_2\big)^2 + 4\sigma_1\gamma\varphi}}{2} > 0$$

a druhý charakteristický kořen je

$$\lambda_2 = \frac{\sigma_1(1-\gamma) + \sigma_2 - \sqrt{\big(\sigma_1(1-\gamma) - \sigma_2\big)^2 + 4\sigma_1\gamma\varphi}}{2} < 0.$$

Počáteční velikosti populace $\zeta_0 = z(0)$ a $\zeta_1 = z(1)$ musí být nezáporné a alespoň jedna z nich musí být nenulová (jinak by žádná populace nebyla). To znamená, že

$$\zeta_1 - \zeta_0\lambda_2 = \zeta_1 + \zeta_2|\lambda_2| > 0$$

a vývoj velikosti populace bude po jistém čase popsán geometrickou posloupností s kvocientem λ_1. Populace roste, pokud $c < -b - 1$, tj.

$$\sigma_1\big(\sigma_2(1-\gamma) - \gamma\varphi\big) < \sigma_1(1-\gamma) + \sigma_2 - 1,$$

po úpravě

$$\big(1 - \sigma_1(1-\gamma)\big)(1-\sigma_2) < \sigma_1\gamma\varphi.$$

Výraz na pravé straně této nerovnosti představuje střední hodnotu počtu novorozenců, kteří se dožijí dospělosti. Výraz na levé straně vyjadřuje pravděpodobnost toho, že juvenilní jedinec uhyne nebo dospěje a hned v prvním období uhyne, tedy pravděpodobnost, že novorozenec během svého života nezplodí potomka.

Pokud

$$\big(1 - \sigma_1(1-\gamma)\big)(1-\sigma_2) > \sigma_1\gamma\varphi,$$

populace vymře. V případě, že by nastala rovnost, populace se vyvine do konstantní velikosti. Ovšem pravděpodobnost, že by reálná populace měla takové parametry, které splní nějakou rovnost, je nulová.

5.1.2 Süßmilchova populace a Leslieho matice

Berlínský akademik Johann Peter Süßmilch publikoval v roce 1741 pojednání *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menslichen Geschlechts aus der Geburt, dem Tode un der Fortpflanzung deßelben* (Božský řád ve změnách lidských generací jejich rozením, smrtí a rozmnožováním), které je nyní považováno za první práci věnovanou demografii. Do jejího druhého vydání o dvacet let později zahrnul matematický model, který pro něj vypracoval Leonhard Euler. Model vychází z podobných zjednodušení jako Fibonacciův model růstu populace králíků, zahrnuje však vedle rození i umírání. Začíná v roce 0 s jedním lidským párem, přičemž muž i žena mají dvacet let. Euler dále předpokládal, že lidé umírají ve 40 letech, žení a vdávají se ve 20 letech a každý pár má šest dětí: dvě děti (chlapce a děvče) ve věku 22 let, další dva ve věku 24 let a poslední dvojici ve věku 24 let.

Vyjádříme Eulerův model formálně. Za jednotku času budeme považovat dva roky. Označíme $n = n(t)$ — počet novorozených párů v čase t,
$d = d(t)$ — počet úmrtí v časovém intervalu $(t-1, t)$
$x = x(t)$ — počet žijících párů v čase t.

Novorozenci v čase t jsou potomci párů 22-ti letých (tj. těch, kteří byli novorozenci před 22 lety, tedy v čase $t - 11$), párů 24 letých a párů 26 letých. Pro veličinu $n(t)$ tedy máme rekurentní vztah

$$n(t) = n(t-11) + n(t-12) + n(t-13).$$

Poněvadž lidé umírají ve 40 letech, je počet $d(t)$ zemřelých párů v čase t roven počtu novorozenců před 40 lety, tj.

$$d(t) = n(t-20). \tag{5.10}$$

V čase t žijí páry, které žily v předchozím období a nezemřely, a dále páry, které se v tomto čase narodily. Platí tedy

$$x(t) = x(t-1) - d(t) + n(t).$$

rok	čas t	novorozenci $n(t)$	úmrtí $d(t)$	žijící páry $x(t)$	rok	čas t	novorozenci $n(t)$	úmrtí $d(t)$	žijící páry $x(t)$
0	0	0	0	1	20	10	0	1	3
2	1	1	0	2	22	11	0	0	3
4	2	1	0	3	24	12	1	0	4
6	3	1	0	4	26	13	2	0	6
8	4	0	0	4	28	14	3	0	9
10	5	0	0	4	30	15	2	0	11
12	6	0	0	4	32	16	1	0	12
14	7	0	0	4	34	17	0	0	12
16	8	0	0	4	36	18	0	0	12
18	9	0	0	4	38	19	0	0	12

Tabulka 5.3: Počáteční velikosti populace modelované rovnicemi (5.11).

Těmito úvahami dostáváme model vývoje populace tvořený třemi posloupnostmi, které splňují lineární diferenční rovnice

$$\begin{aligned} n(t+13) &= n(t+2)+n(t+1)+n(t), \\ d(t+20) &= n(t), \\ x(t+20) &= x(t+19)+n(t)-d(t). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Vývoj modelované populace v prvních čtyřiceti letech, tj. v čase $t=0$ až $t=19$ je shrnut v Tabulce 5.1. V počátečním čase byl na Zemi pouze jeden pár dvacetiletých, tj. $x(0)=1$, $n(0)=0$. Po dvou letech k nim přibyli novorození chalapec a děvče, tj. $n(1)=1$, $x(1)=2$. Po dalších dvou letech přibyl další pár novorozenců, $n(2)=1$, $x(2)=3$ a po dalších dvou letech opět, $n(3)=1$, $x(3)=4$. Pak se čtrnáct let velikost populace neměnila, nikdo se nerodil ani neumíral. Za další dva roky, tj. 20 let od začátku prvotní pár zemřel, $d(10)=1$, $x(10)=3$ a za další dva roky přibyli první potomci prvního narozeného páru, $n(11)=1$, $x(11)=4$. Za další dva roky přibyli druzí dva potomci prvního narozeného páru a první dva potomci druhého narozeného páru, $n(12)=2$, $x(12)=6$. Tak můžeme v počítání pokračovat a dostaneme všechny počáteční podmínky pro rovnice (5.12), jak jsou uvedeny v Tabulce 5.3.

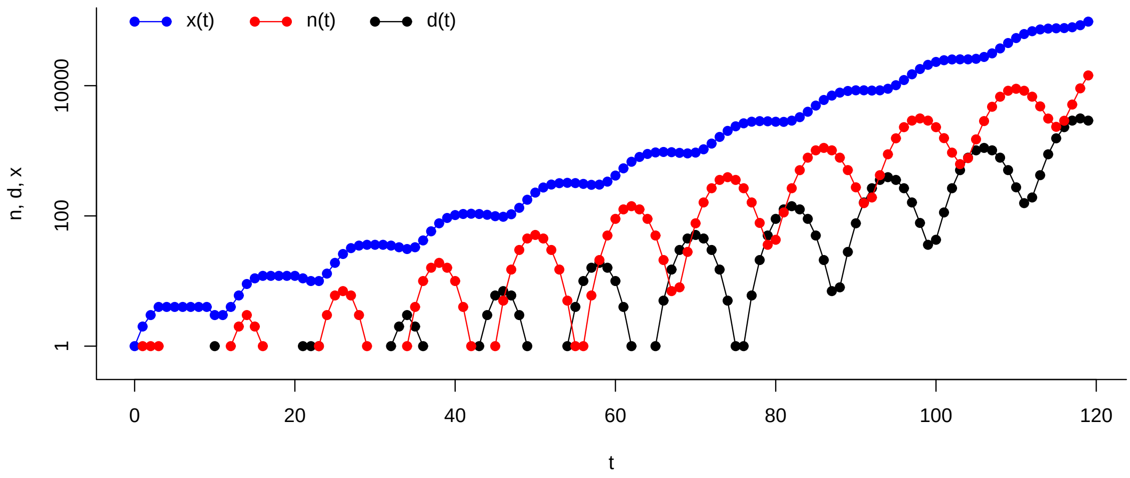
Rovnice (5.12) spolu s počátečními podmínkami umožňují rekurentně počítat velikost populace v libovolném čase. L. Euler tento výpočet provedl až do času $t=119$. Na Obrázku 5.1 jsou zobrazeny hodnoty posloupností n, d, x až do tohoto času. K problematice růstu populace se Euler později vrátil v rukopise *Sur la multiplication du genre humain* (O rozmnožování lidského rodu), který však za jeho života nevyšel. Tam odvodil (v 18. století, bez jakékoliv výpočetní techniky!), že velikost lidstva po dostatečně dlouhé době vývoje roste jako geometrická posloupnost s kvocientem $r \doteq 1{,}096$, což znamená, že jeho velikost se zdvojnásobí každých zhruba 15 let. Dále vztahem

$$\frac{n(t)}{d(t)} = \frac{n(t)}{n(t-20)} \simeq r^{20} \doteq 6{,}25$$

ukázal, že počet úmrtí je zhruba šestkrát menší, než počet narození.

Vzhledem k podmínce (5.10) můžeme původní Eulerův model (5.11) zredukovat na dvě lineární diferenční rovnice

$$\begin{aligned} n(t+13) &= n(t+2)+n(t+1)+n(t), \\ x(t+20) &= x(t+19)+n(t+20)-n(t). \end{aligned} \tag{5.12}$$



Obrázek 5.1: Model „rozmnožování lidského rodu“ (5.11). Na svislé ose je logaritmické měřítko. Symboly označují: $x(t)$ — počet žijících párů v čase t, tj. $2t$ let od počátku, $n(t)$ — počet narození v čase t, $d(t)$ — počet úmrtí v čase t.

První z těchto rovnic je lineární homogenní diferenční rovnice pro posloupnost n. Můžeme ji tedy vyřešit metodami uvedenými v 3.2.3 a nalezenou posloupnost n dosadit do druhé rovnice.

Charakteristická rovnice pro první z rovnic (5.12) je

$$\lambda^{13} - \lambda^2 - \lambda = 1$$

a má jeden reálný a 12 komplexně sdružených jednoduchých kořenů. Tyto kořeny jsou

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \doteq 1{,}096128990,\\
&\lambda_{2,3} \doteq 0{,}9404208930 \pm 0{,}5461788546\mathrm{i} \doteq 1{,}087521401(\cos 0{,}5261682144 \pm \mathrm{i}\sin 0{,}5261682144),\\
&\lambda_{4,5} \doteq 0{,}5258241166 \pm 0{,}9196097193\mathrm{i} \doteq 1{,}059326691(\cos 1{,}051377404 \pm \mathrm{i}\sin 1{,}051377404),\\
&\lambda_{6,7} = \pm\mathrm{i} = \cos\tfrac{\pi}{2} \pm \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{2},\\
&\lambda_{8,9} \doteq -0{,}9603461911 \pm 0{,}2570448492\mathrm{i} \doteq 0{,}9941513271(\cos 2{,}880064478 \pm \mathrm{i}\sin 2{,}880064478),\\
&\lambda_{10,11} \doteq -0{,}6729736856 \pm 0{,}6502474237\mathrm{i} \doteq 0{,}9357966091(\cos 2{,}373367756 \pm \mathrm{i}\sin 2{,}373367756),\\
&\lambda_{12,13} \doteq -0{,}3809896276 \pm 0{,}8056402296\mathrm{i} \doteq 0{,}8911841986(\cos 2{,}012532255 \pm \mathrm{i}\sin 2{,}012532255).
\end{aligned}$$

Reálný charakteristický kořen λ_1 je současně ryze dominantním charakteristickým kořenem. To znamená, že posloupnost n je asymptoticky ekvivalentní s posloupností $\bar{n}$ danou vztahem

$$\bar{n}(t) = \lambda_1^t \left(\lim_{\tau\to\infty} \frac{n(\tau)}{\lambda_1^\tau} \right).$$

Posloupnost $\bar{n}$ lze proto považovat za první aproximaci posloupnosti n. Označíme

$$\alpha = \lim_{\tau\to\infty} \frac{n(\tau)}{\lambda_1^\tau},$$

geometrickou posloupnost $\bar{n}$ jednoduše vyjádříme vztahem $\bar{n}(t) = \alpha\lambda_1^t$ a dosadíme ji do druhé z rovnic (5.12). Tak najdeme první aproximaci $\bar{x}$ posloupnosti x. Posloupnost $\bar{x}$ tedy má splňovat

$$\bar{x}(t+20) = \bar{x}(t+19) + \bar{n}(t+20) - \bar{n}(t) = \bar{x}(t+19) + \alpha\lambda_1^{t+20} - \alpha\lambda_1^t.$$

Budeme-li v této rovnosti psát $t-19$ místo t, dostaneme po jednoduché úpravě vyjádření diference posloupnosti $\bar{x}$ ve tvaru

$$\Delta\bar{x}(t) = \alpha\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda_1^{19}}\lambda_1^t.$$

Podle (1.6) a podle 1.4.2 tedy je

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 + \alpha\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda_1^{19}}\sum_{i=0}^{t-1}\lambda_1^i = \bar{x}_0 + \frac{\alpha}{\lambda_1^{19}}\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda_1-1}\left(\lambda_1^t-1\right).$$

Vyjádření posloupnosti $\bar{x}$ zjednodušíme tím, že označíme

$$A = \frac{\alpha}{\lambda_1^{19}}\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda_1-1}. \tag{5.13}$$

Dostáváme tak první aproximace řešení systému diferenčních rovnic (5.12) ve tvaru

$$\bar{n}(t) = \alpha\lambda_1^t, \qquad \bar{x}(t) = \bar{x}_0 + A\left(\lambda_1^t-1\right). \tag{5.14}$$

Tyto posloupnosti lze považovat za vyjádření časového trendu množství novorozenců a velikosti populace.

Povšimněme si nyní toho, že pro argument φ charakteristických kořenů, které mají druhý největší modul, tj. kořenů $\lambda_{2,3}$, platí

$$\varphi = \arg\lambda_{2,3} \doteq 0{,}5261682 \doteq \frac{2\pi}{11{,}9414}.$$

Odtud plyne, že „perioda kolísání" posloupnosti n kolem posloupnosti $\bar{n}$, tj. kolem jakési střední hodnoty počtu novorozených párů, je zhruba 12. Tento jev je také dobře pozorovatelný na Obrázku 5.1.

Označme pro stručnost $\kappa = |\lambda_2|$. Posloupnost $\tilde{n}$ daná vztahem

$$\tilde{n}(t) = \alpha\lambda_1^t + (\beta\cos t\varphi + \gamma\sin t\varphi)\kappa^t,$$

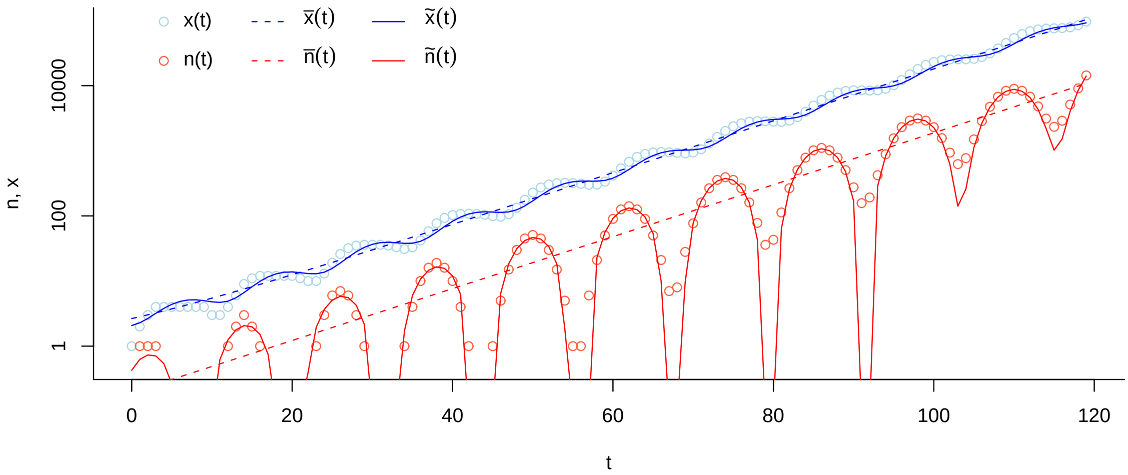
kde β,γ jsou vhodné konstanty určené počátečními podmínkami, „pro dostatečně velká t dostatečně přesně aproximuje posloupnost n".

Nyní budeme hledat „dostatečně dobrou" aproximaci $\tilde{x}$ posloupnosti x. Dostaneme ji tak, že ve druhé z rovnic (5.12) budeme psát $\tilde{x}$ místo x, $\tilde{n}$ místo n a $t-19$ místo t. Dostaneme

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t+1) = \tilde{x}(t) + \tilde{n}(t+1) - \tilde{n}(t-19) = \\ = \tilde{x}(t) + \alpha\lambda_1^{t+1} + \big(\beta\cos(t+1)\varphi + \gamma\sin(t+1)\varphi\big)\kappa^{t+1} - \\ - \alpha\lambda_1^{t-19} - \big(\beta\cos(t-19)\varphi + \gamma\sin(t-19)\varphi\big)\kappa^{t-19},\end{aligned}$$

tedy

$$\Delta\tilde{x}(t) = \alpha\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda^{19}}\lambda_1^t + (B\cos t\varphi + C\sin t\varphi)\kappa^t, \tag{5.15}$$



Obrázek 5.2: Upravený model „rozmnožování lidského rodu" (5.12). Na svislé ose je logaritmické měřítko. Symboly označují: $x(t)$, $n(t)$ — hodnoty počítané z rekurentních vztahů (5.12), $\bar{x}(t)$, $\bar{n}(t)$ — první aproximace řešení (5.14) využívající pouze dominantní charakteristický kořen λ_1 (trend), $\tilde{x}(t)$, $\tilde{n}(t)$ — druhá aproximace řešení (5.16) využívající charakteristické kořeny $\lambda_{2,3}$ s druhým největším modulem. Při výpočtu byly použity hodnoty $\alpha \doteq 0{,}194708013278096$, $\bar{x}_0 \doteq 2{,}6514514395602$, $\beta \doteq 0{,}231889637997667$, $\gamma \doteq 0{,}352845633763305$, $\tilde{x}_0 \doteq 2{,}07362768022334$.

kde jsme označili

$$B = \kappa(\beta\cos\varphi - \gamma\sin\varphi) - \kappa^{-19}(\beta\cos 19\varphi - \gamma\sin 19\varphi),$$

$$C = \kappa(\gamma\cos\varphi - \beta\sin\varphi) - \kappa^{-19}(\gamma\cos 19\varphi + \beta\sin 19\varphi).$$

Z rovnice (5.15) dostaneme aproximaci řešení druhé z rovnic (5.12) ve tvaru

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 + \sum_{i=0}^{t-1}\left(\alpha\frac{\lambda_1^{20}-1}{\lambda^{19}}\lambda_1^i + (B\cos i\varphi + C\sin i\varphi)\kappa^i\right).$$

Toto vyjádření můžeme upravit s využitím 1.4.2 a označení (5.13)

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 + A(\lambda_1^t - 1) + \\ + \frac{B\big(\kappa^{t+1}\cos(t-1)\varphi - \kappa\cos\varphi - \kappa^t\cos t\varphi + 1\big) + C\big(\kappa^{t+1}\sin(t-1)\varphi + \kappa\sin\varphi - \kappa^t\sin t\varphi\big)}{\kappa^2 - 2\kappa\cos\varphi + 1}. \tag{5.16}$$

Aproximace (5.14) a (5.16) řešení systému (5.12) jsou zobrazeny na Obrázku 5.2.

Model (5.12) popisuje vývoj velikosti populace, která je strukturovaná do dvou tříd — novorozenci a ostatní. Snadno ho ale můžeme modifikovat, aby popisoval populaci strukturovanou podrobněji; může nás zajímat počet školních dětí, počet rodičů pečujících o děti předškolního věku a podobně. V Eulerově zjednodušení takové rozčlenění populace závisí pouze na věku jedinců. Označme proto $x_i(t)$ počet párů věku i (tj. $2i$ let) v čase t, $i = 1, 2, \dots, 20$. Pak platí

$$x(t) = \sum_{i=1}^{20} x_i(t)$$

a

$$x_i(t) = n(t-i), \quad x_i(t+1) = \begin{cases} n(t), & i = 1, \\ x_{i-1}(t), & i > 1, \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, 20.$$

První z rovnic modelu (5.12) nyní můžeme přepsat ve tvaru

$$n(t+1) = n(t-10) + n(t-11) + n(t-12) = x_{10}(t) + x_{11}(t) + x_{12}(t).$$

Pro vývoj velikosti populace strukturované podle věku popsaným způsobem tak dostáváme model tvořený 21 lineárními diferenčními rovnicemi prvního řádu

$$\begin{aligned} n(t+1) &= x_{10}(t) + x_{11}(t) + x_{12}(t), \\ x_1(t+1) &= n(t), \\ x_i(t+1) &= x_{i-1}(t), \qquad\qquad i = 2, 3, \dots, 20. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Euler v podstatě předpokládal, že smrt je jistá ve čtyřiceti letech a v mladším věku je jisté přežití. Abychom model přiblížili realitě, nahradíme jistoty pravděpodobnostmi. Označme proto P_i pravděpodobnost, že jedinec věku i (tj. $2i$ let) přežije jedno dvouleté období (tj. dožije se věku $2i + 2$ let). Dále nechť nejvyšší možný věk je $2k$ let. Pak

$$x_1(t+1) = P_0 n(t), \qquad x_i(t+1) = P_{i-1} x_{i-1}(t), \; i = 2, 3, \dots, k.$$

Další Eulerův nerealistický předpoklad je ten, že dospělé páry mají v přesně daném věku právě jeden pár potomků. Tento předpoklad nahradíme realističtějším, že počet potomků páru věku i je náhodná veličina se střední hodnotou F_i. První z rovnic modelu (5.17) nyní můžeme nahradit rovnicí

$$n(t+1) = \sum_{i=1}^{k} F_i x_i(t);$$

hodnota posloupnosti $n(t)$ nyní již nevyjadřuje počet novorozenců v čase t, ale očekávanou hodnotu tohoto počtu. Celkem tak dostáváme model tvořený $k+1$ lineárními diferenčními rovnicemi

$$\begin{aligned} n(t+1) &= \sum_{i=1}^{k} F_i x_i(t), \\ x_1(t+1) &= P_0 n(t), \\ x_i(t+1) &= P_{i-1} x_{i-1}(t), \quad i = 2, 3, \dots, k. \end{aligned}$$

Tento model můžeme zapsat ve vektorovém tvaru

$$\begin{pmatrix} n \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-2} \\ x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} (t+1) = \begin{pmatrix} 0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{k-2} & F_{k-1} & F_k \\ P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-2} \\ x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} (t),$$

nebo stručně

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t), \tag{5.18}$$

kde jsme označili

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} n \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{k-1} & F_k \\ P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{k-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Maticový model(5.18) poprvé zformuloval Patrick Holt Leslie ve slavném článku *On the use of matrices in certain population mathematics,* který publikoval roku 1945 v časopise *Biometrika.* Matice A proto dostala název *Leslieho matice.*

5.1.3 Malthusovské modely

Předpokládejme, že známe okamžitou velikost populace a umíme spočítat počty jedinců uhynulých a „nově vzniklých“ (tj. novorozenců, embryí, klíčících semen a podobně). Budeme dále předpokládat, že nějací „noví“ jedinci skutečně „vznikají“ a jejich počet v nějakém zvoleném období je úměrný velikosti populace (např. že každý jedinec za období vyprodukuje určitý počet potomků a jedinec „nově vzniklý“ potomky ještě neprodukuje). Počet uhynulých jedinců budeme považovat za úměrný velikosti populace, což lze interpretovat tak, že existuje pro všechny „staré“ jedince (tj. nikoliv ty „nově vzniklé“) pravděpodobnost, že během uvažovaného období zemřou. Nebudeme vylučovat „nesmrtelnost“ (tj. populace se může vyvíjet v dokonale chráněném prostředí a její růst sledujeme jen po takové období, že jedinci nezestárnou; takovou populací byli např. Fibonacciovi králíci) ani možnost, že během období vymřou všichni „staří“ jedinci a zůstanou pouze ti „nově vzniklí“.

Zvolme tedy časovou jednotku a označme $x(t)$ velikost populace v čase t, $y(t)$ množství jedinců „vzniklých“ v časovém intervalu $(t, t+1]$, kteří v čase $t+1$ žijí, a $z(t)$ množství jedinců uhynulých v tomto časovém intervalu. Tyto stavové proměnné jsou vázány rovností

$$x(t+1) = x(t) + y(t) - z(t) \tag{5.19}$$

pro každé $t \in \mathbb{N}$. Přitom předpokládáme

(i) $y(t) = bx(t)$ pro každé $t \in \mathbb{N}$ a nějaké $b > 0$,

(ii) $z(t) = dx(t)$ pro každé $t \in \mathbb{N}$ a nějaké d, $0 \le d \le 1$;

parametr b, resp. d, se nazývá *koeficient porodnosti* (birth rate), resp. *úmrtnosti* (death rate).

S využitím uvedených předpokladů můžeme rovnost (5.19) přepsat ve formě

$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1+b-d)x(t)$$

a při označení

$$r = 1 + b - d \tag{5.20}$$

v jednoduchém tvaru

$$x(t+1) = rx(t). \tag{5.21}$$

Dostáváme tak model s jedinou stavovou proměnnou x a jediným parametrem r. Parametr r se nazývá *růstový koeficient* (growth rate) a podle předpokladu (ii) splňuje nerovnost

$$r = 1 + b - d \geq 1 + b - 1 = b > 0. \tag{5.22}$$

Model (5.21) je vlastně lineární homgenní diferenční rovnice prvního řádu, jednoduše řečeno, rekurentní formule pro geometrickou posloupnost s kvocientem r. Při známé (nebo dané) počáteční velikosti populace $x(0) = x_0$ můžeme tedy časově závislou velikost populace vyjádřit geometrickou posloupností

$$x(t) = r^t x(0). \tag{5.23}$$

Ze známých vlastností geometrické posloupnosti dostáváme první závěr:

Tvrzení 15. Pro populaci modelovanou rovností (5.19) s předpoklady (i) a (ii) platí

- je-li $r > 1$, tj. $b > d$, pak $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$, populace neomezeně roste;
- je-li $r = 1$, tj. $b = d$, pak $x(t) = x(0)$ pro všechna $t \in \mathbb{N}$, velikost populace je v průběhu času konstantní;
- je-li $r < 1$, tj. $b < d$, pak $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, populace vymírá.

Někdy může být užitečné v populaci rozlišovat novorozence a ostatní jedince. Množství „nově vzniklých“ jedinců totiž nemusí být pozorovatelné, např. klíčící semena jsou schovaná v zemi, březost samice nemusí být viditelná a podobně. Budeme proto uvažovat jinou veličinu — množství novorozenců, tj. živě narozených mláďat nebo čerstvě rašících rostlin. Označme tedy $n(t)$ množství novorozenců v čase t. Za novorozence budeme považovat jedince, kteří „vznikli“ v časovém intervalu $(t-1, t]$ a v čase t žijí. To znamená, že $n(t) = y(t-1)$. Rovnost (5.19) tedy můžeme přepsat na tvar

$$x(t+1) - n(t+1) = x(t) - z(t). \tag{5.24}$$

V čase $t > 0$ je podíl novorozenců v populaci podle (5.21) a předpokladu (i) roven

$$\frac{n(t)}{x(t)} = \frac{y(t-1)}{rx(t-1)} = \frac{b}{r}.$$

Vidíme, že tento podíl nezávisí na čase. Označíme

$$m = \frac{b}{r}. \tag{5.25}$$

Pak podle nerovnosti (5.22) a předpokladu (i) je $m > 0$. Z rovností (5.24) a (5.21) nyní můžeme vyjádřit

$$z(t) = x(t) - x(t+1) + n(t+1) = x(t) - x(t+1) + mx(t+1) = (1 - r + mr)x(t).$$

Porovnáním s předpokladem (ii) vidíme, že

$$d = 1 - r + mr. \tag{5.26}$$

Odtud a s dalším využitím předpokladu (ii) dostaneme

$$m = \frac{d+r-1}{r} \leq \frac{1+r-1}{r} = 1.$$

Pro množství $n(t)$ novorozenců v čase t tedy platí

$$n(t) = mx(t), \qquad 0 < m \leq 1. \tag{5.27}$$

Množství novorozenců $n(t)$, množství „nově vzniklých“ jedinců $y(t)$ a množství uhynulých jedinců $z(t)$ splňují stejnou diferenční rovnici (5.21) jako velikost populace $x(t)$:

$$n(t+1) = mx(t+1) = mrx(t) = rn(t), \qquad y(t+1) = bx(t+1) = brx(t) = ry(t),$$

$$z(t+1) = dx(t+1) = drx(t) = rz(t).$$

Z rovností (5.26), (5.27) a předpokladu (ii) dostaneme

$$r = \frac{1-d}{1-m} = \frac{1 - \dfrac{z(t)}{x(t)}}{1 - \dfrac{n(t)}{x(t)}} = \frac{x(t)-z(t)}{x(t)-n(t)}. \tag{5.28}$$

Známe-li tedy velikost populace a množství novorozenců v nějakém okamžiku a množství uhynulých jedinců v předchozím období, můžeme vypočítat růstový koeficient r; samozřejmě za předpokladu, že se populace vyvíjí podle uvažovaného modelu, tj. podle rovnice (5.21).

S využitím rovností (5.26), (5.27) a předpokladu (ii) můžeme také vyjádřit

$$\frac{z(t)}{n(t)} - r = \frac{z(t)}{x(t)}\frac{x(t)}{n(t)} - r = \frac{d}{m} - r = \frac{1-r+mr}{m} - r = \frac{1-r}{m},$$

takže

$$\frac{\dfrac{z(t)}{n(t)} - r}{1-r} = \frac{1}{m}. \tag{5.29}$$

Ze znalosti množství novorozenců, množství uhynulých jedinců a podílu novorozenců v populaci můžeme vypočítat růstový koeficient r.

V matrikách bývají vedeny záznamy o narozeních a úmrtích (ve farních matrikách bývaly záznamy o křtech a pohřbech). Z těchto údajů lze určit počet novorozenců $n(t)$ a počet zemřelých $z(t)$ v nějakém roce. Z odhadu podílu novorozenců v populaci (například spočítáním kočárků a lidí na náměstí odpoledne) lze pomocí rovnice (5.29) spočítat přírůstek obyvatelstva r a z této hodnoty a z rovnice (5.28) odhadnout počet obyvatel.

Údaje o úmrtích bývají většinou doplněny i o věk zemřelých. Budeme tedy předpokládat, že známe věk uhynulých jedinců, Označme $z_k(t)$ množství jedinců, kteří uhynuli v časovém intervalu $(t, t+1]$ a jejich věk byl k; přesněji, kteří v časovém intervalu $(t, t+1)$ věku k dosáhli a poté v tomto intervalu uhynuli, nebo kteří by v tomto intervalu věku k dosáhli, pokud by neuhynuli. Předpokládejme, že existuje nějaký maximální možný věk ω, tj. takový věk, že není možné aby jakýkoliv jedinec byl starší než ω.[3]

[3]Tím samozřejmě není řečeno, že je možné se věku ω dožít; v případě lidské populace můžeme bezpečně volit např. $\omega = 1000$ let, neboť nejstarší člověk Metuzalém zemřel ve věku 969 let.

Označme dále $x_k(t)$ množství jedinců věku k v čase t, přesněji: množství jedinců, kteří v časovém intervalu $(t-1,t]$ dosáhli věku k. Proměnné $x(t)$, $n(t)$, $z(t)$, $x_k(t)$, $z_k(t)$, $k=1,2,\ldots,\omega$ jsou vázány vztahy

$$z(t)=\sum_{i=1}^{\omega} z_i(t), \quad x(t)=n(t)+\sum_{i=1}^{\omega} x_i(t), \quad z_k(t)=x_k(t)-x_{k+1}(t+1) \tag{5.30}$$

pro každý čas $t\in\mathbb{N}$.

Nechť q_k, $k=1,2,\ldots,\omega$ označuje pravděpodobnost, že se jedinec dožije věku k, tj. pravděpodobnost, že jedinec, který byl v čase $t-k$ novorozencem, žije v čase t,

$$q_k=\frac{x_k(t)}{n(t-k)}. \tag{5.31}$$

Položme ještě $q_0=1$. Z rovností (5.30), (5.31), (5.27) a (5.23) vyjádříme

$$\begin{aligned} z_k(t)&=x_k(t)-x_{k+1}(t+1)=q_kn(t-k)-q_{k+1}n\big(t+1-(k+1)\big)=\\ &=q_kmx(t-k)-q_{k+1}mx(t-k)=(q_k-q_{k+1})mr^tx(0)\frac{1}{r^k}=(q_k-q_{k+1})\frac{n(t)}{r^k}. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme rekurentní formuli pro výpočet pravděpodobností q_k dožití věku k při známých počtech úmrtí ve věku k, počtu novorozenců $n(t)$ a růstovém koeficientu r:

$$q_{k+1}=q_k-\frac{r^kz_k(t)}{n(t)}, \quad q_0=1.$$

Z ní také plyne, že

$$1=q_0\geq q_1\geq q_2\geq\cdots\geq q_{\omega-1}\geq q_\omega. \tag{5.32}$$

Tyto nerovnosti vyjadřují samozřejmou skutečnost, že jedinec, který se dožil věku $k+1$, se určitě dožil také věku k.

Z rovností (5.23), (5.30), (5.31), (5.27) a (5.32) dostaneme

$$\begin{aligned} r^tx(0)=x(t)=n(t)+\sum_{i=1}^{\omega}x_i(t)=n(t)+\sum_{i=1}^{\omega}q_in(t-i)=mx(t)+\sum_{i=1}^{\omega}q_imx(t-i)=\\ =m\left(r^tx(0)+\sum_{i=1}^{\omega}q_ir^{t-i}x(0)\right)=mr^tx(0)\left(1+\sum_{i=1}^{\omega}\frac{q_i}{r^i}\right). \end{aligned}$$

Z této rovnosti plyne *Eulerova rovnice*

$$1=m\left(1+\sum_{i=1}^{\omega}\frac{q_i}{r^i}\right), \tag{5.33}$$

kterou lze považovat mj. za rovnici pro výpočet růstového koeficientu r ze znalosti pravděpodobností $q_1,q_2,\ldots,q_\omega$ a podílu novorozenců v populaci.

Do Eulerovy rovnice (5.33) dosadíme parametr m vypočítaný z rovnosti (5.29),

$$1+\sum_{i=1}^{\omega}\frac{q_i}{r^i}=\frac{\dfrac{z(t)}{n(t)}-r}{1-r}$$

a tím odvodíme vztah

$$\sum_{i=1}^{\omega} \frac{q_i}{r^i} = \frac{\dfrac{z(t)}{n(t)} - 1}{1 - r}. \tag{5.34}$$

Z Eulerovy rovnice (5.33) a rovnosti (5.27) dostaneme

$$x(t) = n(t)\left(1 + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{q_i}{r^i}\right). \tag{5.35}$$

Relace (5.34) a (5.35) lze považovat za rovnice pro výpočet růstového koeficientu r při známých pravděpodobnostech dožití $q_1, q_2, \ldots, q_\omega$, počtu novorozenců $n(t)$ a k tomu velikosti populace $x(t)$ nebo počtu úmrtí $z(t)$.

Podle rovností (5.31), (5.27) a (5.23) platí

$$x_k(t) = q_k n(t-k) = q_k m x(t-k) = q_k m r^{t-k} x(0) = m x(t) \frac{q_k}{r^k},$$

takže podle Eulerovy rovnice (5.33) je podíl jedinců věku k v populaci roven

$$\frac{x_k(t)}{x(t)} = m \frac{q_k}{r^k} = \frac{\dfrac{q_k}{r^k}}{1 + \sum\limits_{i=1}^{\omega} \dfrac{q_i}{r^i}}, \tag{5.36}$$

jmenovatel posledního zlomku nezávisí na věku k. To znamená, že v populaci, jejíž velikost se vyvíjí podle rovnice (5.21), je stálé zastoupení jednotlivých věkových tříd, populace má *věkově stabilizovanou strukturu.* Označíme-li

$$x_0(t) = n(t) \tag{5.37}$$

vidíme porovnáním s Eulerovou rovnicí (5.33), že rovnost (5.36) platí také pro $k = 0$.

Podle nerovností (5.32) pro $r \geq 1$ platí

$$1 = \frac{q_0}{r^0} \geq \frac{q_1}{r^1} \geq \frac{q_2}{r^2} \geq \frac{q_3}{r^3} \geq \cdots \geq \frac{q_\omega}{r^\omega}.$$

Odtud, z rovnosti (5.36) a z Tvrzení 15 dostáváme:

Tvrzení 16. Nechť se velikost populace vyvíjí podle modelu (5.21). Pokud populace nevymírá ($r \geq 1$), pak třída novorozenců $n(t)$ je v populaci zastoupena nejpočetněji ze všech věkových tříd. Pokud třída novorozenců není zastoupena nejpočetněji, pak populace vymírá ($r < 1$).

Podle třetí z rovností (5.30) a rovností (5.21), (5.36) platí

$$1 - \frac{z_k(t)}{x_k(t)} = \frac{x_k(t) - \big(x_k(t) = x_{k+1}(t+1)\big)}{x_k(t)} = \frac{x_{k+1}(t+1)}{x_k(t)} =$$
$$= \frac{x_{k+1}(t+1)}{x(t+1)} \frac{r x(t)}{x_k(t)} = \frac{q_{k+1}}{r^{k+1}} \frac{r r^k}{q_k} = \frac{q_{k+1}}{q_k}.$$

Výraz nalevo vyjadřuje klasickou pravděpodobnost, že jedinec, který měl v čase t věk k neuhyne během časového intervalu $(t, t+1]$. Výraz napravo vyjadřuje podmíněnou pravděpodobnost, že se jedinec dožije věku $k+1$ za podmínky, že se dožil věku k. Rovnost tedy není nijak překvapivá, ukazuje však, že dosud odvozené závěry z modelu neodporují realitě. Zmíněnou pravděpodobnost, tj. pravděpodobnost, že jedinec věku k přežije časový interval jednotkové délky, označíme symbolem p_k, tedy

$$p_k = \frac{q_{k+1}}{q_k} = 1 - \frac{z_k(t)}{x_k(t)} = \frac{x_{k+1}(t+1)}{x_k(t)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \omega - 1. \tag{5.38}$$

Pokud známe pravděpodobnosti přežití p_k, můžeme vypočítat pravděpodobnosti q_k dožití věku k podle rekurentní formule

$$q_{k+1} = p_k q_k, \quad q_0 = 1.$$

Tuto formuli lze považovat za lineární homogenní diferenční rovnici a tedy

$$q_k = \prod_{i=0}^{k-1} p_i.$$

Tento výsledek říká, že přežití každého z intervalů $(t+i, t+i+1]$, $i = 0, 1, \dots, k$ jedincem, který byl v čase t novorozený, jsou stochasticky nezávislé jevy.

Třetí vyjádření pravděpodobností p_k v rovnostech (5.38) můžeme také zapsat jako diferenční rovnice pro množství jedinců věku k:

$$x_{k+1}(t+1) = p_k x_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \omega - 1. \tag{5.39}$$

K tomuto systému diferenčních rovnic přidáme ještě rovnici pro množství novorozenců, tj. pro složku $x_0(t) = n(t)$. Z předpokladu (i) dostaneme

$$x_0(t+1) = n(t+1) = y(t) = bx(t), \tag{5.40}$$

takže s využitím druhé z rovností (5.30) je

$$x_0(t+1) = b \sum_{i=0}^{\omega} x_i(t). \tag{5.41}$$

Aby se velikost populace vyvíjela podle rovnice (5.21), musí být počáteční podmínky systému rovnice (5.41), (5.39) podle rovností (5.36) ve tvaru

$$x_0(0) = mx(0), \qquad x_k(0) = \frac{q_k}{r^k} \frac{x(0)}{1 + \sum\limits_{i=1}^{\omega} \frac{q_i}{r^i}}, \quad k = 1, 2, \dots, \omega. \tag{5.42}$$

Předpokládejme navíc, že jsme schopni rozlišit věk jedinců, kteří ve zvoleném časovém období „dali vznik novým jedincům“. V matrice obyvatelstva by například mohly být záznamy o věku matky. Budeme předpokládat v analogii k předpokladu (i), že množství „nově vzniklých“ jedinců, kteří jsou potomky jsou potomky jedinců věku k, je úměrné množství jedinců tohoto věku. Navíc jedinci z žádné věkové třídy nemohou „vyprodukovat“ méně než žádného jedince. Předpokládáme tedy

(iii) $y_k(t) = b_k x_k(t)$, $b_k \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots, \omega$, $\sum\limits_{i=0}^{\omega} b_i > 0$.

Proměnné y a y_k, $k = 0, 1, \ldots, \omega$ jsou samozřejmě vázány rovností

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\omega} y_i(t) \tag{5.43}$$

pro všechna $t \in \mathbb{N}$. Parametry b_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, \omega$ nazýváme *věkově specifické koeficienty porodnosti* nebo *míra reprodukce ve věku k*. Jedinci bývají plodní až od jistého minimálního věku, řekněme $\alpha > 0$ (menarche), poté plodnost až do jistého věku roste, v nějakém věku plné dospělosti, řekněme $\beta > \alpha$, dosáhne svého maxima, od tohoto věku již neroste nebo dokonce klesá a v nějakém věku γ (menopauza), $\beta \leq \gamma \leq \omega$, může vymizet. Pro věkově specifické plodnosti tedy může platit

$$0 = b_0 = \cdots = b_{\alpha-1} < b_\alpha \leq b_{\alpha+1} \leq \cdots b_{\beta-1} \leq b_\beta \geq b_{\beta+1} \geq \cdots \geq b_{\gamma-1} \geq b_\gamma = 0;$$

nerovnosti mezi věkově specifickými koeficienty porodnosti nejsou z hlediska matematického modelu důležité, mohou mít význam pouze při jeho interpretacích.

Z předpokladů (i), (iii) a rovnosti (5.36) dostaneme

$$bx(t) = y(t) = \sum_{i=0}^{\omega} y_i(t) = \sum_{i=0}^{\omega} b_i x_i(t) = m \sum_{i=0}^{\omega} b_i \frac{q_i}{r^i} x(t).$$

Odtud a z vyjádření (5.25) plyne

$$r = \frac{b}{m} = \sum_{i=0}^{\omega} b_i \frac{q_i}{r^i}.$$

Růstový koeficient r je tedy řešením rovnice

$$\sum_{i=0}^{\omega} b_i q_i r^{-1-i} = 1. \tag{5.44}$$

Poněvadž se velikost populace vyvíjí podle diferenční rovnice (5.21), musí mít rovnice (5.44) kladné řešení. To znamená, že

$$\text{existuje } k \in \{0, 1, 2, \ldots, \omega\} \text{ že } b_k q_k > 0; \tag{5.45}$$

v opačném případě by totiž levá strana rovnice (5.44) byla nulová pro každé $r > 0$. Označme nyní $f(r)$ levou stranu rovnice (5.44). Z podmínky (5.45) plyne, že platí

$$\lim_{r \to 0+} f(r) = \infty, \quad \lim_{r \to \infty} f(r) = 0, \quad f'(r) = -\sum_{i=0}^{\omega} (i+1) b_i q_i r^{-2-i} < 0 \text{ pro } r > 0.$$

Funkce f je tedy na intervalu $(0, \infty)$ ryze klesající, klesá od nekonečna k nule. To znamená, že rovnice (5.44) má řešení jediné. Pokud $f(1) > 1$, je toto řešení větší než 1, pokud $f(1) < 1$, je toto řešení menší než 1. Z tohoto pozorování a z tvrzení 15 plyne

Tvrzení 17. Nechť se velikost populace $x(t)$ vyvíjí podle modelu (5.21), tj. jsou splněny relace (5.19),(5.24), (5.30), (5.31) a předpoklady (i), (ii). Nechť navíc platí předpoklad (iii) a jsou splněny podmínky (5.43) a (5.45). Pak

- je-li $\sum_{i=0}^{\omega} b_i q_i > 1$, pak populace neomezeně roste;
- je-li $\sum_{i=0}^{\omega} b_i q_i = 1$, pak velikost populace je v průběhu času konstantní;
- je-li $\sum_{i=0}^{\omega} b_i q_i < 1$, pak populace vymírá.