SEZNAM TEMATICKÝCH OKRUHŮ

1. Číselné obory
2. Základy matematické logiky
3. Lineární rovnice a nerovnice s jednou neznámou
4. Kvadratické rovnice a vztahy mezi jejími kořeny a koeficienty
5. Kvadratické nerovnice
6. Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou
7. Rovnice a nerovnice s odmocninami
8. Soustavy lineárních rovnic
9. Rovnice, nerovnice a soustavy rovnic s parametry
10. Úhly v kružnicích a mocnosti bodů
11. Podobnost trojúhelníků, Euklidovy věty
12. Konstrukční úlohy řešené užitím množin bodů dané vlastnosti
13. Užití shodných zobrazení v konstrukčních úlohách
14. Stejnolehlost a její užití v konstrukčních úlohách
15. Funkce s lineárními výrazy v absolutní hodnotě
16. Kvadratické funkce
17. Lineární lomená funkce
18. Mocniny s racionálním exponentem
19. Exponenciální funkce, rovnice a nerovnice
20. Logaritmická funkce, rovnice a nerovnice
21. Goniometrické funkce a jejich základní vlastnosti
22. Vzorce pro goniometrické funkce a jejich užití
23. Sinová věta a její užití
24. Kosinová věta
25. Goniometrické rovnice a nerovnice
26. Polohové vlastnosti přímek a rovin v prostoru
27. Odchylky přímek a rovin prostoru
28. Vzdálenosti v prostoru
29. Základní kombinatorické pojmy a vzorce
30. Binomická věta
31. Rovnice přímky v rovině a prostoru
32. Rovnice roviny v prostoru, vzájemná poloha přímek a rovin
33. Kuželosečky a jejich rovnice
34. Aritmetika komplexních čísel
35. Řešení rovnic v komplexním oboru
36. Aritmetické posloupnosti a jejich užití
37. Geometrické posloupnosti a jejich užití
38. Geometrické řady

1. **Číselné obory**
   Vyložte vývoj představ o číslech u žáků od první třídy po maturitu. Popište zapisování reálných čísel v desítkové soustavě (včetně rozdílů v zápisech racionálních a iracionálních čísel) a znázorňování čísel na číselné ose. Uveďte základní vlastnosti aritmetických operací s čísly, uspořádání čísel pomocí nerovností, dělitelnosti v oboru celých čísel a kritéria dělitelnosti vybranými přirozenými čísly. Objasněte zavedení mocnin čísel s přirozeným a celým exponentem.

2. **Základy matematické logiky**
   Objasněte význam pojmů výrok a výroková forma, kvantifikátorů a spojování výroků pomocí logických spojek a pravidla pro jejich negace. Uveďte základní typy matematických důkazů a vysvětlete pojmy opačná a obměněná implikace.

3. **Lineární rovnice a nerovnice s jednou neznámou**
   Vyložte postup ekvivalentních úprav vedoucí k řešení lineárních rovnic a nerovnic. Řešte příklady takových rovnic a nerovnic se zlomky, s závorkami a s neznámou ve jmenovateli. Řešte rovněž soustavy lineárních nerovnic plynoucí z diskuse o možných znaménkách činitelů nerovnic v součinovém a podílovém tvaru. Pro případ více činitelů vysvětlete metodu nulových bodů.
   Příklady:
   A. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\left(x-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{3}{2}-x\right)+\frac{8}{3}\leq 0.$
   B. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\frac{(3-2x)(2x+1)}{x^2(x^2-1)}\geq 0.$

4. **Kvadratické rovnice a vztahy mezi jejími kořeny a koeficienty**
   Řešte pamětným rozkladem kvadratické rovnice s malými celočíselnými kořeny. Odvoďte vzorec pro řešení obecné rovnice metodou doplnění na čtverec. Objasněte význam diskriminantu. Uveďte a dokažte Viétovy vzorce.
   Příklady:
   A. Ukažte, že jeden kořen rovnice $(1+\sqrt{3})x^2-2(2+\sqrt{3})x+$ $+\,3+\sqrt{3}=0$ je přirozené číslo, zatímco druhý kořen je druhá odmocnina z přirozeného čísla.
   B. Určete celé číslo k tak, aby rovnice $4x^2+(8k-4)x+4k+13=0$ měla v oboru reálných čísel dva různé kořeny a součet jejich druhých mocnin byl co nejmenší.

C. Určete, pro která čísla $p \in \mathbb{R}$ má rovnice $2 \cdot (x-p)^2 = 14 - px$ v oboru reálných čísel takové dva různé kořeny, že trojnásobek jejich součtu je menší než dvojnásobek jejich součinu.
D. Pro která $p \in \mathbb{R}$ má rovnice $x^2 - 8x - 5 = p^2 - 9p$ v oboru $\mathbb{R}$ dva různé kořeny, které lze označit x_1 a x_2 v takovém pořadí, že platí $x_2 + 2x_1 = 11$?

5. Kvadratické nerovnice

Řešte kvadratické nerovnice s kladným diskriminantem metodou rozkladu na kořenové činitele, vysvětlete případ záporného diskriminantu (metodou doplnění na čtverec). Podejte geometrickou interpretaci řešení úvahou o grafu kvadratické funkce.
Příklady:
A. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\dfrac{10}{x-2} \leq \dfrac{21}{x} - \dfrac{4}{x-3}$.
B. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $|x^2 + 2px + 1| > 1$, kde p je reálný parametr, pro který platí a) $p > \sqrt{2}$, b) $p \in (0,1)$.
C. V oboru $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnici $3|x| + \sqrt{7 \cdot (12 + 4x - x^2)} <$ $< 2(x+6)$.

6. Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

Uveďte základní vlastnosti absolutní hodnoty včetně významu $|a-b|$ na číselné ose. Na příkladech vyložte základní přístupy k řešení rovnic a nerovnic s absolutní hodnotou (diskuse o znaménkách výrazů v absolutní hodnotě, metoda nulových bodů, odstranění absolutní hodnoty umocněním).
Příklady:
A. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\left|\dfrac{x+4}{x-1}\right| \geq x + 4$.
B. Nerovnici $||x-1| - 4| < 3$ řešte v oboru $\mathbb{R}$.
C. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\dfrac{8-x}{12 - |x^2 - 6x - 4|} \leq 1$.

7. Rovnice a nerovnice s odmocninami

Popište základní metody řešení rovnic a nerovnic, objasněte problematiku jejich umocňování. Na příkladech nerovnic s odmocninami zdůrazněte, proč je před umocněním obou stran nezbytná diskuse o jejich znaménkách. Podtrhněte význam předběžného určování definičních oborů řešených rovnic a nerovnic. Uveďte též rovnice na užití substituce a násobení sdruženým výrazem (skripta MU: Herman, Kučera, Šimša, Metody řešení matematických úloh I, kap. 1, § 6).
Příklady:
A. Stanovte definiční obor a pak vyřešte rovnici $\sqrt{x\sqrt{x} - x} +$ $+ \sqrt{x} = x$.

B. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $2x + \sqrt{3 - 2x - x^2} \geq 0$.
C. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\sqrt{x + \sqrt{x+2}} \leq 2$.
D. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\dfrac{x + 3\left(1 - \sqrt{2x-2}\right)}{2 - \sqrt{x-1}} < 0$.
E. Stanovte definiční obor nerovnice $2 \cdot \sqrt{21 + 4x - x^2} + |5x - - 1| \geq 3x + 17$ a pak ji vyřešte. Pomůcka: $17x^2 + 60x + 43 = = (x+1)(17x+43)$.
F. Nalezněte definiční obor nerovnice $\sqrt{4x - \sqrt{19 - 3x}} \leq 3\sqrt{2}$ a pak ji vyřešte. Početní pomůcka: platí rozklad $16x^2 - 141x + + 305 = (x-5)(16x-61)$.

8. Soustavy lineárních rovnic

Soustavy dvou a tří lineárních rovnic řešte dosazovací a slučovací metodou, popište příklady, kdy řešení takové soustavy neexistuje nebo není jediné.
Příklady:
A. Zásoba mouky ve skladu jídelny se vyčerpá o 4 dny dříve, jestliže se počet strávníků zvýší o 40, vystačí však o 6 dní déle, sníží-li se počet strávníků o 40. Kolik je původně strávníků v jídelně?
B. Najděte všechna řešení soustavy rovnic:

$$\frac{x+1}{x+y} + \frac{y}{x-y} = \frac{3}{2}, \quad 2 \cdot \frac{x+1}{x+y} - 3 \cdot \frac{y}{x-y} = \frac{1}{2}.$$

9. Rovnice, nerovnice a soustavy rovnic s parametry

Na příkladech lineárních a kvadratických rovnic a nerovnic provádějte diskusi o tvaru a počtu řešení v závislosti na parametrech.
Příklady:
A. V oboru $\mathbb{R}$ řešte
a) rovnici $(x+p)/(x-q) + (x+q)/(x-p) = 2$ s parametry $p, q \in \mathbb{R}$,
b) nerovnici $(x-3p)/(x-p-3) < 0$ s parametrem $p \in \mathbb{R}$.
B. V oboru $\mathbb{R}$ řešte soustavu dvou rovnic s neznámými x, y a parametrem $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\dfrac{x}{a} + ay = a, \quad ax + \dfrac{y}{a} = 1$.
C. Zjistěte, pro které hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ má rovnice

$$p(x^2+1) - 3 = x \cdot (x - 2p)$$

v oboru $\mathbb{R}$ dva různé kořeny. Pro které z nalezených hodnot p jsou oba tyto kořeny a) kladné, b) záporné, c) opačných znamének?

D. V oboru $\mathbb{R}$ uvažujme rovnici $2x + \sqrt{4x^2 + 4x - p} = p$ s neznámou x, kde p je parametr, $p \in \mathbb{R}$. Nejprve určete, jak (v závislosti na p) vypadá definiční obor dané rovnice. Rovnici pak vyřešte důsledkovými úpravami a proveďte zkoušku. Diskusi o tvaru a počtu řešení zapište závěrem do tabulky.

10. Úhly v kružnicích a mocnosti bodů

Odvoďte vlastnosti středových, obvodových, úsekových úhlů a využijte je při konstrukcích trojúhelníků. Zformulujte a dokažte tvrzení o mocnosti bodu ke kružnici.

Příklady:

A. V libovolném ostroúhlém trojúhelníku ABC označme S střed kružnice opsané a P patu výšky z vrcholu A. Dokažte, že úhly BAP a SAC jsou shodné.

B. Kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ se protínají v bodech K a L. Vyberme libovolně body $X \in k_1$ a $Y \in k_2$ tak, aby bod K byl vnitřním bodem úsečky XY. Zdůvodněte, proč velikost úhlu XLY nezávisí na výběru bodů X a Y.

C. V jedné z polorovin s danou hraniční přímkou p je dána kružnice k a na ní dva různé body P a Q. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby jeho základna AB ležela na přímce p, vrchol C na kružnici k, bod P na rameni AC a bod Q na rameni BC.

D. V rovině jsou dány body S, K, L neležící na jedné přímce. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby bod S byl středem strany AB, bod K vnitřním bodem strany AC a bod L vnitřním bodem strany BC. Proveďte rozbor, popište konstrukci a zdůvodněte, proč má úloha nejvýše jedno řešení.

E. V rovině je dána kružnice $k(S, 5\,\mathrm{cm})$ a bod M tak, že $|SM| = 7\,\mathrm{cm}$. Bodem M prochází přímka p, která na kružnici k vytíná tětivu AB délky $2\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte $|MA|$ a $|MB|$.

11. Podobnost trojúhelníků, Euklidovy věty

Vyslovte věty, podle kterých rozhodujeme o podobnosti trojúhelníků. Pak využijte podobné pravoúhlé trojúhelníky k důkazům Euklidových vět o odvěsně a o výšce.

Příklady:

A. Je dána kružnice $k(S, r)$, její průměr AB a tečna t v bodě A. Vypočtěte poloměr R té kružnice $k_1(O, R)$, která prochází bodem B, dotýká se přímky t a má střed O na kružnici k. Návod: Užijte jednu z Euklidových vět k trojúhelníku ABO.

B. Pro libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC odvoďte vzorce, podle kterých se vypočtou délky odvěsny b a přepony c pomocí délky odvěsny a a výšky v_c.

12. Konstrukční úlohy řešené užitím množin bodů dané vlastnosti

Popište situace, kdy přímky a kružnice (případně jejich části) tvoří množiny bodů významných vlastností. Tyto množiny pak využijte při řešení konstrukčních úloh.

Příklady:

A. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána délka a strany BC, velikost v_b výšky BB_0 a délka t_c těžnice CC_1. Určete počet řešení v případě, kdy pro dané údaje platí nerovnosti $t_c > \frac{1}{2}a > \frac{1}{2}v_b$.

B. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li jeho vnitřní úhel β, jeho výšku v_a a rozdíl $d = b - a > 0$ délek jeho stran a a b. Návod: Při rozboru úlohy prodlužte stranu BC za vrchol B.

C. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a + b$, c a v_a. Zapište rozbor, popis konstrukce a proveďte diskusi o počtu řešení.

D. Uvnitř pásu omezeného danými dvěma rovnoběžkami a, b jsou dány dva různé body M a N. Sestrojte rovnoběžky m a n tak, aby $M \in m$, $N \in n$ a aby průsečíky přímek a, b, m, n tvořily vrcholy kosočtverce. Zapište rozbor, popis konstrukce a proveďte diskusi o počtu řešení.

E. V rovině je dán pravý úhel XVY, jeho vnitřní bod Q a úsečka délky d. Sestrojte bod A na rameni VX a bod B na rameni VY tak, aby úsečka AB měla danou délku d a aby úhel AQB byl pravý. (Návod: Uvažte, v jakých geometrických místech leží střed S úsečky AB.)

13. Užití shodných zobrazení v konstrukčních úlohách

Popište obecné vlastnosti shodných zobrazení roviny a poté specifické vlastnosti jednotlivých druhů: osové a středové souměrnosti, otočení a posunutí. Vyberte několik typických úloh, při jejichž řešení se využívají jednotlivé druhy shodných zobrazení.

Příklady:

A. Ve vnější oblasti kružnice k se středem S je dán bod A. Sestrojte přímku p, která prochází bodem A a protíná kružnici k v některých bodech X a Y tak, že trojúhelník SXY má největší možný obsah. (Řešte pomocí otočení.)

B. V rovině je dána přímka p a mimo ni bod C. Kromě toho je dána úsečka délky d a úhel velikosti ω. Popište konstrukci trojúhelníku ABC, jehož vnitřní úhel u vrcholu C má velikost ω a jehož strana AB leží na přímce p a má délku d.

C. Jsou dány úsečky délek a, b, c. Umístěte je v rovině tak, aby všechny tři měly společný krajní bod a aby jejich druhé krajní body ležely v jedné přímce tak, že krajní bod úsečky délky b je stejně vzdálen od krajních bodů úseček délek a a c. Zapište rozbor, popis konstrukce a diskusi o počtu řešení této *nepolohové* úlohy.

D. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC, znáte-li délku c jeho přepony AB a velikost t_a jeho těžnice AA_1.

E. Dané dvě kružnice k_1 a k_2 se protínají ve dvou bodech. Jeden z nich je označen písmenem T. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby bod T byl jeho těžištěm, vrchol A ležel na kružnici k_1 a vrchol B na kružnici k_2.

F. Uvnitř kružnice k o středu S jsou dány další dva body K a L, přitom úhel KSL není pravý. Sestrojte dvě shodné a navzájem kolmé tětivy kružnice k tak, aby na první z nich ležel bod K a na druhé bod L. Proveďte rozbor, popište konstrukci a zdůvodněte, kolik má zadaná úloha řešení.

G. V rovině je dán ostrý úhel XVY a jeho dva různé vnitřní body C a T. Sestrojte trojúhelník ABC s těžištěm T tak, aby vrchol A ležel na rameni VX a vrchol B na rameni VY. Zapište rozbor úlohy a přesný postup konstrukce.

H. V rovině je dána kružnice k a dva body A, B ležící vně kruhu omezeného kružnicí k. Sestrojte její průměr KL tak, aby krajní bod K měl od bodu A stejnou vzdálenost jako krajní bod L od bodu B. Zapište rozbor úlohy, postup konstrukce a určete, kolik může mít úloha řešení, přitom pro každý možný počet řešení načrtněte obrázek příslušné situace. (Návod: využijte vhodnou středovou souměrnost.)

I. V rovině je dána kružnice $k(S,r)$, přímka p a úsečka délky $a \leq 2r$. Sestrojte čtverec $ABCD$ o straně délky a, jehož vrcholy A, B leží na kružnici k a vrchol C na přímce p. Zapište rozbor, přesný postup konstrukce a načrtněte situaci, kdy má úloha největší možný počet řešení.

14. Stejnolehlost a její užití v konstrukčních úlohách

Objasněte definici stejnolehlosti jako zobrazení a uveďte její vlastnosti. Příklady doložte využití stejnolehlosti při řešení konstrukčních úloh.

Příklady:

A. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(S, 3\,\mathrm{cm})$, $k_2(S, 2\,\mathrm{cm})$ a bod A vzdálený $4\,\mathrm{cm}$ od středu S obou kružnic. Popište konstrukci rovnostranného trojúhelníku ABC, jehož vrchol B leží na kružnici k_1, zatímco střed K jeho strany AC leží na kružnici k_2. Návod: Při rozboru úlohy uvažte, kde leží střed L strany AB hledaného trojúhelníku ABC, kromě stejnolehlosti využijte i otočení.

B. Na kružnici k jsou dány tři různé body A, B, C. Na tom oblouku BC kružnice k, na kterém neleží bod A, sestrojte bod X tak, aby tětiva BC rozdělila tětivu AX na dvě úsečky stejné délky. Proveďte rozbor, popište konstrukci a zjistěte možné počty řešení (doložte je náčrtky příslušných situací). (Místo stejnolehlosti lze využít i Thaletovu kružnici.)

C. V daném čtverci $ABCD$ označme E střed strany CD. Sestrojte rovnostranný trojúhelník KLM tak, aby bod K ležel na straně AB, bod L na straně BC, bod M na straně AD a aby úsečky KM a BE byly rovnoběžné.

D. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a vnitřní bod K jeho strany AB. Na straně AC sestrojte bod X a na straně BC bod Y tak, aby lomená čára $CXYK$ byla složena ze tří shodných úseček.

15. Funkce s lineárními výrazy v absolutní hodnotě

Na konkrétních příkladech vysvětlete postup, jak sestrojit graf funkce s lineárními výrazy v absolutní hodnotě. Ukažte, jak lze těchto příkladů využít při procvičování základních charakteristik funkcí (omezenost, monotónnost, extrémy).

Příklady:

A. Sestrojte graf funkce $f\colon y = |1-x| - \frac{1}{2}|x+2|$ a s jeho pomocí určete počet řešení rovnice $|1-x| - \frac{1}{2}|x+2| = p$ v závislosti na reálném parametru p.

16. Kvadratické funkce

Vyložte, jak metodou doplnění na čtverec získat údaje potřebné k sestrojení grafu kvadratické funkce a popište její vlastnosti (obor hodnot, extrém, monotónnost). Uveďte příklad užití grafu kvadratické funkce při řešení rovnic nebo nerovnic. Výklad doplňte ukázkami grafů „kvadratických“ funkcí, jejichž vzorce obsahují členy v absolutní hodnotě.

Příklady:

Grafy funkcí $f_1\colon y = x^2 + 4x + q$ a $f_2\colon y = ax^2 + 2bx + 5$ jsou paraboly souměrně sdružené podle osy s rovnicí $y = 1$. Určete neznámá čísla a, b, q.

17. Lineární lomená funkce

Definujte funkci nepřímá úměrnost a popište její graf a vlastnosti. Pak zaveďte vzorcem lineárně lomenou funkci a popište způsob určení jejího grafu pomocí posunutí grafu nepřímé úměrnosti. Příklad doplňte ukázkami grafů funkcí určených lomenými výrazy se členy v absolutní hodnotě.

Příklady:
A. V rovině z kartézskou soustavou souřadnici znázorněte množinu všech bodů $P[x, y]$, jejichž souřadnice vyhovují rovnici $2x - 3y + xy = 2$. Které body z této množiny mají obě souřadnice celočíselné?

18. Mocniny s racionálním exponentem

Vysvětlete, kdy a jak je definována n-tá odmocnina z daného reálného čísla i n-tá odmocnina jako funkce. Poté přejděte k mocninám, jejichž exponenty jsou racionální čísla s důrazem na nezávislost výběru zlomku, který dané číslo reprezentuje. Uveďte pravidla o počítání s mocninami. Popište, jaké představy by měli mít žáci o mocnině s iracionálním exponentem.
Příklady:
A. Pro která celá čísla k je rozdíl $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6+k\sqrt{3}}$ racionální číslo?
B. Upravte výraz $(\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}) : (\sqrt[12]{a^{11}})$.

19. Exponenciální funkce, rovnice a nerovnice

Popište vlastnosti exponenciální funkce (v závislosti na jejím základu) a načrtněte její graf. Vyberte a řešte obvyklé druhy exponenciálních rovnic a nerovnic.
Příklady:
A. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $4^{3 \cdot \sqrt{x-3}} = 4 \cdot 2^{-2x}$.
B. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $(|x^2 - 13| + 3)^{|x-2|-5} > 15^{|x-2|-5}$.
C. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $|4^x - 9| \leq |2^x - 3| + 6$.

20. Logaritmická funkce, rovnice a nerovnice

Popište vlastnosti logaritmické funkce (v závislosti na jejím základu) a načrtněte její graf. Vyberte a řešte obvyklé druhy logaritmických rovnic a nerovnic.
Příklady:
A. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\log_2 x \leq \frac{2}{\log_2 x - 1}$.
B. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici
$\log_{\frac{6-x}{5}}(x + 18) \leq 1 - \log_{\frac{5}{6-x}}(4x + 23)$.
C. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\log_{(4-\sqrt{25-x^2})} |8 - 2x| > 0$.
D. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2$.
E. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $(\sqrt{x})^{1-\log_{0,5} x} \geq 8$.
F. V oboru $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\sqrt{\log_{x^2}\left(1 + \frac{3}{2}x\right)} < 1$.
G. Určete definiční obor nerovnice $\log_{x+\frac{1}{2}} \dfrac{5|x| + 11x + 2}{8} \geq 2$ a pak ji vyřešte.

H. Definiční obor rovnice $\log_x 27 - \dfrac{5\log_x 3}{\log_x \sqrt{3x^2}} = 1$ vyjádřete jako sjednocení intervalů a pak danou rovnici vyřešte.

I. Pro které hodnoty reálného parametru p má rovnice $x + \log_{\frac{1}{3}}(9^x - p) = 0$ právě dvě řešení v oboru reálných čísel?

J. Stanovte definiční obor a pak vyřešte nerovnici $\log_{\frac{p}{x}}\left(\dfrac{5x}{2p} - 1\right) \geq -2$, kde číslo p je *kladný* reálný parametr.

21. Goniometrické funkce a jejich základní vlastnosti

Vysvětlete způsob zavedení funkcí sinus, kosinus a tangens v oboru reálných čísel. Uveďte ty jejich vlastnosti, které jsou geometricky názorné, a doplňte je ukázkami typických úloh (včetně úloh na sestrojení grafů).

Příklady:

A. Určete počet řešení rovnice $|\sin 2x| = p$ v intervalu reálných čísel $x \in (-4\pi, 11\pi)$ v závislosti na reálném parametru p.

22. Vzorce pro goniometrické funkce a jejich užití

Z jednoho součtového vzorce (který nemusíte dokazovat) odvoďte ostatní součtové a rozdílové vzorce. Dále odvoďte vzorce pro dvojnásobný a poloviční argument. Podobně z jednoho vzorce pro součet odvoďte ostatní vzorce pro součet a rozdíl. Posuzované vzorce uplatněte při řešení konkrétních úloh.

Příklady:

A. V trojúhelníku ABC o obvodu $10\,\text{cm}$ platí $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ a $\cos\beta = \frac{7}{9}$. Ukažte, že délky a, b, c stran tohoto trojúhelníku jsou (v cm) vyjádřeny racionálními čísly a tato čísla určete.

B. Ze součtových vzorců pro goniometrické funkce nebo pomocí Moivreovy věty odvoďte vzorec $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$. Využijte ho pak k řešení rovnice $\sin 6x = 2\sin 2x$.

23. Sinová věta a její užití

Odvoďte sinovou větu jednak přes výšku trojúhelníku, jednak přes středový a obvodový úhel v kružnici trojúhelníku opsané. Uveďte typické příklady na výpočet pomocí sinové věty.

Příklady:

A. V daném trojúhelníku ABC při obvyklém označení stran a vnitřních úhlů platí $a : b = 2 : 3$ a $\alpha : \beta = 1 : 2$. Zjistěte, zda rovněž poměr $a : c$ je poměrem dvou celých čísel (v kladném případě tato čísla najděte).

B. Užitím sinové věty dokažte tzv. tangentovou větu pro obecný trojúhelník ABC, která je při obvyklém označení jeho prvků vyjádřena úměrou $(a - b) : (a + b) = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) : \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

C. Do kružnice o poloměru $R = 3\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$ je vepsán trojúhelník ABC, ve kterém platí $a = 2\sqrt{30}\,\mathrm{cm}$, $v_b = 2\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$ a $\alpha > 90°$. Vypočtěte délky zbylých stran b a c.

24. Kosinová věta

Odvoďte kosinovou větu pomocí Pythagorovy věty přes výšku trojúhelníku. Uveďte typické příklady na výpočet užitím kosinové věty (m.j. vysvětlete, jak se z délek stran trojúhelníku usoudí, zda je trojúhelník tupoúhlý).

Příklady:

A. V trojúhelníku ABC o obsahu $12\,\mathrm{cm}^2$ platí $a = 5\,\mathrm{cm}$ a $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}75$ (při obvyklém označení stran a úhlů). Ukažte, že rovněž délky b, c zbylých dvou stran trojúhelníku jsou (v cm) vyjádřeny racionálními čísly a tato čísla určete.

B. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká strany AB v bodě T, přičemž úsečky AT a BT mají po řadě délky 5 a 9. Vypočtěte délky všech stran trojúhelníku ABC, víte-li navíc, že jeho vnitřní úhel při vrcholu C má velikost 120°. (Návod: Uvažujte o dalších dvou bodech dotyku vepsané kružnice.)

C. V trojúhelníku ABC platí $a = 3\,\mathrm{cm}$, $b = 2\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$ a $\sin\gamma = \dfrac{2}{3}$. Vypočtěte stranu c, $\sin\alpha$ a $\cos\beta$ (přesně, tj. bez užití přibližných hodnot goniometrických a cyklometrických funkcí z kalkulaček).

25. Goniometrické rovnice a nerovnice

Vysvětlete, co jsou to základní goniometrická rovnice a pomocí jednotkové kružnice popište počet a rozložení jejich řešení v intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Na příkladech uveďte jednotlivé typy složitějších rovnic a metody jejich řešení. Řešte rovněž jednoduché goniometrické nerovnice (substituční metoda, využití jednotkové kružnice či grafů základních funkcí.)

Příklady:

A. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\sin x + \cos 2x = 1$.

B. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

C. V oboru $\langle 0, 2\pi)$ řešte rovnici $2\sin 2x \sin x + \cos 2x = 1$.

D. V oboru $\langle 0, 2\pi)$ řešte rovnici $(\sqrt{3}-1)\sin x - 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$.

E. V oboru $\langle 0, 2\pi)$ řešte rovnici $\sin 2x + \cos 2x - \mathrm{tg}\, x = 1$.

F. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $2\sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2 x - \mathrm{tg}\, x$.

G. Pro které hodnoty parametru $k \in \mathbb{R}$ má rovnice $5\sin 2x - 6\cos x = k\cdot(5\sin x - 3)$ v oboru $x \in \langle 0, \pi\rangle$ právě dvě řešení?

H. V oboru $\langle 0, \pi\rangle$ řešte rovnici

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right)\cdot \mathrm{cotg}\, 3x + \sin(\pi + 2x) = \sqrt{2}\cos 5x$.

I. V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte rovnici $\operatorname{cotg} x - 1 = \dfrac{\cos 2x}{1+\operatorname{tg} x}$.

J. V oboru $\langle 0, \pi\rangle$ řešte rovnici $2\cos^2 3x + \cos(2x+\pi) = 1$.

K. V oboru $\langle 0, \pi\rangle$ řešte rovnici $\sin 3x = \cos 5x$. (Návod: Rovnici nejdříve upravte do tvaru $\sin A = \sin B$.)

L. Popište obecnou metodu řešení rovnice $a\cos x + b\sin x + c = 0$ s parametry $a, b, c \in \mathbb{R}$. Rovnici interpetujte též geometricky jako hledání průsečíků jednotkové kružnice a přímky s danou obecnou rovnicí. Nakonec stejnou metodou řešte rovnici $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 2x$.

M. V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte rovnici $\sin 2x - \sqrt{2}\cdot(\sin x + \cos x) + 1 = 0$. Návod: užijte substituci $t = \sin x + \cos x$.

N. V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte rovnici
$2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{5}\right) - 4\cos\left(x + \dfrac{\pi}{10}\right) = 1$.

26. Polohové vlastnosti přímek a rovin v prostoru

Na příkladu krychle popište možné vzájemné polohy dvou přímek, přímky a roviny, dvou a tří rovin. Vysvětlete postup při konstrukci řezu krychle danou rovinou a jeho zobrazení ve volném rovnoběžném promítání.

Příklady:

A. Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 7 cm. Vyznačte na ní střed M hrany $A'D'$, střed N hrany $D'C'$ a ten bod P hrany BB', pro který platí $|BP| : |B'P| = 1 : 3$. Pak sestrojte řez krychle rovinou, která prochází body M, N a je rovnoběžná s přímkou $C'P$.

27. Odchylky přímek a rovin prostoru

Vysvětlete teoretické zavedení odchylek dvou přímek, přímky od roviny a dvou rovin. Na příkladech hranolů a jehlanů určujte konkrétní odchylky metodou výpočtů přes vhodné trojúhelníky.

Příklady:

A. Vypočtěte $\sin\alpha$, kde α je odchylka dvou stěn pravidelného čtyřstěnu.

B. Kouli o poloměru r je opsán rotační kužel o výšce v. Vypočtěte $\cos\alpha$, kde α je odchylka površek kužele od jeho podstavy.

28. Vzdálenosti v prostoru

Vysvětlete, jak se definuje vzdálenost bodu od přímky a od roviny, vzdálenost dvou přímek, vzdálenost přímky od roviny a vzdálenost dvou rovin. Na příkladech hranolů a jehlanů určujte konkrétní vzdálenosti metodou výpočtů přes vhodné trojúhelníky.

Příklady:

Na vodorovné rovině α jsou položeny tři shodné koule o poloměru r tak, že se navzájem dotýkají. Na těchto třech koulích leží čtvrtá koule o témže poloměru r. Vypočtěte vzdálenost nejvyššího bodu čtvrté koule od roviny α.

29. Základní kombinatorické pojmy a vzorce

Popište, které konfigurace prvků nazýváme permutace, variace a kombinace (bez i s opakováním). Pak odvoďte vzorce pro jejich počty. Nakonec uveďte několik méně triviálních příkladů typu rozmísťování knih do poliček.

Příklady:

A. Ke zkoušce na vysoké škole dostali studenti seznam 30 otázek. Tři z nich si každý student na začátku zkoušky vylosuje; zkoušku složí, umí-li aspoň dvě z vylosovaných otázek. S jakou pravděpodobností složí zkoušku student, který se naučí právě 20 otázek?

B. Pan Novák má v šatníku celkem 9 různých košilí (z toho 2 modré) a 8 různých kravat (z toho 2 zelené). Na služební cestu si chce vzít 4 košile a 2 kravaty tak, aby mezi nimi nebyla modrá košile společně se zelenou kravatou. Kolik možností výběru košil a kravat pan Novák má?

C. Určete počet těch pětimístných přirozených čísel, které ve svém zápisu nemají ani nulu, ani devítku a mají přitom lichý počet lichých číslic. Například číslo 44 433 mezi taková čísla nepatří, protože má dvě liché číslice.

D. Určete počet všech šestimístných přirozených čísel, která lze zapsat číslicemi 1, 2, 3 a která ve svém zápise neobsahují trojčíslí 123. Například číslo 112 322 trojčíslí 123 obsahuje, číslo 122 333 nikoliv. (V jednotlivých číslech nemusí být využity všechny tři číslice.)

E. Uvažujme ta osmimístná přirozená čísla, která jsou dělitelná devíti a každá jejich číslice je 1, 2 nebo 3.

a) Uveďte příklad dvou takových čísel zapsaných různými skupinami číslic.

b) Určete počet všech takových čísel.

F. Určete počet všech šestimístných přirozených čísel dělitelných čtyřmi, která ve svém zápisu nemají žádnou číslici různou od 5, 6, 7 nebo 8. (V jednom čísle nemusí být všechny čtyři „povolené“ číslice, například číslo 888 888 je vyhovující.)

G. Určete počet všech šestimístných přirozených čísel dělitelných devíti, která ve svém zápisu nemají žádnou číslici různou od 1,

2 nebo 3. (V jednom čísle nemusí být všechny čtyři „povolené“ číslice, například číslo 333 333 je vyhovující.)
H. Určete počet všech šestimístných přirozených čísel, která mají ve svém zápisu více lichých než sudých číslic. Takové je například číslo 120 111 se čtyřmi lichými a dvěma sudými číslicemi. Výsledek můžete ponechat ve tvaru $k \cdot 5^5$, kde $k \in \mathbb{N}$.
I. Určete počet všech šestimístných přirozených čísel, které neobsahují číslici nula a ve kterých se každá zastoupená číslice vyskytuje alespoň dvakrát. Tuto vlastnost má například číslo 131 333, ne však číslo 132 233.

30. Binomická věta

Binomickou větu zformulujte a dokažte jednak kombinatorickou úvahou, jednak indukcí využívající vztahů mezi kombinačními čísly umožňujícími snadnou konstrukci Pascalova trojúhelníku. Binomickou větu pak využijte při řešení typických úloh.
Příklady:
A. Určete největší koeficient mnohočlenu $(5x+3)^{10}$.
B. Pro která čísla x je čtvrtý člen rozvoje mocniny

$$\left(\sqrt[2]{x^{\frac{1}{1+\log x}}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$$

roven číslu 200?

31. Rovnice přímky v rovině a prostoru

Popište jednotlivé typy rovnic přímky a souvislosti jejich koeficientů se směrovým vektorem a v případě přímky v rovině i se směrnicí a normálovým vektorem. Vysvětlete, jak se podle rovnic dvou přímek pozná jejich kolmost nebo rovnoběžnost a jak se vypočte jejich odchylka. Odvoďte vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu od přímky dané obecnou rovnicí (v rovině).
Příklady:
A. V rovině jsou dány body $A[2,7]$, $S[1,3]$ a přímka $p\colon 3x - 2y + 11 = 0$. Vypočtěte souřadnice zbylých dvou vrcholů trojúhelníku ABC, jehož výška v_b leží na přímce p a jehož strana BC má střed v bodě S.
B. Vrchol C trojúhelníku ABC leží na přímce $p\colon x-2y+8=0$. Vypočtěte jeho souřadnice, znáte-li vrcholy $A[2,-1]$, $B[4,8]$ a víte-li, že obsah trojúhelníku ABC je 10.
C. Dány jsou vrcholy $A[-1,6]$, $B[-7,-6]$ trojúhelníku ABC a průsečík $V[1,0]$ jeho výšek. Vypočtěte souřadnice vrcholu C a rozhodněte (výpočtem, nikoliv náčrtkem), zda je trojúhelník ABC ostroúhlý, pravoúhlý, či tupoúhlý.

D. Na přímce p, která prochází bodem $P[4,3,-2]$ a má směrový vektor $(1,2,-1)$, určete bod C stejně vzdálený od bodů $A[1,2,5]$ a $B[-1,0,1]$.

E. V rovině s kartézskou soustavou souřadnic Oxy jsou dány body $S[1,0]$, $K[-2,1]$, $L[5,2]$ a přímka p: $2x - y - 4 = 0$. Vypočtěte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, víte-li, že vrchol C leží na přímce p, na přímce AK i na přímce BL a že bod S je středem strany AB, která leží na ose x.

F. Vypočtěte kartézské souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, znáte-li střed $B_1[2,4]$ strany AC, střed $C_1[3,6]$ strany AB a průsečík $V[21,-7]$ jeho výšek. Úloha má dvě řešení, výpočet dokončete pro ten trojúhelník ABC, jehož vrcholy mají celočíselné souřadnice. (Návod: Pomocí souřadnic u, v vrcholu $A[u,v]$ vyjádřete souřadnice vrcholů B, C a pak pro neznámé u, v sestavte a vyřešte soustavu rovnic.)

G. Vypočtěte souřadnice vrcholů B, C trojúhelníku ABC, znáte-li vrchol $A[1,3]$ a víte-li, že těžnice z vrcholu B leží na přímce t_b: $x - 2y + 10 = 0$ a těžnice z vrcholu C na přímce t_c: $3x - y - 5 = 0$.

H. Vypočtěte souřadnice vrcholů B, C trojúhelníku ABC, znáte-li vrchol $A[2,5]$ a víte-li, že výška z vrcholu B leží na přímce v_b: $x+y-5=0$ a výška z vrcholu C na přímce v_c: $x-3y+19=0$.

32. Rovnice roviny v prostoru, vzájemná poloha přímek a rovin

Vysvětlete, jak vypadá obecná rovnice roviny a jaká je souvislost jejích koeficientů s normálovým vektorem roviny. Vyložte výhodné metody určování rovnice roviny podle způsobu jejího zadání. Na příkladech objasněte, jak určujeme vzájemnou polohu dvou rovin a vzájemnou polohu přímky a roviny.

Příklady:

A. Napište obecnou rovnici roviny procházející body $A[0,2,-1]$, $B[1,1,1]$ a $C[4,6,2]$. Pak určete souřadnice bodu D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl rovnoběžník. Přesvědčete se, že tento rovnoběžník je obdélník a vypočtěte jeho obsah.

33. Kuželosečky a jejich rovnice

Popište, jak vypadá rovnice kružnice v rovině a jak se z ní určí střed, poloměr a rovnice tečen. Vyslovte ohniskové definice jednotlivých typů kuželoseček a poté odvoďte rovnici paraboly a hyperboly (nebo elipsy). Popište geometrický význam koeficientů těchto rovnic a metodu hledání těchto parametrů pro kuželosečky posunuté ze základní polohy.

Příklady:

A. Najděte rovnici kružnice, která prochází body $M[0,6]$, $N[8,0]$ a která se dotýká přímky $p\colon 3x+4y-49=0$.

B. Najděte rovnici té kružnice, která má střed na přímce $p\colon 5x-$ $-4y-28=0$ a prochází body $M[1,5]$ a $N[7,-3]$.

C. Metodou analytické geometrie dokažte tvrzení: Leží-li počátek O kartézské soustavy souřadnic Oxy ve vnitřní oblasti kružnice k o poloměru r, pak tato kružnice protne osu x v bodech A, B a osu y v bodech C, D tak, že platí $|AO|^2+|BO|^2+|CO|^2+|DO|^2=$ $=4r^2$. (Souřadnice středu S kružnice k označte $S[x_0,y_0]$.)

D. Určete střed, vrcholy, ohniska a asymptoty hyperboly určené rovnicí $x^2-4y^2-6x-16y-11=0$ a pak ji načrtněte.

34. Aritmetika komplexních čísel

Vysvětlete, že nový druh čísel lze exaktně zavést pomocí dvojic reálných čísel a operací s nimi. Objasněte základní pojmy spojené s komplexními čísly, vlastnosti aritmetických operací s důrazem na praktickou metodiku dělení. Zaveďte goniometrický tvar komplexních čísel, jeho geometrický význam a odvoďte větu o násobení komplexních jednotek.

Příklady:

A. Ukažte, že číslo $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})i$ je komplexní jednotka. Víte-li, že její argument je $\frac{1}{12}\pi$, určete algebraický tvar komplexní jednotky, která má argument $\frac{7}{12}\pi$.

35. Řešení rovnic v komplexním oboru

V oboru $\mathbb{C}$ řešte kvadratické rovnice s reálnými koeficienty a záporným diskriminantem. Dále v $\mathbb{C}$ řešte binomické rovnice a vysvětlete rozložení jejich kořenů v Gaussově rovině.

Příklady:

A. Pravidelný šestiúhelník má střed v počátku Gaussovy roviny a jeden jeho vrchol je obrazem komplexního čísla $2+i$. Určete komplexní čísla, jejichž obrazy jsou zbývající vrcholy šestiúhelníku.

36. Aritmetické posloupnosti a jejich užití

Vymezte aritmetické posloupnosti a odvoďte vzorec pro součet jejich prvních n členů. Příklady doložte jednotlivé typy úloh o aritmetických posloupnostech.

Příklady:

A. Určete součet všech kladných členů aritmetické posloupnosti s prvním členem $16\frac{1}{2}$ a druhým členem $15\frac{2}{3}$.

37. Geometrické posloupnosti a jejich užití

Vymezte geometrické posloupnosti a odvoďte vzorec pro součet jejich prvních n členů. Příklady doložte jednotlivé typy úloh o geometrických posloupnostech.

Příklady:

A. Součet prvního a čtvrtého členu geometrické posloupnosti se rovná 195, součet druhého a třetího členu je roven 60. Určete první člen a kvocient této posloupnosti.

B. Geometrická posloupnost kladných čísel má tu vlastnost, že součet jejích prvních dvou členů je roven jedné, zatímco součet jejích prvních čtyř členů je roven třem. Vypočtěte první člen této posloupnosti.

38. Geometrické řady

Odvoďte vzorec pro součet členů (nekonečné) geometrické řady a uveďte příklady jeho využití.

Příklady:

A. Dva hráči A, B házejí střídavě obvyklou hrací kostkou. Jako první hází hráč A, vyhrává ten hráč, kterému dříve padne šestka (hra pak končí). Vypočítejte pravděpodobnost výhry hráče A a pravděpodobnost výhry hráče B.