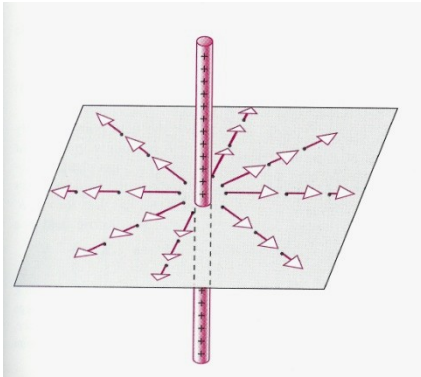


Gaussův zákon elektrostatiky



úvod

pole některých symetrických nabitých těles jsou vyjádřena jednoduchými vztahy
nelze tyto vztahy odvodit podobně jednoduchým způsobem?



$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 y}$$

přímé vlákno
nekonečné délky

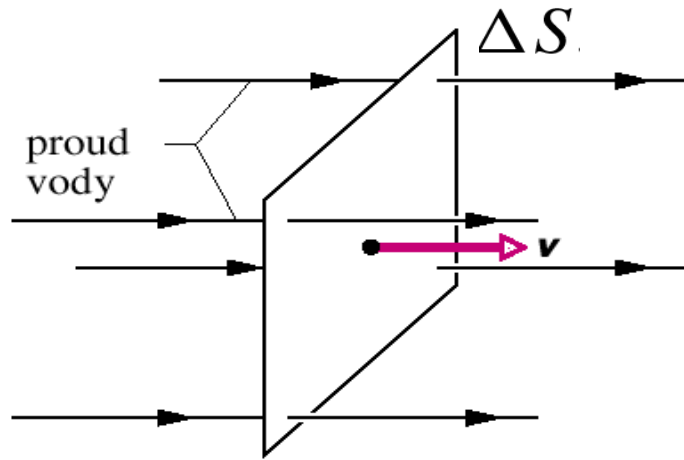
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

vodivý povrch

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

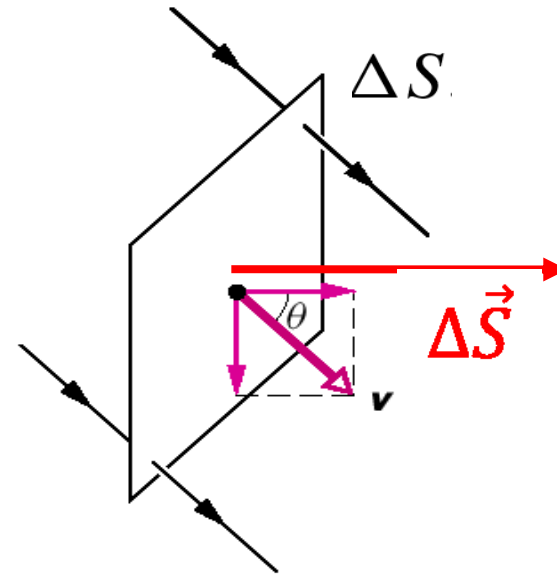
pole kulové vrstvy
pro $r > R$

objemový tok tekutiny



objem tekutiny za 1 s:

$$\Delta\phi = v\Delta S$$



objem tekutiny za 1 s:

$$\Delta\phi = v(\cos\theta)\Delta S$$

$$\Delta\phi = \vec{v} \cdot \Delta\vec{S}$$

tok elektrické intenzity

tok elektrické intenzity \vec{E}
elementem plochy

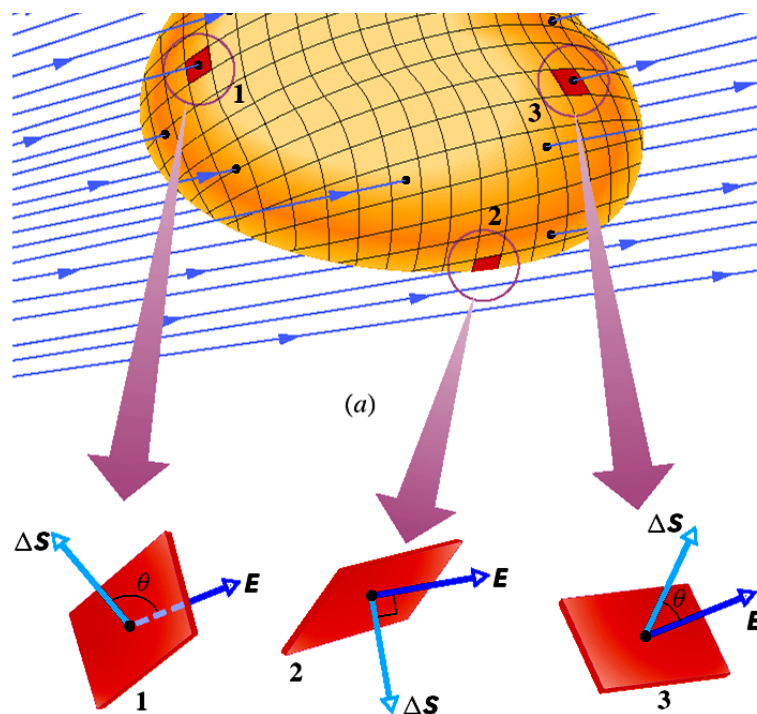
$$\Delta\Phi_E = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}$$

$$\Phi_E = \sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}$$

tok elektrické intenzity \vec{E}
plochou S

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Č.	θ	SMĚR \mathbf{E}	SOUČIN $\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{S}$
1	$> 90^\circ$	dovnitř plochy	záporný
2	$= 90^\circ$	rovnoběžně s plochou	nulový
3	$< 90^\circ$	ven z plochy	kladný



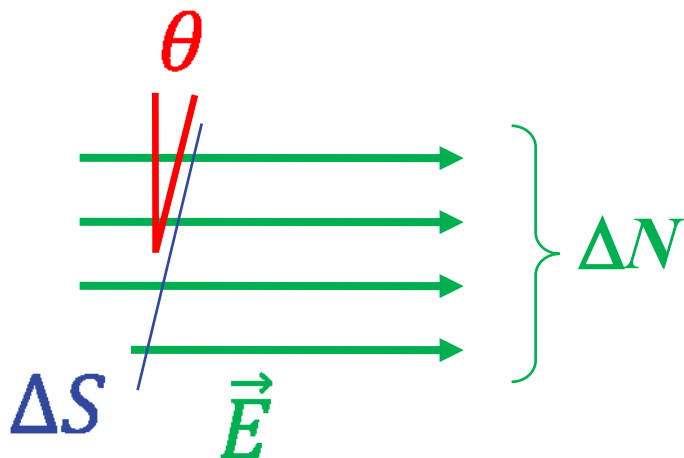
tok intenzity několika polí

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \quad \dots \text{princip superpozice}$$

tok celkové elektrické intenzity \vec{E} plochou S

$$\Phi_E = \iint_S \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \iint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \Phi_{Ei}$$

tok vyjádřený počtem siločar

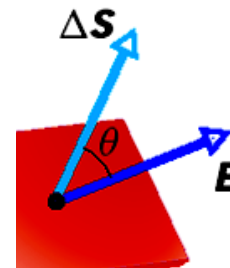


velikost E intenzity v daném místě je úměrna (\propto) hustotě siločar, tj. počtu siločar na jednotku plochy kolmé k siločarám v daném místě:

$$E \propto \frac{\Delta N}{\Delta S \cos \theta}$$

Tok intenzity plochou ΔS :

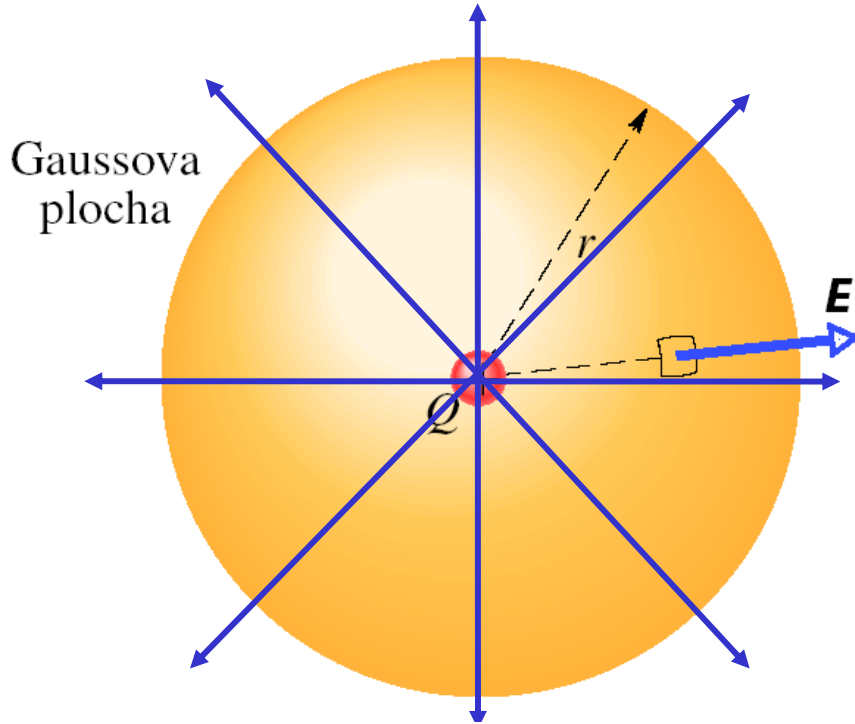
$$\Delta \Phi_E = E \Delta S \cos \theta \propto \frac{\Delta N}{\Delta S \cos \theta} \Delta S \cos \theta = \Delta N$$



$$\Phi_E = \sum \Delta \Phi_E \propto \sum \Delta N = N$$

celkový tok Φ_E je úměrný celkovému počtu N průchodů siločar plochou (s příslušnými znaménky)

Gaussův zákon intuitivně



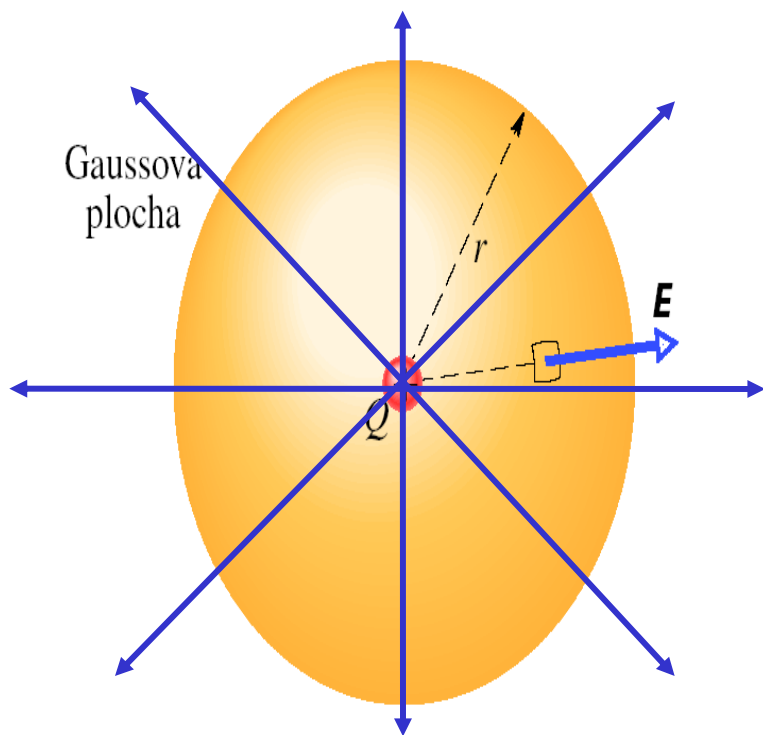
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

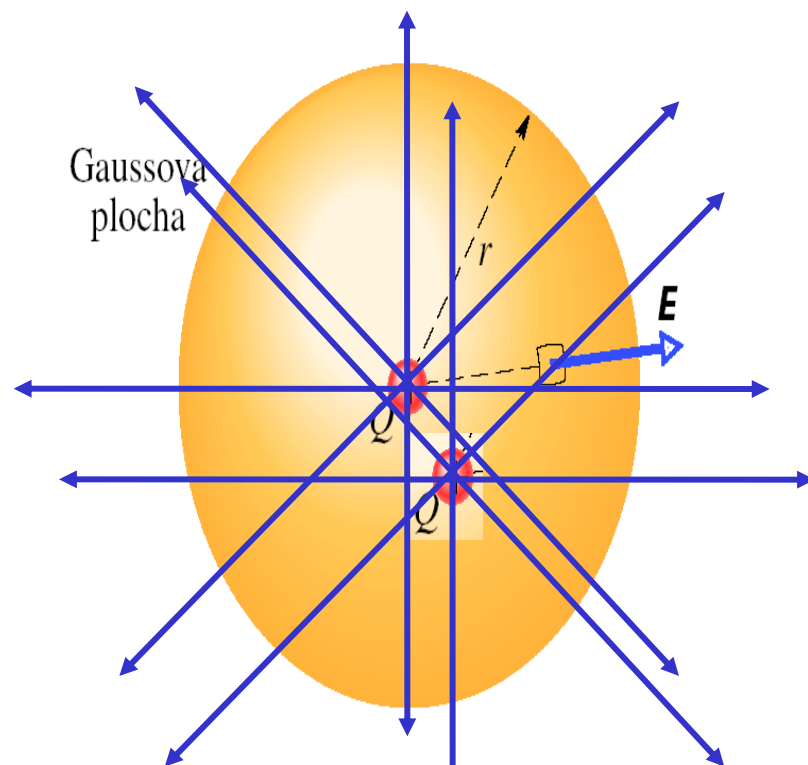
Celkový tok Φ_E Gaussovou (uzavřenou) plochou je úměrný celkovému počtu N průchodů siločar touto plochou (započtených s příslušnými znaménky)

Gaussův zákon intuitivně

Celkový tok Φ_E Gaussovou (uzavřenou) plochou je úměrný celkovému počtu N průchodů siločar touto plochou (započtených s příslušnými znaménky)

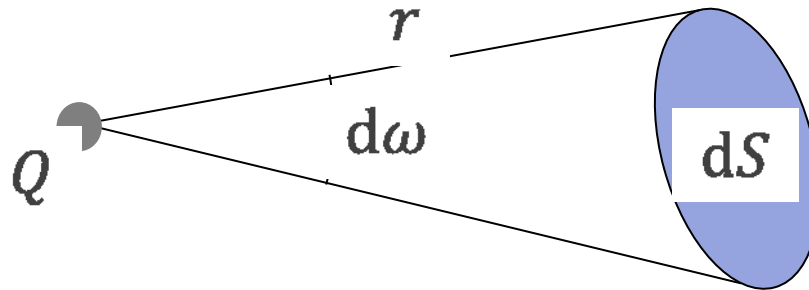


$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



$$\Phi_E = \frac{2Q}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{celk}}}{\epsilon_0}$$

odvození Gaussova zákona



tok elektrického pole náboje Q plochou dS vymezenou elementem $d\omega$ prostorového úhlu ve vzdálenosti r

$$d\Phi_E = E dS \cos \theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 d\omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\omega$$

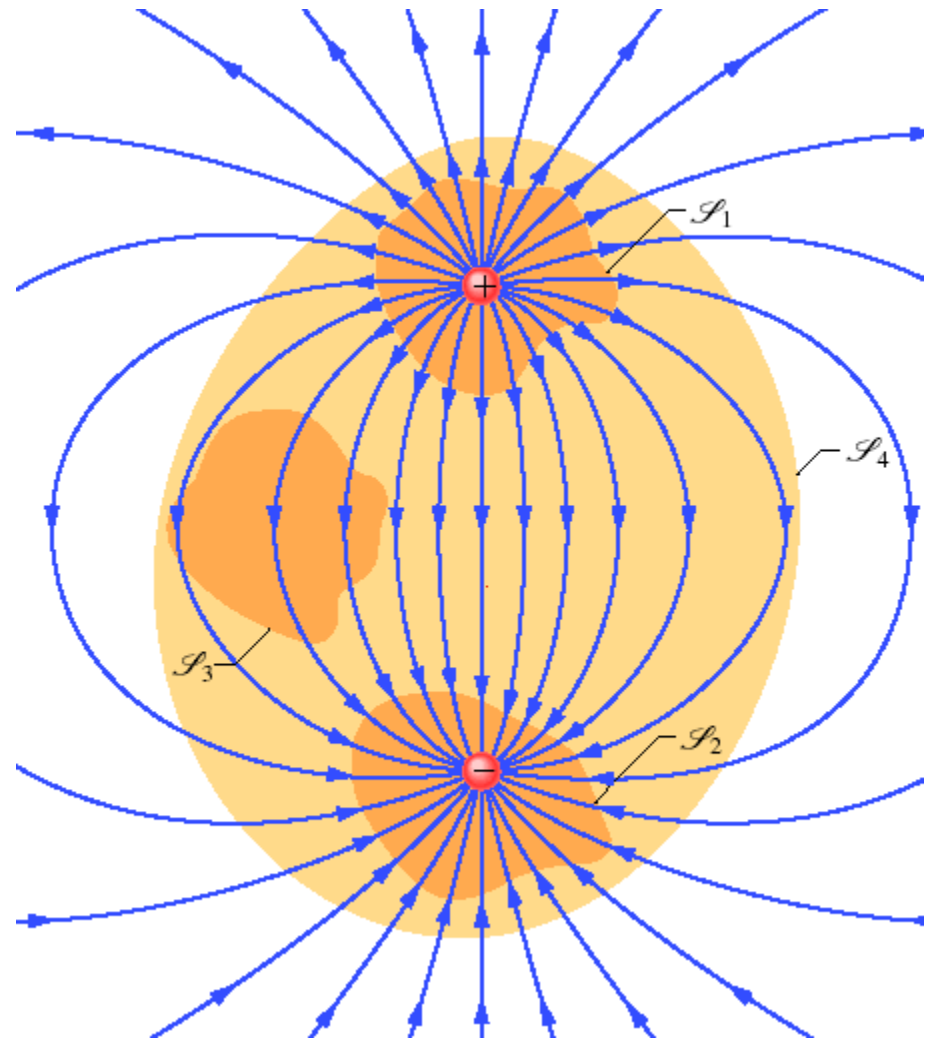
tok libovolnou uzavřenou plochou obklopující náboj Q

$$\Phi_E = \int d\Phi_E = \int_{4\pi} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\omega = \frac{Q}{\epsilon_0} \int_{4\pi} \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

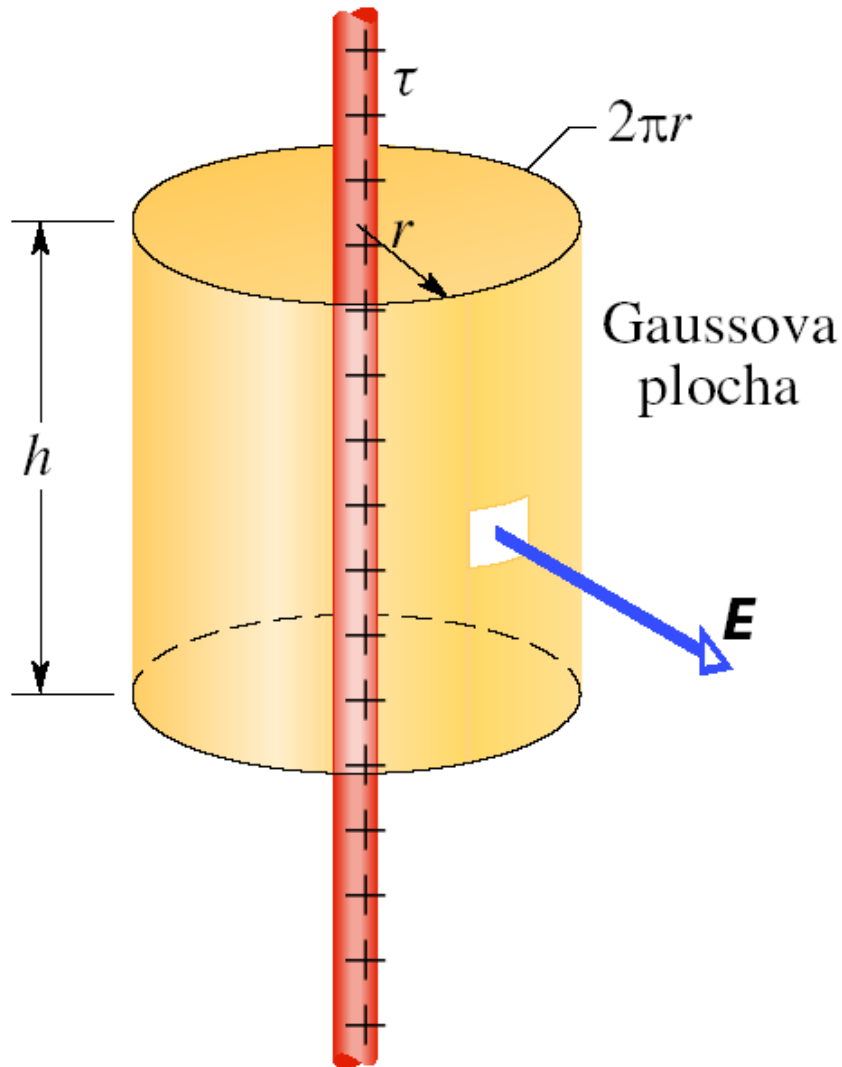
Gaussův zákon

Pro tok elektrické intenzity \vec{E}
libovolnou uzavřenou
(Gaussovou) plochou S
obklopující celkový náboj Q
platí

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



válcová symetrie



přímé vlákno
nekonečné délky:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$$

blesk

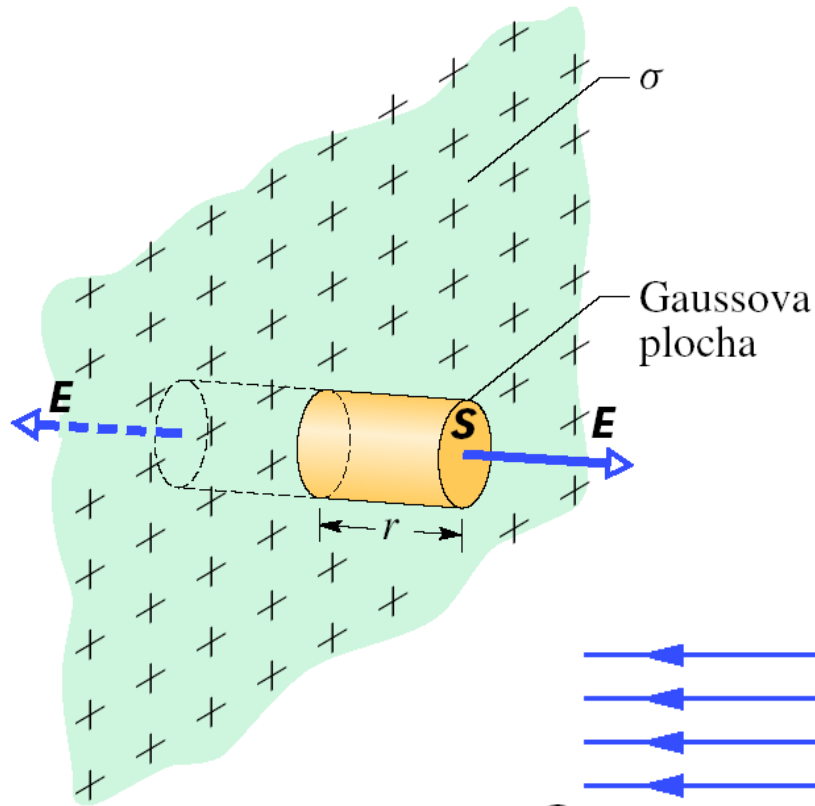


nábojová hustota elektronů:
 $\tau \approx -1 \cdot 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$
ionizace vzduchu nastává při
 $E_{\text{ion}} \approx 3 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$



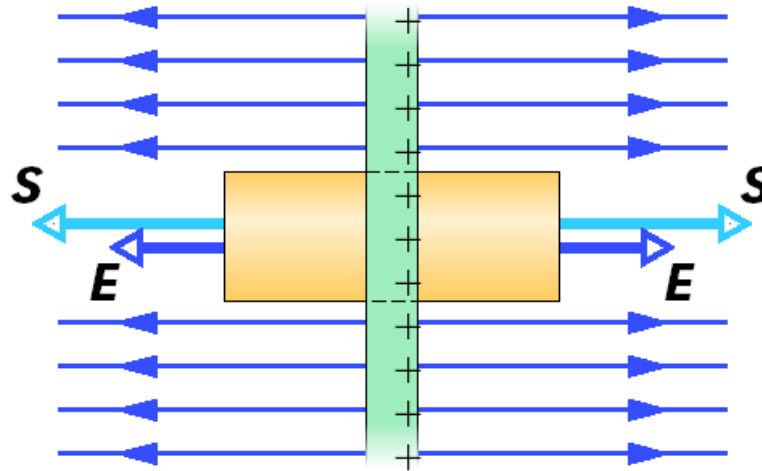
$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$$

rovinná symetrie



nevodivá rovinná
plocha:

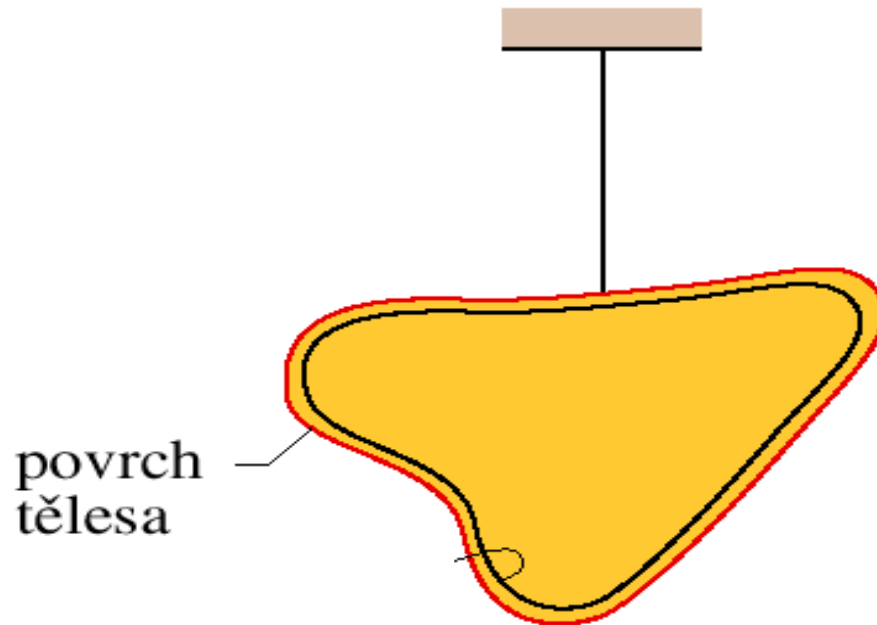
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



nabitý izolovaný vodič

vodič obsahuje volně pohyblivý náboj, z toho důvodu:

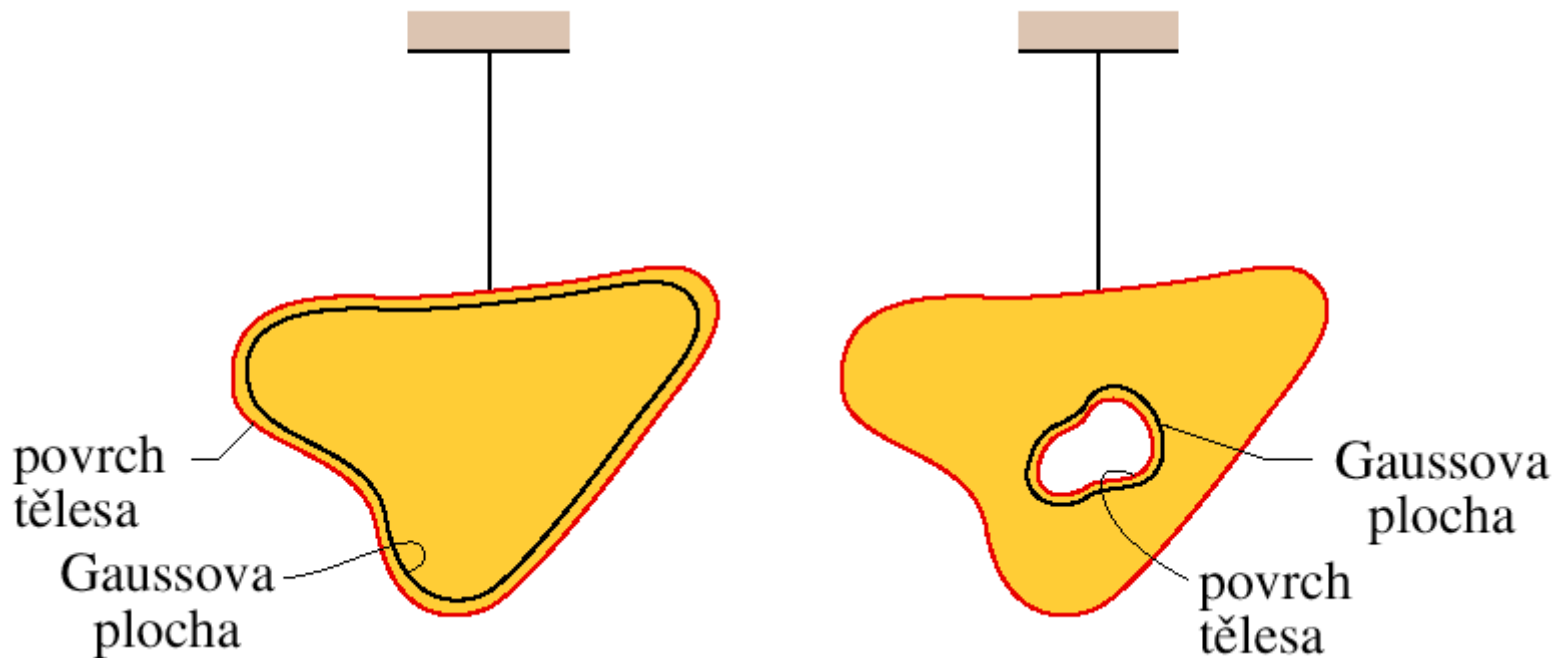
elektrická intenzita uvnitř vodiče v ustáleném stavu je **vždy nulová**



nabitý izolovaný vodič

elektrická intenzita uvnitř vodiče v ustáleném stavu je **vždy nulová**

Jestliže na izolovaný vodič přivedeme z vnějšku náboj, pak se **všechen rozmístí na vnějším povrchu vodiče**. Uvnitř vodiče nezůstane žádný volný náboj.



experimentální důkaz

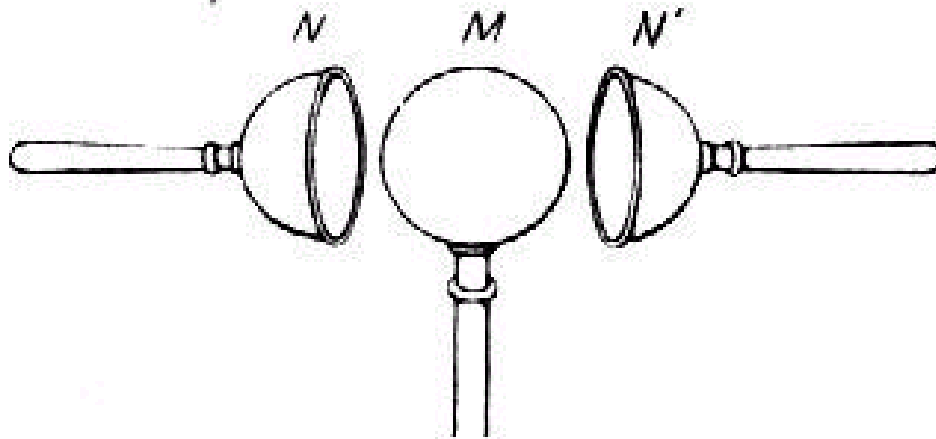


Fig. 450

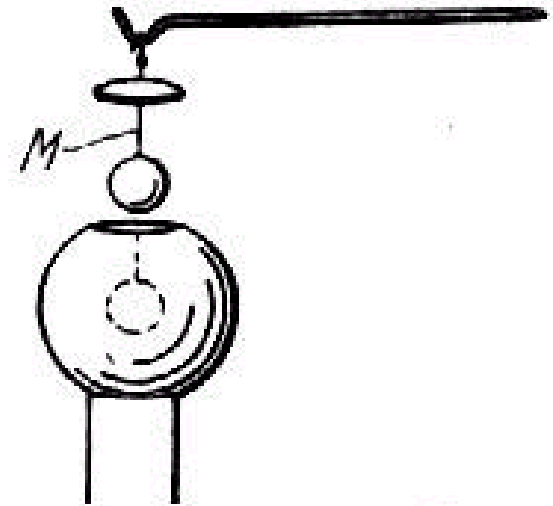


Fig. 451

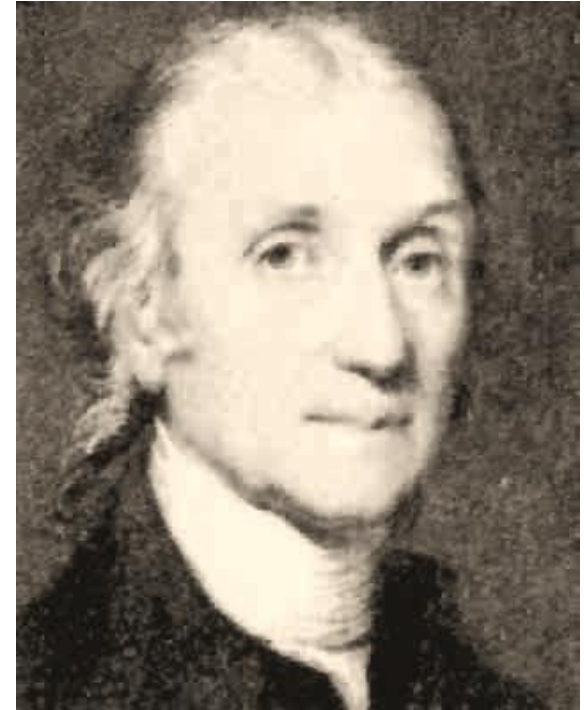
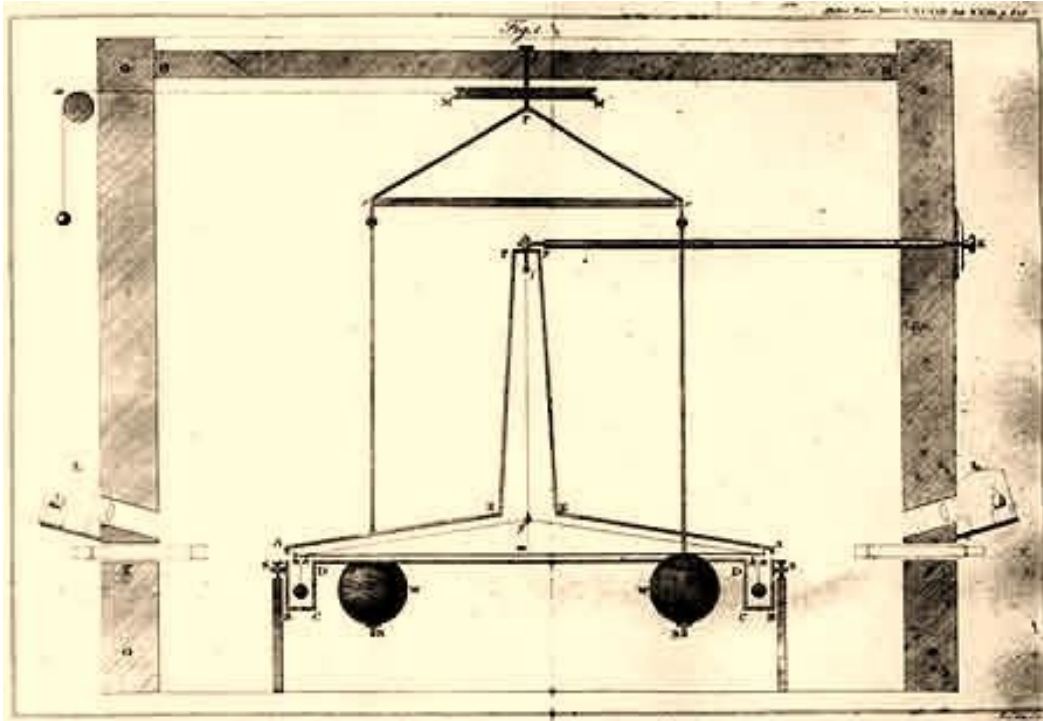
Proof that a charged conductor has only surface charge



Henry Cavendish
1731-1819

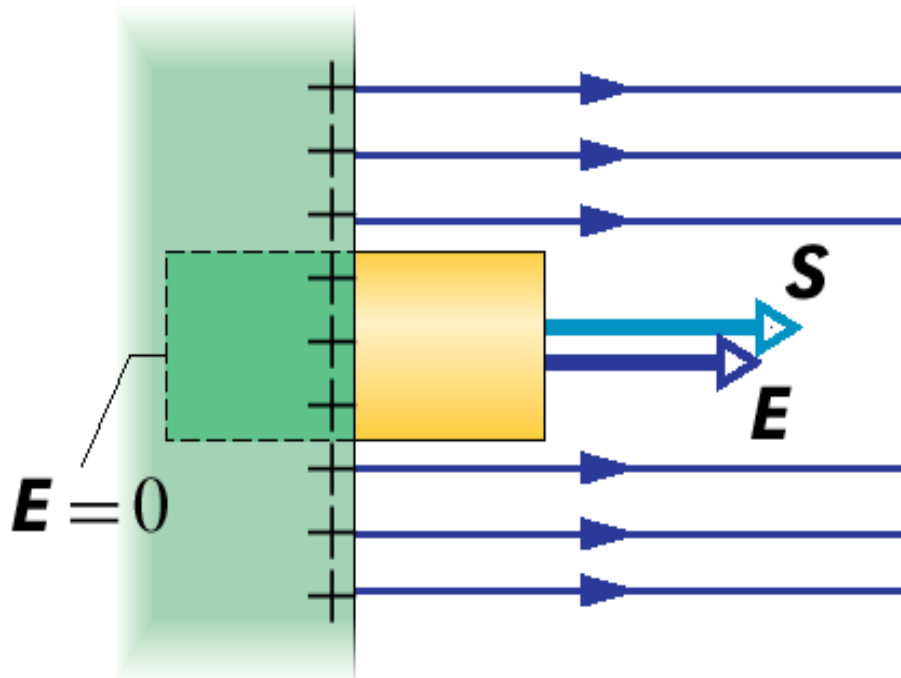
M is an insulated, charged metal sphere, N and N' are hemispherical shells with insulated handles into which M fits. If you place N and N' over M , so that they form a sphere as a metal skin and then remove again N and N' , M is unloaded and the charge on N and N' equals the initial charge on M .

Henry Cavendish



The torsion balance experiment of Henry Cavendish who in 1797 was the first to experimentally measure the gravitational constant G .
(Courtesy of the Journal of Measurement and Technology.)

povrch nabitého vodiče

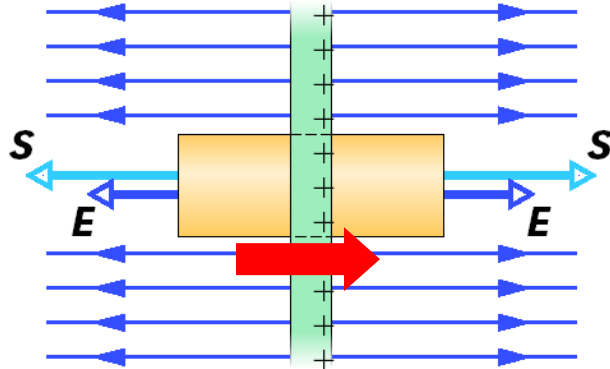


vodivý povrch:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

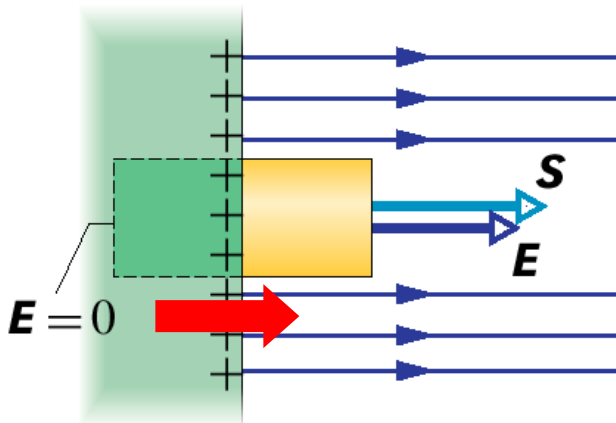
průchod nábitou vrstvou

při průchodu tenkou vrstvou náboje s plošnou hustotou σ ...



nevodivá plocha:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

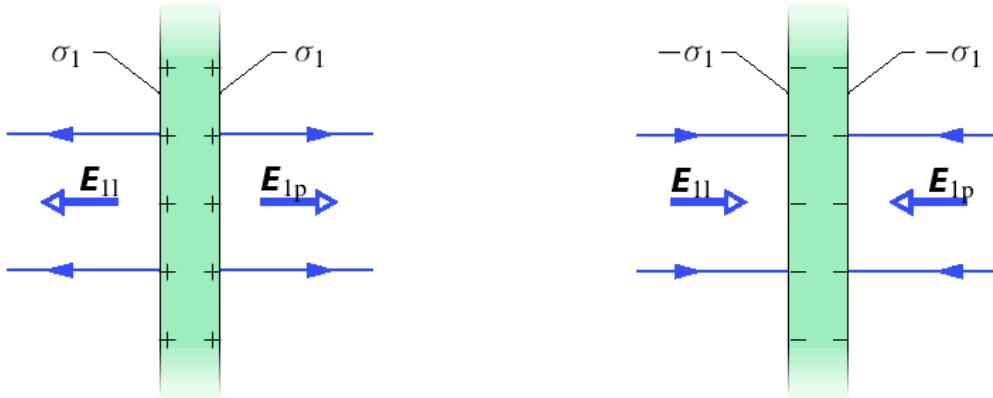


vodivý povrch:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

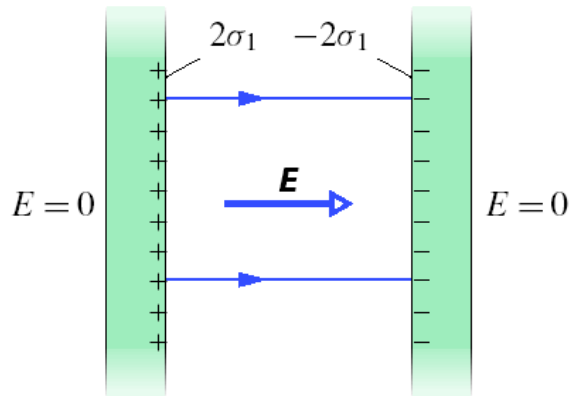
... vzroste intenzita elektrického pole o $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

dvě vodivé desky



vodivý povrch:

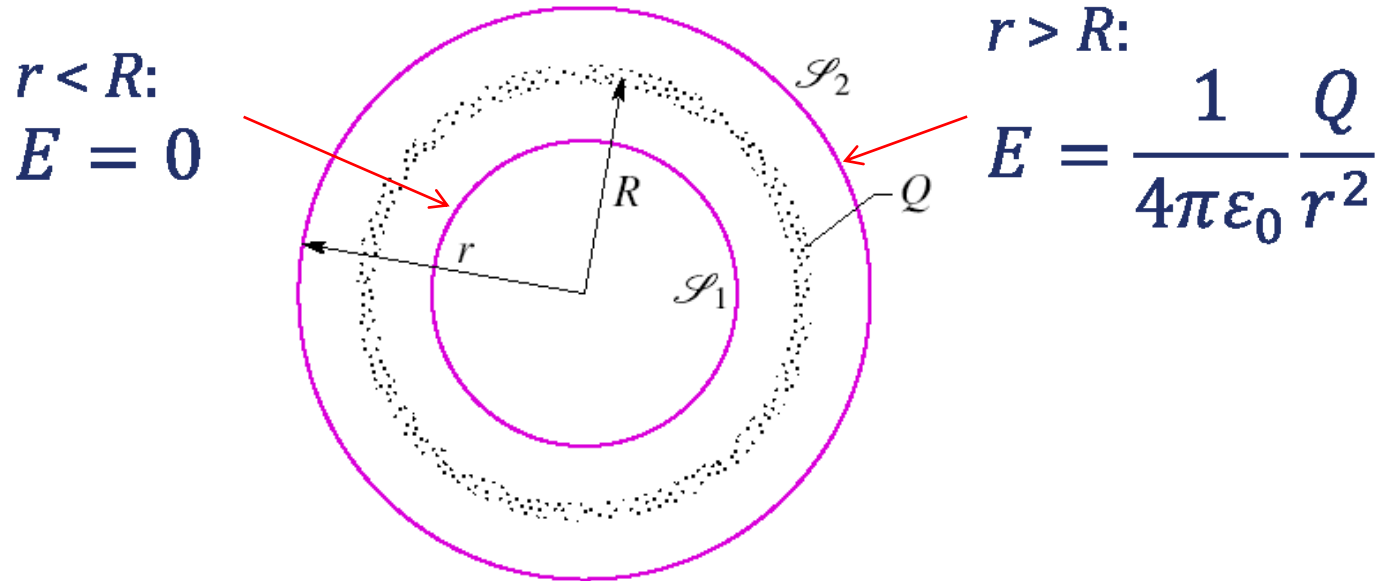
$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$$



mezi vodivými deskami:

$$E = \frac{2\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

kulová symetrie (kulová slupka)



Obr. 24.18 Řez tenkou kulovou vrstvou, nesoucí rovnoměrně rozložený náboj Q , a dvěma Gaussovými plochami \mathcal{S}_1 a \mathcal{S}_2 . Plocha \mathcal{S}_2 obklopuje kulovou vrstvu, plocha \mathcal{S}_1 obklopuje pouze prázdný prostor uvnitř vrstvy.

kulová symetrie (koule)

$r > R:$

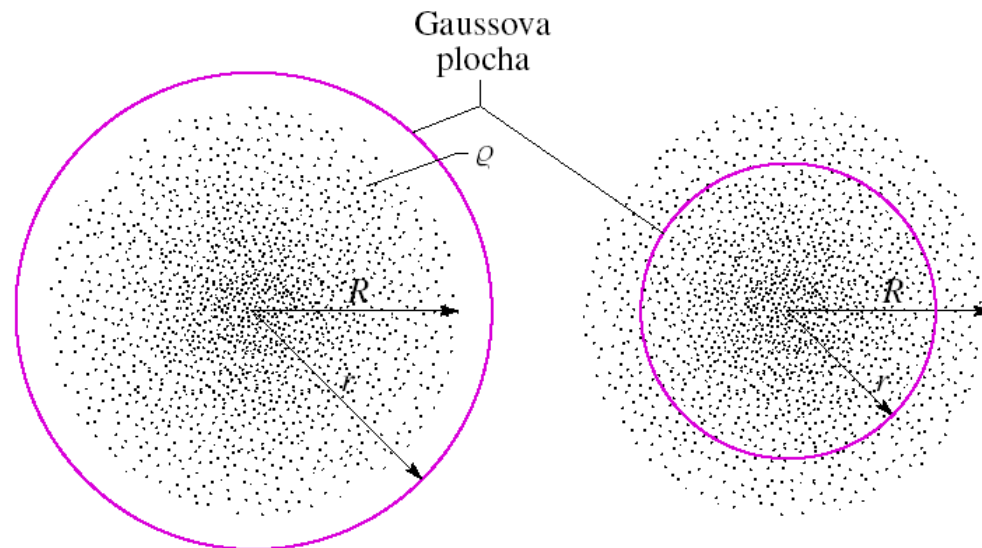
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$Q = \int_0^R \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$$

$r < R:$

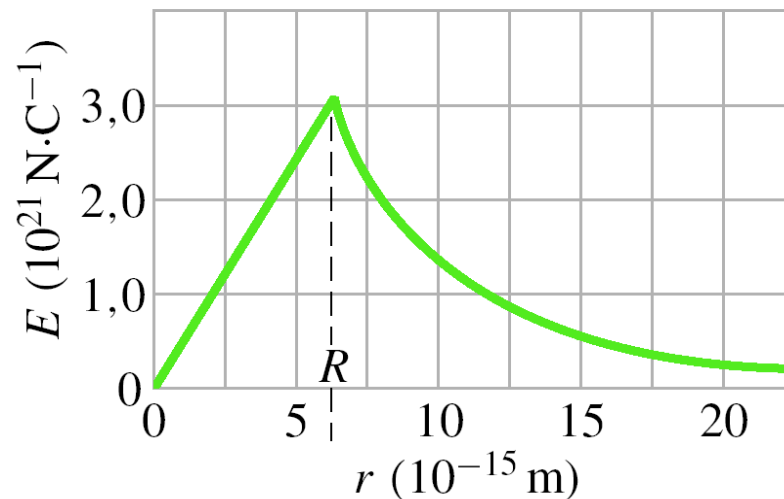
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r)}{r^2}$$

$$Q(r) = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$$



příklad (koule)

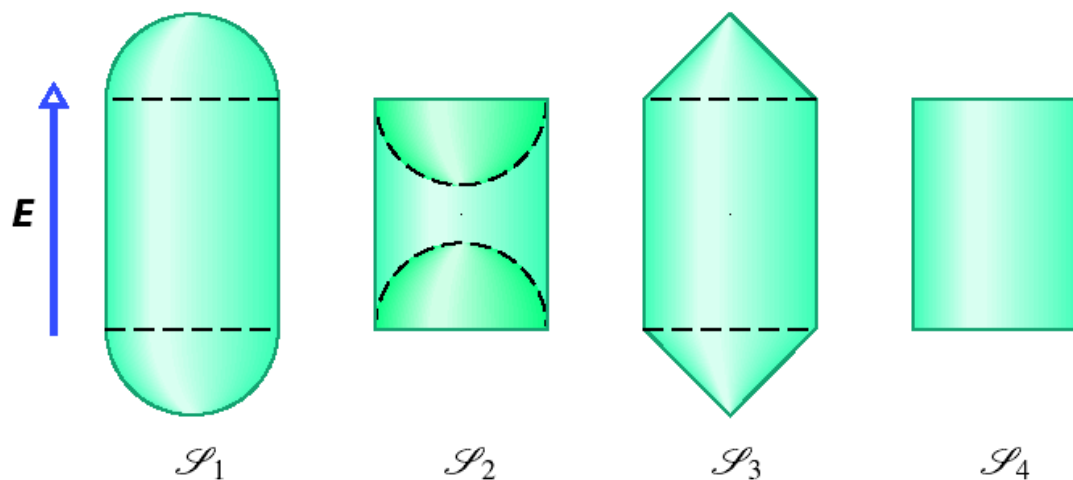
Jádro atomu zlata má poloměr $R = 6,2 \cdot 10^{-15}$ m a nese kladný náboj $Q = Ze$, kde $Z = 79$ je atomové číslo zlata. Nakreslete průběh intenzity elektrického pole od středu jádra až do vzdálenosti $2R$. Předpokládejme, že jádro má kulový tvar s prostorově homogenním rozložením náboje.



Obr. 24.20 Příklad 24.7. Závislost intenzity elektrického pole na vzdálenosti od středu jádra atomu zlata. Předpokládáme homogenní rozdělení kladného náboje v objemu jádra.

kontrolní otázky

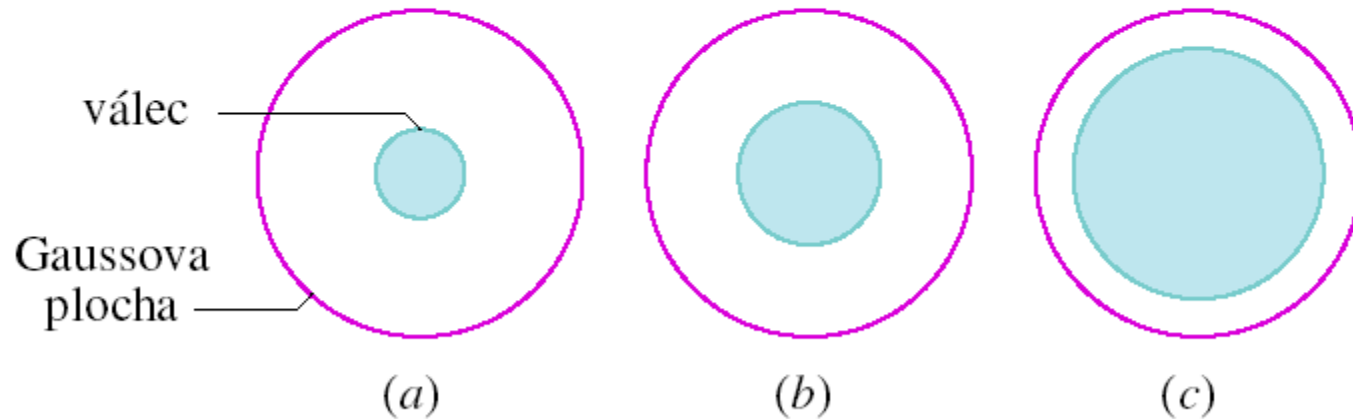
3. Na obr. 24.21 jsou čtyři válcovité Gaussovy plochy se stejným pláštěm a podstavami různého tvaru. Tyto plochy se nacházejí v homogenním elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} , která je rovnoběžná s osou válcových ploch. Podstavy \mathcal{S}_1 mají tvar povrchu konvexních polokoulí, podstavy \mathcal{S}_2 konkávních polokoulí, podstavy \mathcal{S}_3 kuželů a podstavy \mathcal{S}_4 tvar kruhů. Seřadte sestupně tyto plochy podle (a) velikosti celkového toku intenzity elektrického pole, (b) podle toku elektrické intenzity horními podstavami.



Obr. 24.21 Otázka 3

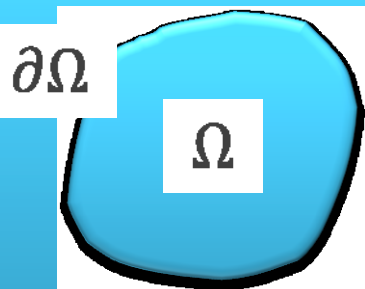
kontrolní otázky

9. Na obr. 24.25 je znázorněn řez třemi válci, z nichž každý nese náboj Q . Gaussova plocha je tvořena povrchem souosého válce a má ve všech třech případech stejný poloměr. Seřadte v sestupném pořadí tyto případy podle velikosti elektrické intenzity na Gaussově ploše.



Obr. 24.25 Otázka 9

Gaussova-Ostrogradského věta



$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} \, dV$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Gaussův zákon: $\oiint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, dV$ ^Q

$$\left(\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, dV \right)$$

libovolné $\iiint_{\Omega} \left(\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0 \Rightarrow$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$