

# Elektrický potenciál



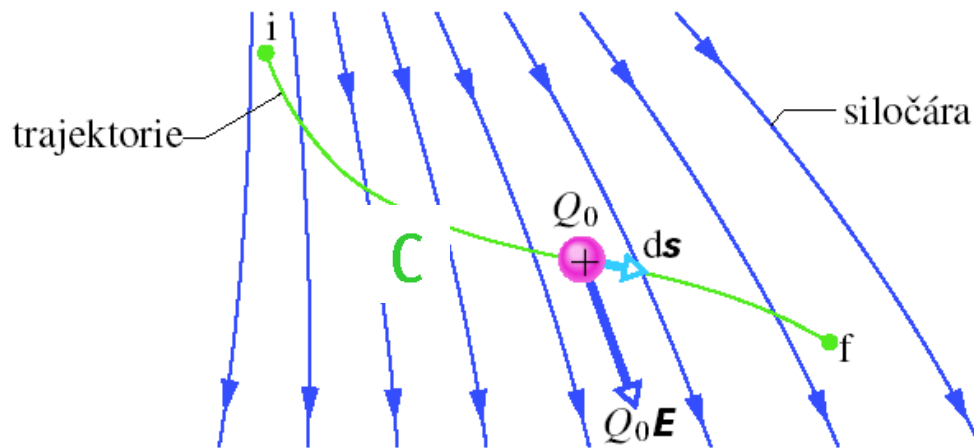
# konzervativnost elektrické síly

práce  $W$  elektrické síly při přemístění náboje  $Q_0$  v poli náboje  $Q$  z bodu  $r_i$  do bodu  $r_f$

$$W = \int_{r_i}^{r_f} \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right)$$

**nezávisí na trajektorii**, pouze na poloze jejího počátečního a konečného bodu

# práce elektrické síly

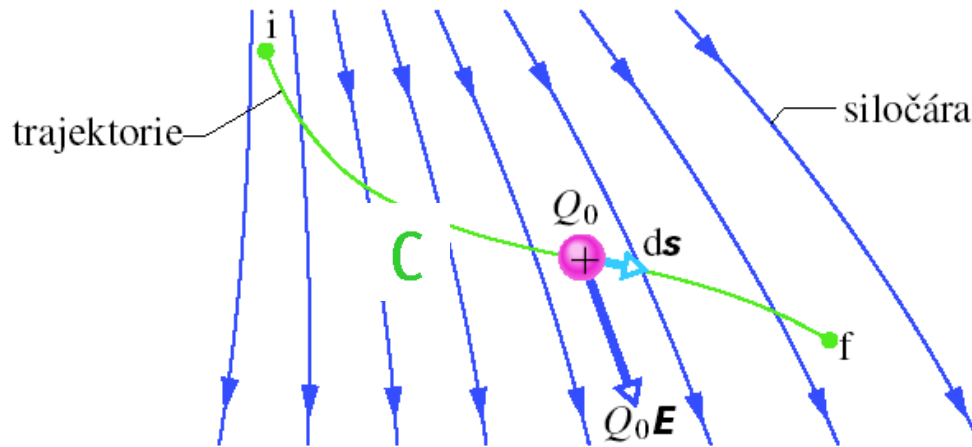


$$W = \int_C Q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \dots \text{práce elektrické síly}$$

$$W_{ext} = - \int_C Q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_{pf} - E_{pi} \quad \dots \text{práce vnější síly}$$

$E_p$  ... potenciální energie částice v elektrickém poli

# potenciální energie, potenciál



$$E_{pf} - E_{pi} = -Q_0 \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\varphi_f - \varphi_i = \frac{E_{pf} - E_{pi}}{Q_0} = - \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$\varphi(\vec{r})$  ... potenciál elektrického pole

# potenciál a napětí

$$\varphi = \frac{E_p}{Q_0}$$

... elektrický potenciál

(hodnota potenciálu vůči vztažnému bodu,  
v němž platí  $\varphi = 0$  ... obvykle se volí v  $\infty$ )

$$U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{E_{p2} - E_{p1}}{Q_0} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

... elektrické napětí mezi body 2 a 1

# jednotky potenciálu a napětí



Alessandro Volta  
(1745-1827)

$$\varphi = \frac{E_p}{Q_0}$$

$$1\text{V} = \frac{1\text{J}}{1\text{C}}$$

(1 Volt)

$$U_{21} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$1\text{V} = \frac{1\text{N}}{1\text{C}} \cdot 1\text{m}$$

$$\frac{1\text{N}}{1\text{C}} = \frac{1\text{V}}{1\text{m}}$$

... intenzita  
elektrického pole

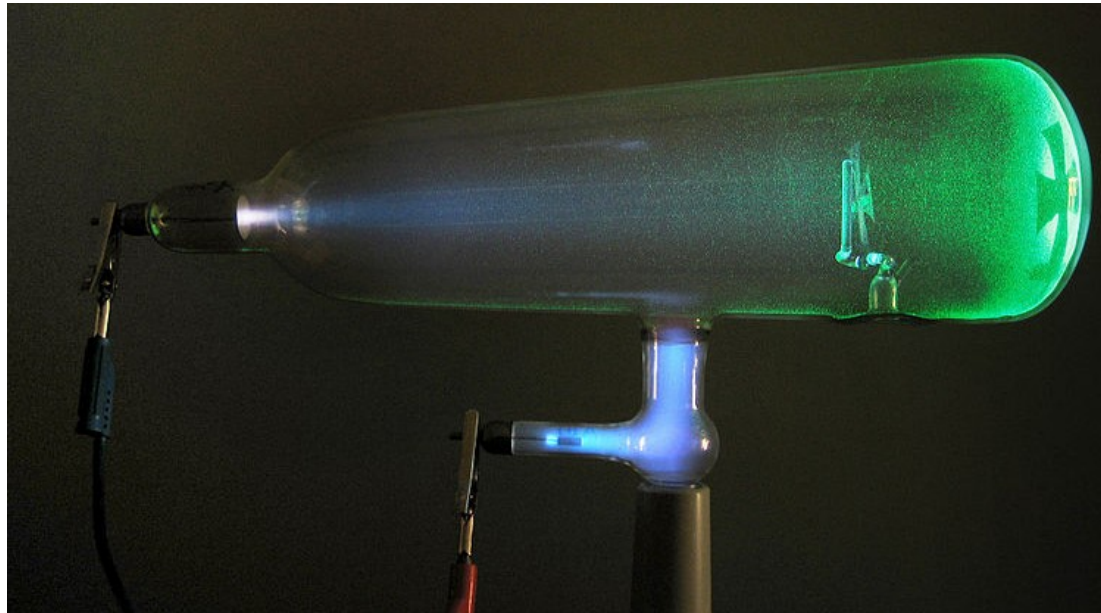


# elektronvolt

práce vnější síly při přenesení elektronu  
mezi body s potenciálovým rozdílem 1V

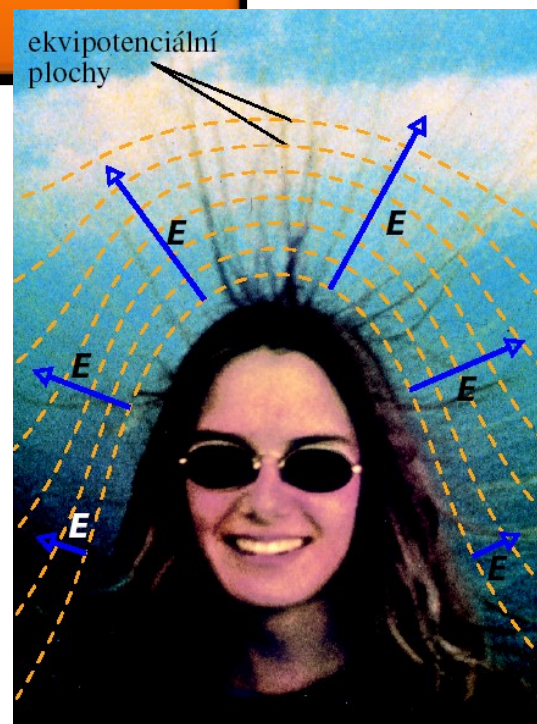
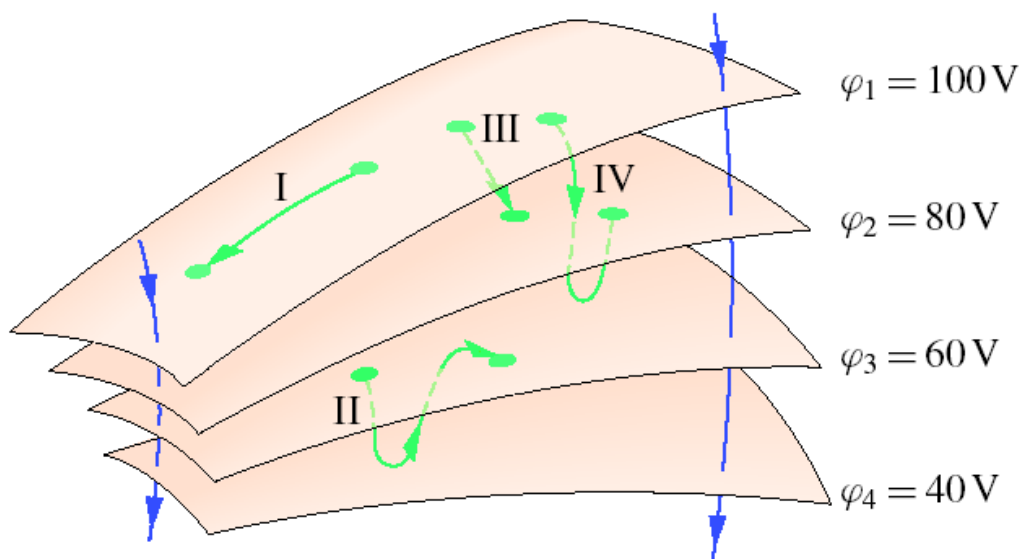
$$W_{ext} = E_{pf} - E_{pi} = Q_0 U = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{C} \cdot 1 \text{V} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{J}$$

$$1 \text{eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{J}$$



# ekvipotenciální plocha

- množina bodů se stejným potenciálem
- vždy kolmá k siločarám



$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

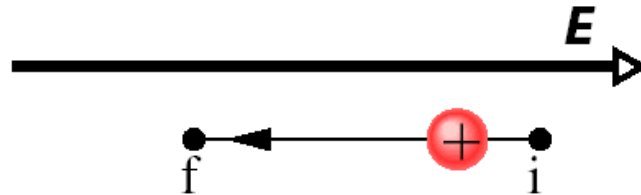
potenciál vždy klesá ve směru orientace siločar



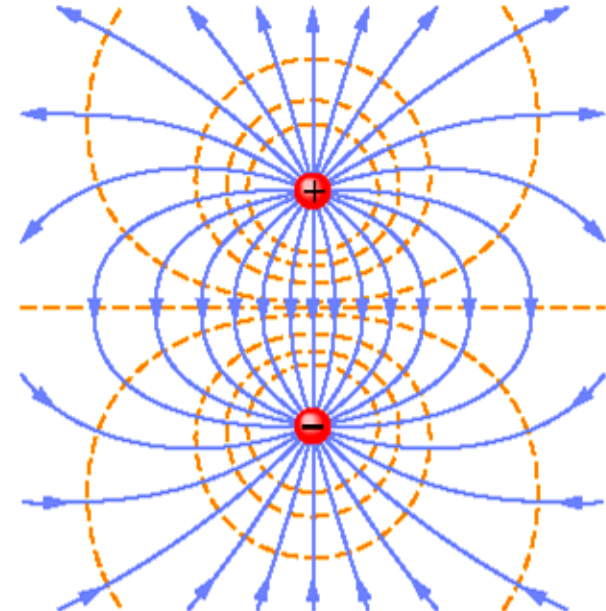
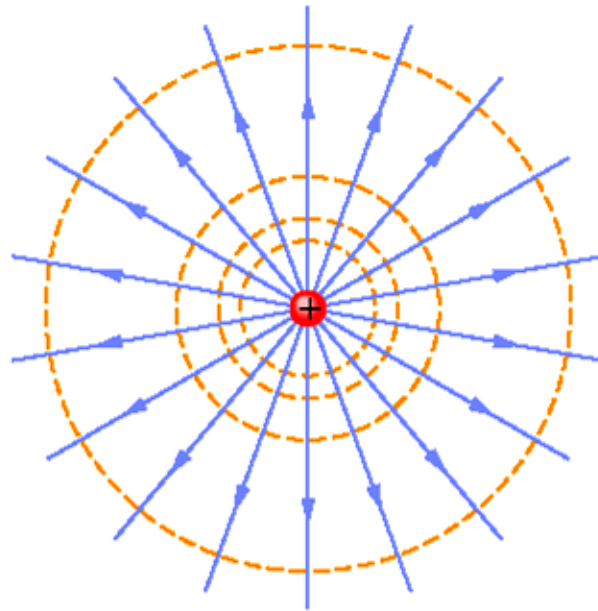
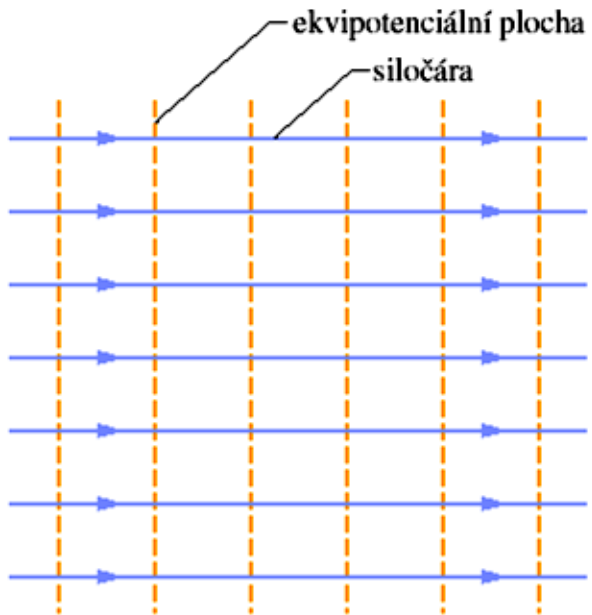
# kontrola

---

**KONTROLA** 1: Na obrázku znázorněný proton se pohybuje ve směru šipky v homogenním elektrickém poli o intenzitě  $\mathbf{E}$  z bodu (i) do (f). (a) Koná elektrické pole působící na proton kladnou, nebo zápornou práci? (b) Roste, nebo klesá elektrická potenciální energie protonu při jeho pohybu?

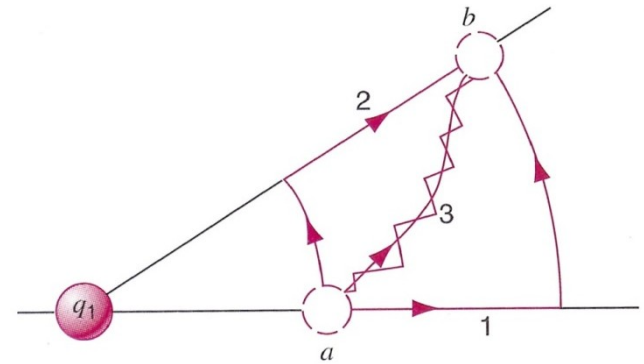
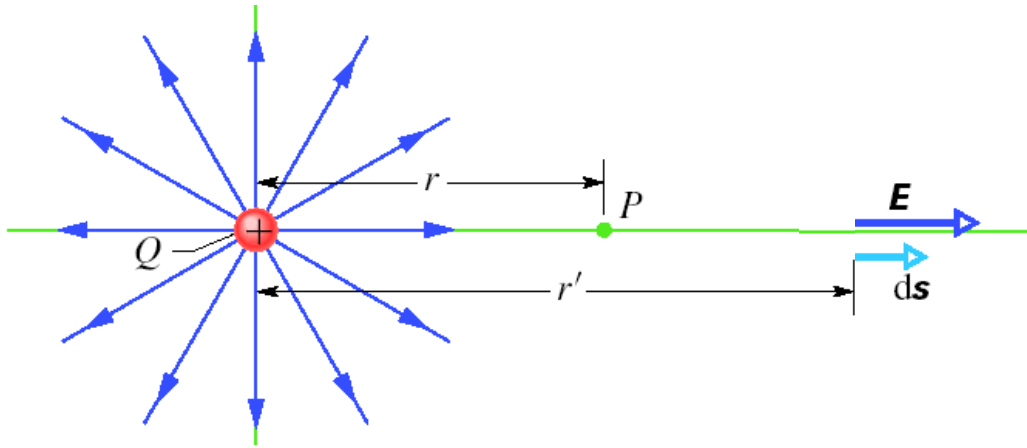


# příklady



# potenciál pole bodového náboje

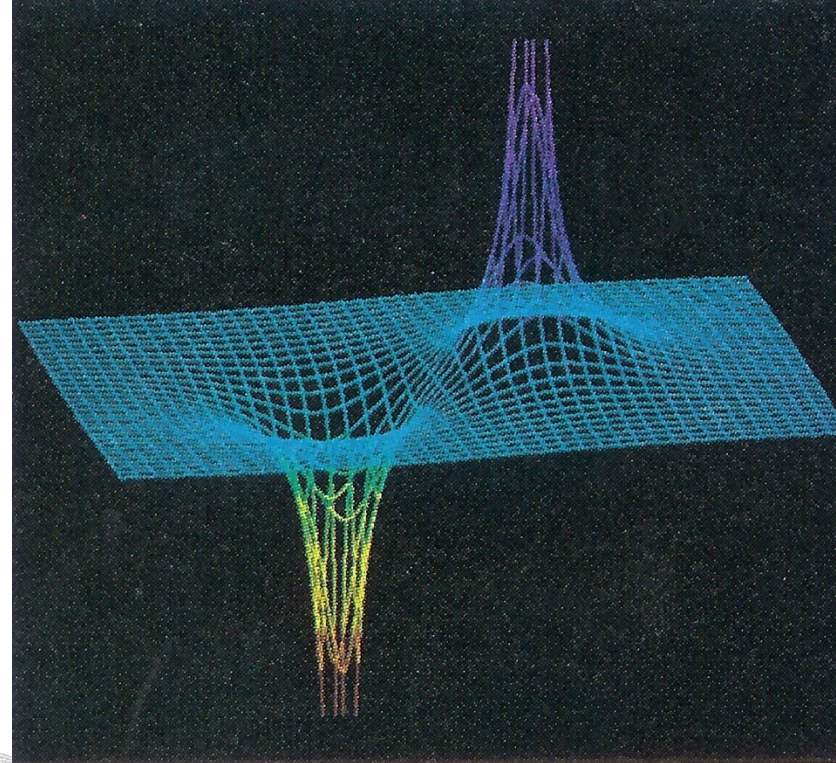
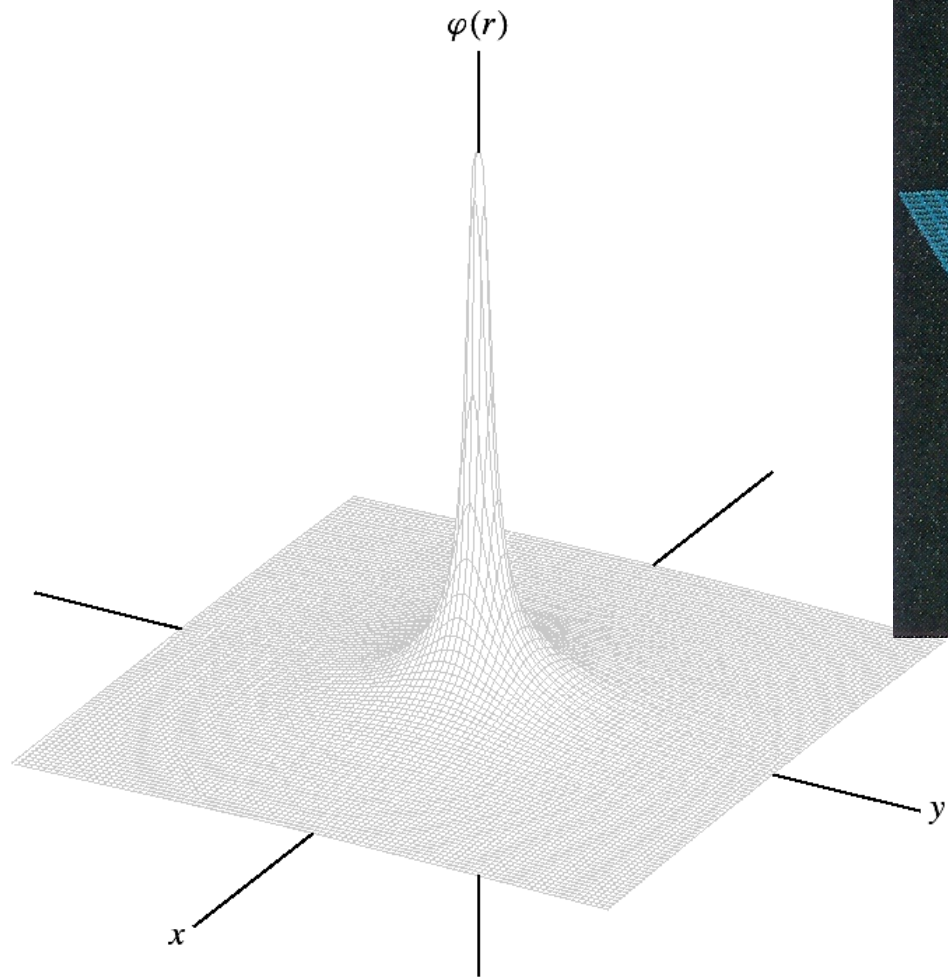
$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{r_1}^{r_2} E(r') dr'$$



$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr'}{r'^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$\varphi(\infty) = 0$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



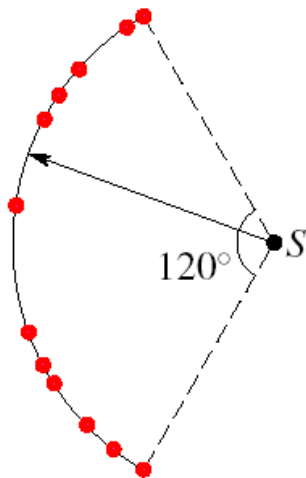
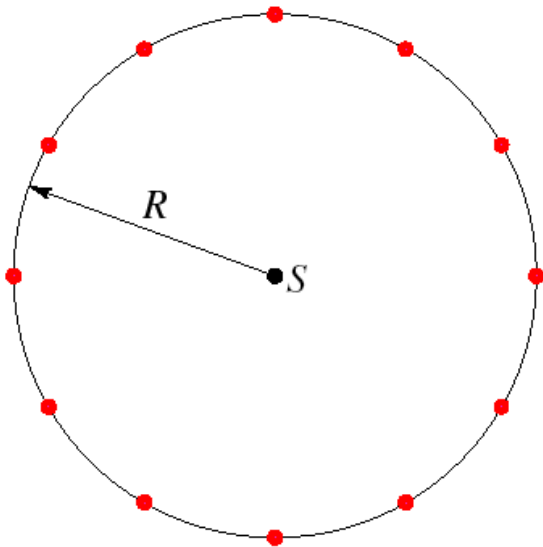
**Obr. 25.8** Počítačem vytvořený prostorový diagram průběhu elektrického potenciálu  $\varphi$  v bodech roviny  $z = 0$  v závislosti na vzdálenosti  $r$  od kladného bodového náboje v počátku roviny  $xy$ . Hodnoty potenciálu v bodech této roviny jsou vyneseny svisle. Nekonečná hodnota potenciálu  $\varphi$ , vyplývající z rov. (25.26) pro  $r = 0$ , není samozřejmě zobrazena.

# potenciál soustavy bodových nábojů

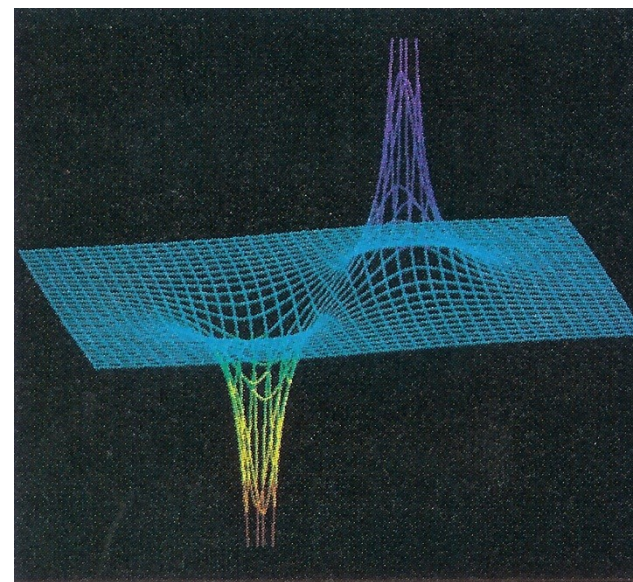
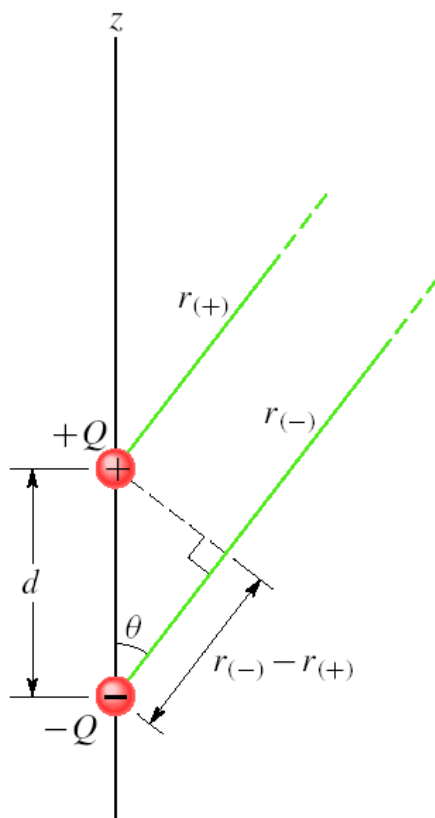
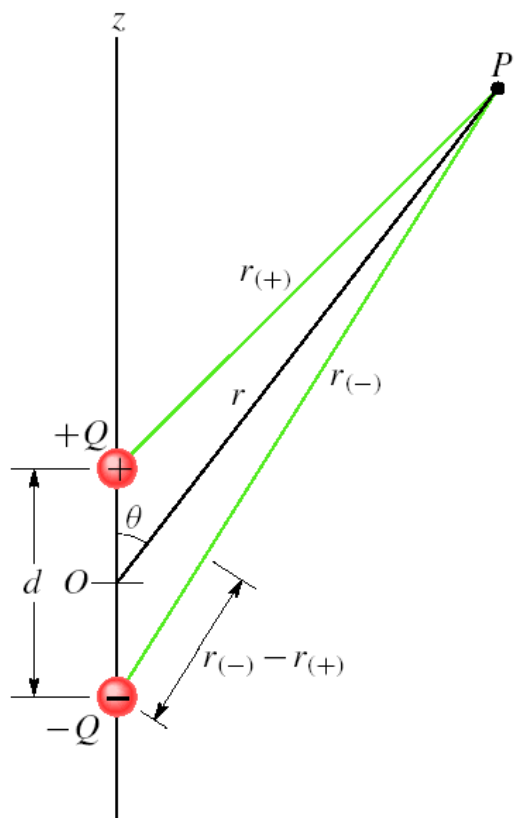
princip superpozice:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}$$



# potenciál pole elektrického dipólu



$$\varphi(r) \approx \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

# potenciál pole spojitě rozloženého náboje

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}$$

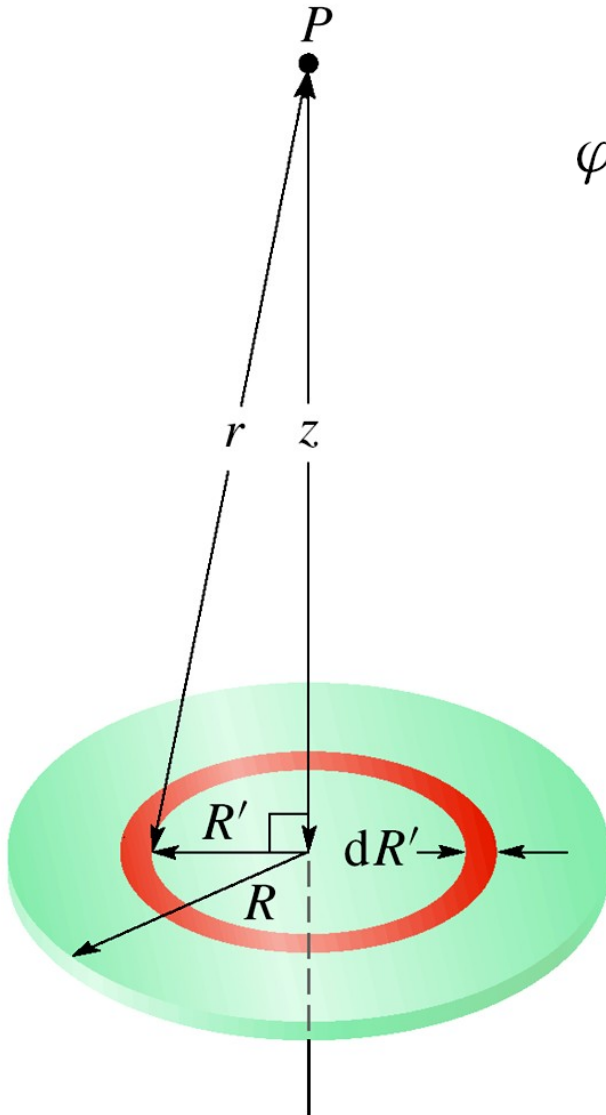
$$\varphi = \int d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r}$$

$$dQ = \rho dV \dots$$

Délková hustota náboje	$\tilde{\tau}$	$C \cdot m^{-1}$
Plošná hustota náboje	$\sigma$	$C \cdot m^{-2}$
Objemová hustota náboje	$\rho$	$C \cdot m^{-3}$



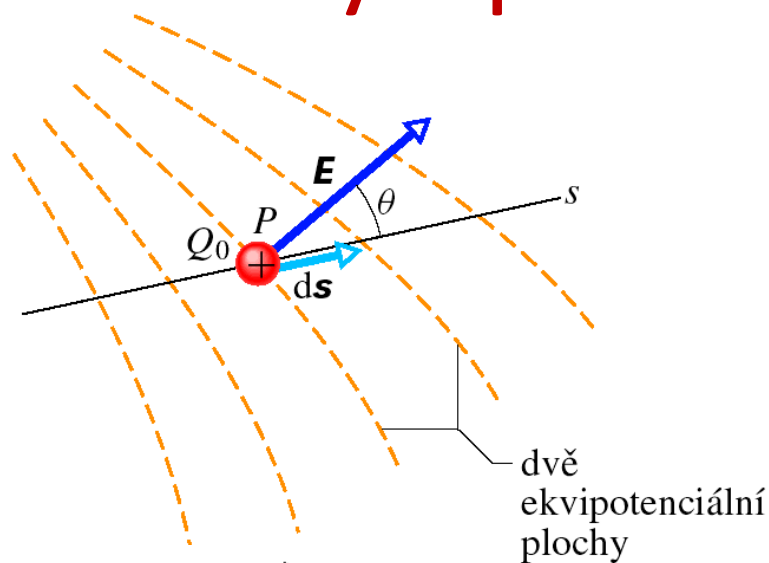
# potenciál rovnoměrně nabitého disku



$$\begin{aligned}\varphi &= \int d\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{R' dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z).\end{aligned}$$



# výpočet intenzity z potenciálu



$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\varphi$$

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

$$\vec{E} = \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi$$

## PŘÍKLAD 25.7

Elektrický potenciál v libovolném bodě na ose nabitého disku je určen rov. (25.37)

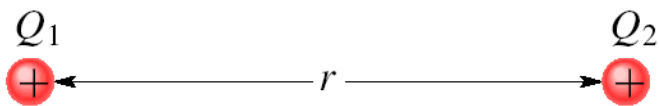
$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z).$$

Vyjděte z tohoto výrazu a odvoďte vztah pro intenzitu elektrického pole v libovolném bodě na ose disku.

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{d}{dz} (\sqrt{z^2 + R^2} - z) \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right). \end{aligned}$$

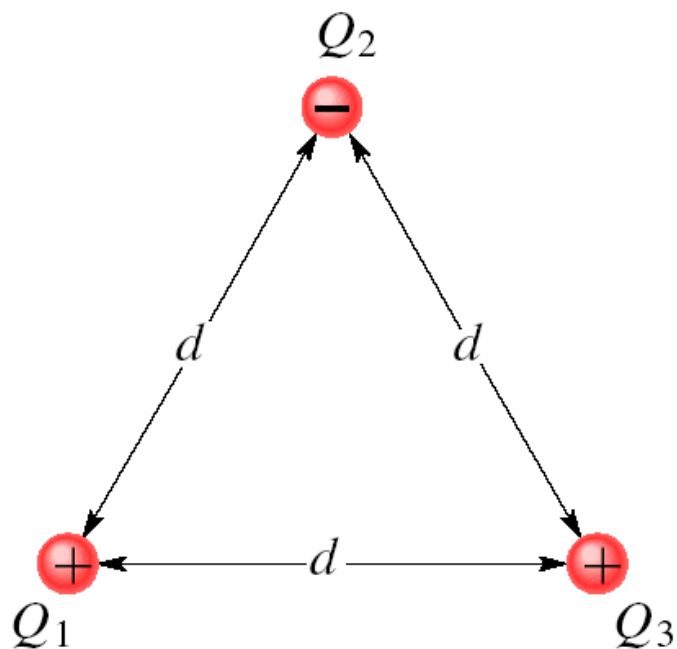
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \quad (\text{nabitý disk}).$$

# potenciální energie soustavy bodových nábojů



$$E_{p12} = \varphi_1 Q_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

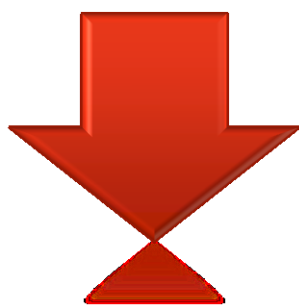
$$E_{p123} = \varphi_1 Q_2 + (\varphi_1 + \varphi_2) Q_3 = E_{p12} + E_{p13} + E_{p23}$$



potenciální energie soustavy nábojů je rovna práci, kterou musela vykonat vnější síla proti silám pole při sestavování této soustavy, tj. při přemístování každého náboje „z nekonečna“ do jeho výsledné polohy

# potenciál nabitého vodiče

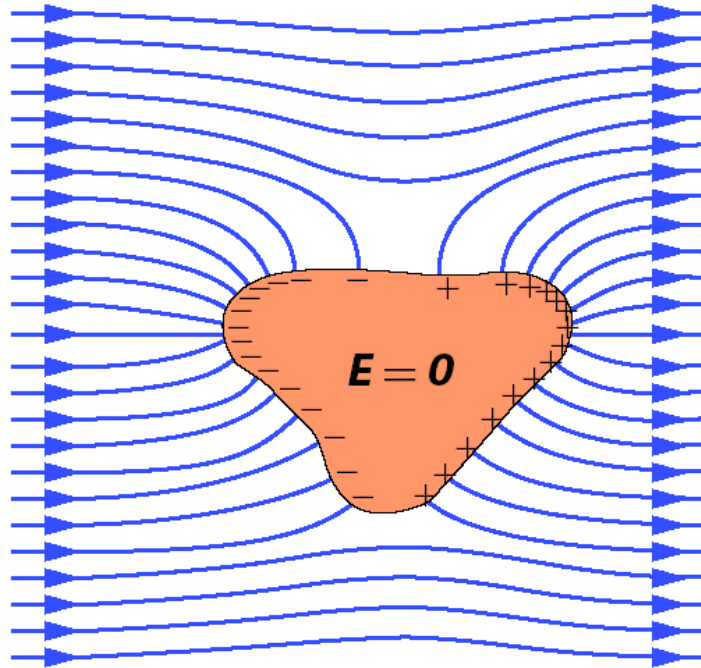
elektrická intenzita v izolovaném vodiči  
v ustáleném stavu je **vždy nulová**



$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

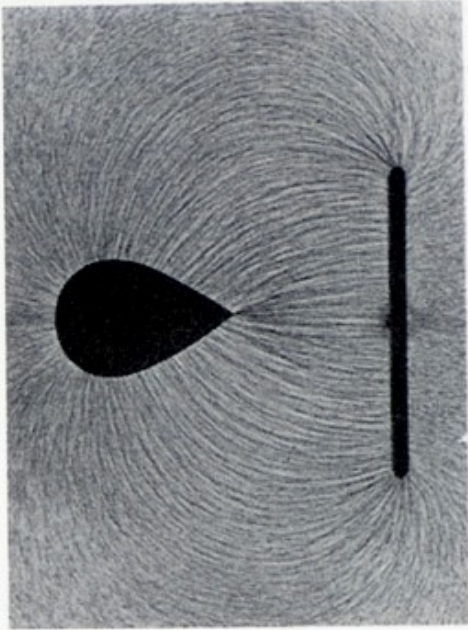
volný náboj na izolovaném vodiči se samovolně rozprostře po vnějším povrchu vodiče tak, že všechny body vodiče – na povrchu i uvnitř – mají stejný potenciál (to platí bez ohledu na to, zda vodič má či nemá dutinu)

# vodič ve vnějším poli

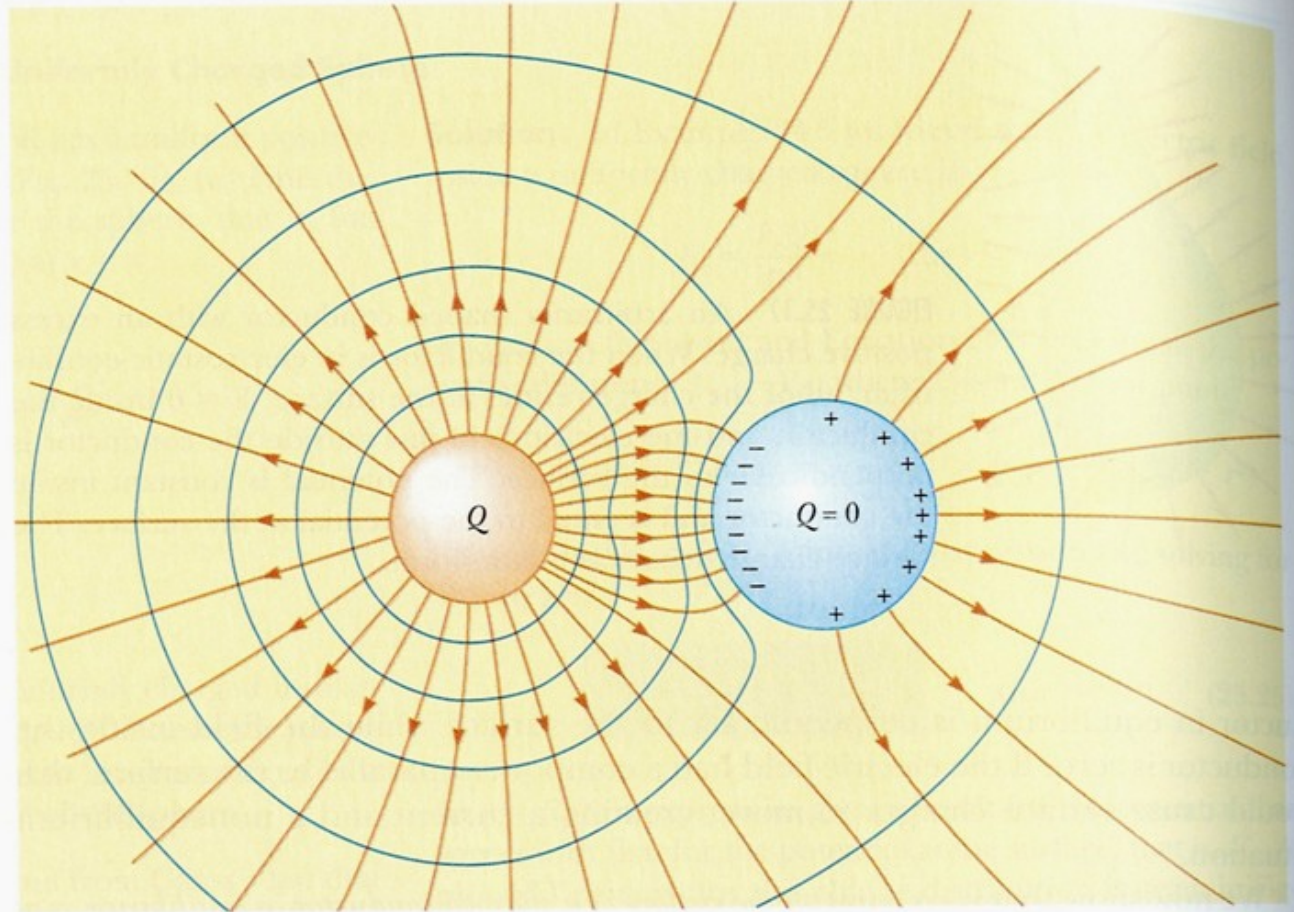


také v tomto případě je **intenzita ve vodiči nulová** a **potenciál je stejný ve všech bodech vodiče** – vnější pole je kompenzováno přerozdělením volného náboje ve vodiči a jeho siločáry vycházejí kolmo z povrchu vodiče (povrch vodiče je ekvipotenciální plochou)

# příklady: vodič ve vnějším poli



Electric field pattern of a charged conducting plate near an oppositely charged pointed conductor. Small pieces of thread suspended in oil align with the electric field lines. Note that the electric field is most intense near the pointed part of the conductor and at other points where the radius of curvature is small. (Courtesy of Harold M. Waage, Princeton University)



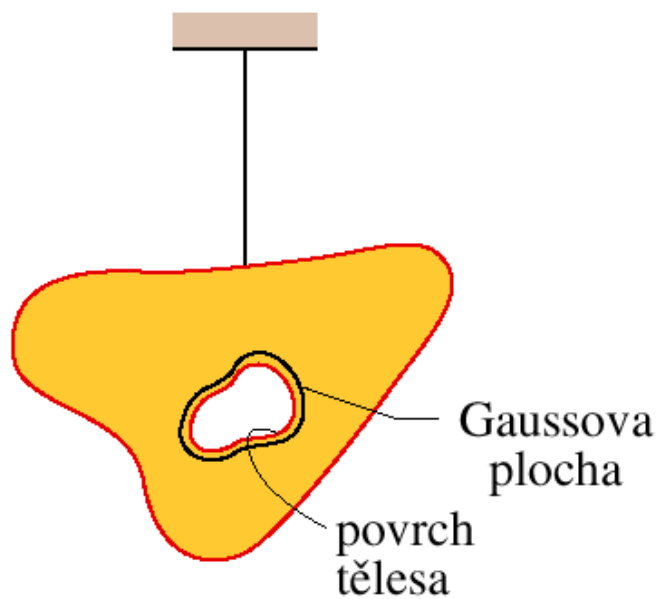
**FIGURE 25.19** The electric field lines (in red) around two spherical conductors. The smaller sphere on the left has a net charge  $Q$ , and the sphere on the right has zero net charge. The blue lines represent the edges of the equipotential surfaces. (From E. Purcell, *Electricity and Magnetism*, New York, McGraw-Hill, 1965, with permission of the Education Development Center, Inc.)



60,000 Volt Tesla Coil Corona Discharge



# vodič s dutinou

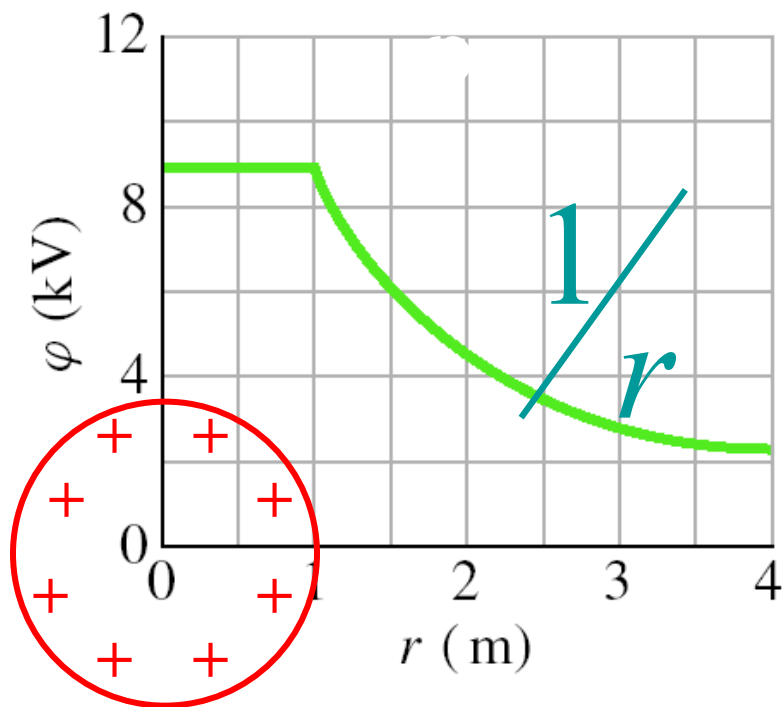


vnitřní plocha vodiče v ustáleném stavu je ekvipotenciální plochou – v dutině vodiče neobsahující náboj je proto **intenzita nulová** bez ohledu na vnější pole

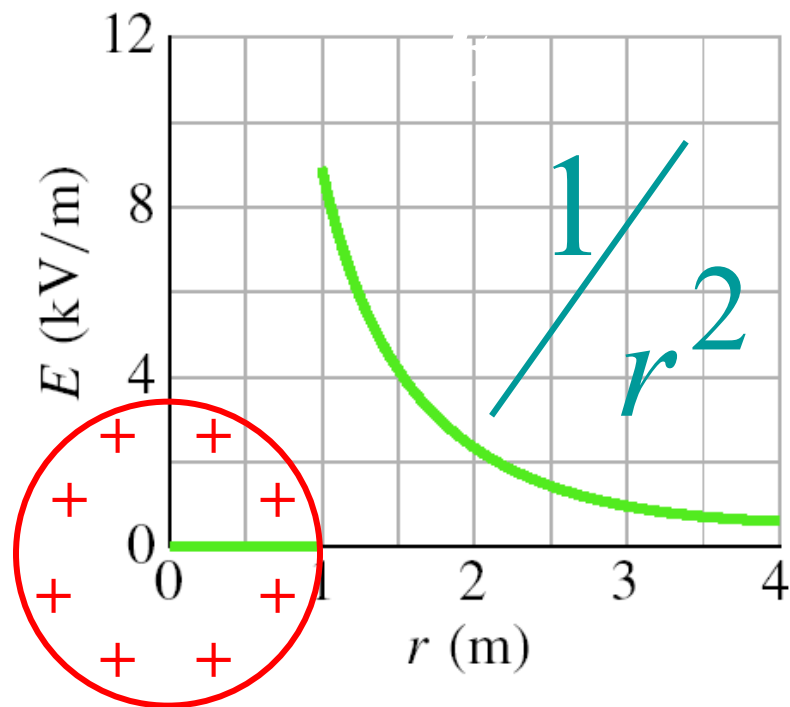




# kovová kulová slupka



(a)

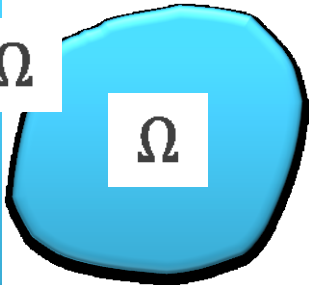


(b)

**Obr. 25.19** (a) Průběh potenciálu  $\varphi(r)$  nabité kulové plochy. (b) Průběh velikosti intenzity elektrického pole  $E(r)$  stejné kulové plochy. Na povrchu koule je intenzita nespojitá.

# Gaussova-Ostrogradského věta

$\partial\Omega$



$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} dV$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Gaussův zákon  
(tok):

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho dV$$

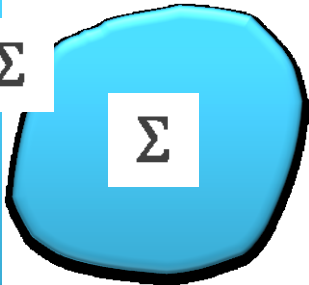
$$\left( \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho dV \right)$$

libovolné  $\iiint_{\Omega} \left( \operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) dV = 0$   $\rightarrow$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

# Stokesova věta

$\partial\Sigma$



$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \dots \right)$$

konzervativní  
pole (cirkulace)

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

libovolné

$$\left( \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \right)$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$



(nevírové pole)

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

# Poissonova rovnice

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$



$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(Poissonova rovnice)