Ústav fyzikální elektroniky PřF MU
http://www.physics.muni.cz/kof/vyuka/

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Fyzikální praktikum pro nefyzikální obory

Úloha č. 2: Statistické zpracování měření

jarní semestr 2012

1. Poprvé v laboratoři

Experimentální zdatnost fyzika se projevuje především při práci v laboratoři. Většina sem vstupuje se dvěmi přáními:

1. nic nerozbít
2. něco naměřit.

Jak tedy získat co nejvíce užitku a spáchat co nejméně škod?

1.1. Jak v laboratoři nic nerozbít.

Zapomeňte na heslo: „Kdo nic nedělá, nic nepokazí.“ Jeho logickým důsledkem je totiž „Kdo nic nedělá, nic se nenaučí.“ Raději si vemte za své **„Dříve než použiji ruce, použiji hlavu.“** V první hodině absolvujete školení bezpečnosti práce, které slouží jako návod, jak neublížit sobě ani laboratornímu zařízení. Použijete-li informace získané při tomto školení, zdravý selský rozum a trochu fyzikální úvahy, nemělo by se nikomu nic stát. A pokud si neporadíte vlastními silami, je možné poté oslovit vyučujícího v laboratoři a požádat o radu či pomoc. Bude-li otázka rozumná, jistě neodmítne.

1.2. Jak v laboratoři něco naměřit.

Zde platí heslo **„Nebát se a myslet.“** Přečtěte si návod, promyslete si, co vám není jasné, a pokuste se získat na své otázky odpovědi – nejprve sami, posléze s pomocí vyučujícího. A hlavně: nestůjte a pracujte, čas pracuje proti vám.

1.3. Otázky, které by měly napadnout toho, kdo se pokouší něco naměřit.

1. Co vlastně určuji, když měřím fyzikální veličinu?
2. Je to, co naměřím, skutečně hodnota dané fyzikální veličiny?

3. Lze měřit přesně? Kdy lze měření považovat za přesné?
4. Jakým způsobem vznikají při určování měřené hodnoty chyby?
5. Jak zohlednit chyby měření při určování měřené veličiny?
6. Jak vlastně výsledky měření zpracovat, aby jejich vypovídací hodnota byla co největší?

Nyní se na chvíli zastavte a sami popřemýšlejte o jednotlivých bodech. Důležité je udělat si vlastní názor. Hotovo? A teď porovnejte své odpovědi s našimi:

1. **Co vlastně určuji, když měřím fyzikální veličinu?**

   Měřím-li fyzikální veličinu x, určuji její velikost $\{x\}$ ve zvolených jednotkách $[x]$. Například: Měřím-li délku kratší hrany listu papíru formátu $A4$, dostanu $l = 210\,mm$, čili $\{x\} = \{l\} = 210$, $[x] = [l] = mm$. Ztráta jednoho z údajů z této dvojice není ztrátou poloviny údajů, ale výsledků celého měření.

2. **Je to, co naměřím, skutečně hodnota dané fyzikální veličiny?**

   Zůstaňme u příkladu délky kratší hrany listu papíru formátu $A4$. Naměřená hodnota **by měla být** $l = 210\,mm$, protože tato délka je definována mezinárodním standardem ISO 216 (DIN 476). Přesto však mohu naměřit například $l = 209\,mm$. Co může být příčinou?

   (a) Chyba je opravdu ve formátu papíru. V papírnách mají prostě špatně nastavenou řezačku. Ale je to jisté?

   (b) Chyba je chybou měřidla. Podlouhlé pravítko (30 cm dlouhé, plastové) má otlučené rohy a tím pádem poškozený začátek stupnice.

   (c) Chyba je chybou obsluhy přístroje.

   (d) Je to vůbec chyba? Změřme ještě jednou: $l = 211\,mm$. A znovu: $l = 210\,mm$. A ještě několikrát .... zde nebude vysvětlení patrně elementární, musíme si přizvat na pomoc matematickou statistiku.

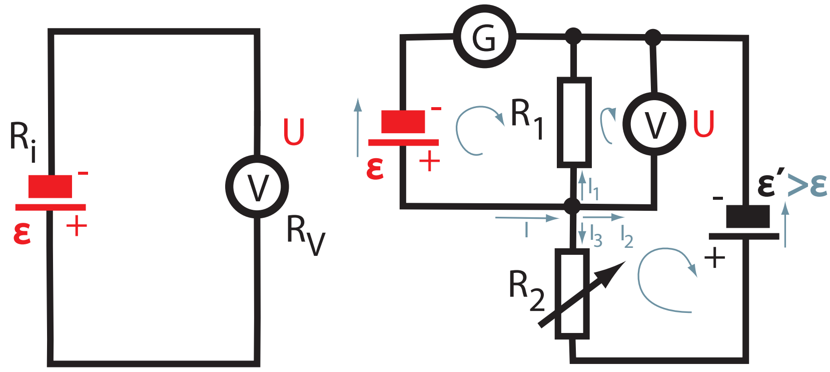
3. **Lze měřit přesně? Kdy lze měření považovat za přesné?**

   Přešně měřit nelze, ale lze měřit s vyhovující přesností pro daný účel, pro který měření provádíme. Přesnost měření lze zvýšit různými metodami, například metodou kompenzační.

   Proberme situaci na příkladě měření elektromotorického napětí. Při měření elektromotorického napětí obvykle postupujeme tak, že připojíme voltmetr přímo paralelně ke zdroji. Dopouštíme se tak ale systematické chyby. Vztah mezi svorkovým a elektromotorickým napětím je

   $$U = \frac{\epsilon}{1 + \frac{R_i}{R_V}},$$

   voltmetr je pro zdroj zátěží, teče jím proud, který zmenšuje hodnotu napětí na zdroji. Je-li vnitřní odpor voltmetru dostatečně velký (matematicky $R_V \to \infty$, fyzikálně $R_V >> R_i$), je naměřené napětí přímo napětím elektromotorickým (viz levá část obrázku 1.1). Pokud ne, dochází ve voltmetru k proudové ztrátě a naměřené napětí je menší než elektromotorické. V tomto případě lze proudovou ztrátu ve voltmetru kompenzovat připojením dalšího zdroje (viz pravá část obrázku 1.1). Napětí vytvořené pomocným zdrojem ε' na odporu R_1 může při vhodném nastavení rezistoru R_2



Obrázek 1.1: Měření elektromotorického napětí – přímá a kompenzační metoda

kompenzovat úbytek napětí na zatíženém zdroji. Galvanoměrem G v tomto případě neteče proud I a hodnota napětí U na odporu R_1 je přímo rovna elektromotorickému napětí zdroje ε.

4. **Jakým způsobem vznikají při určování měřené hodnoty chyby?**

   Způsobů je mnoho. Chyby rozlišujeme na

   (a) Hrubé: Vznikají přehlédnutím, překlepem, nevratnou či náhlou změnou laboratorních podmínek (např. polití aparatury vodou při měření vlhkosti vzduchu).

   (b) Systematické: Většinou chyba metody (typickým příkladem je měření proudu a napětí metodou A a B v úloze 3 ?toto je číslování FPNO, dávat sem odkaz? nebo níže uvedené měření elektromotorického napětí zdroje)

   (c) Náhodné: těžko popsatelné, opravdu náhodné vlivy. Můžeme doufat jen v jednu věc, a to, že ve velkých souborech dat jsou tyto náhodné vlivy matematicky popsatelné.

5. **Jak zohlednit chyby měření při určování měřené veličiny?**

   Jak zohlednit chyby měření při určování měřené veličiny? Tímto se zabývá matematická statistika a teorie pravděpodobnosti. Minimum jejích základních poznatků potřebných pro fyzika je uvedeno v kapitole 2..

6. **Jak vlastně výsledky měření zpracovat, aby jejich vypovídací hodnota byla co největší?**

   Přečtěte si kapitolu 2. a směle se dejte do experimentování. Hodně úspěchů a málo škod!

2. Jak zpracovat naměřené hodnoty

Jak vlastně zpracovat naměřené hodnoty s užitím matematické statistiky? Tento text by měl přinést stručný návod s odkazy na podrobnější matematické zdůvodnění prováděných akcí, ať již v dodatcích či v literatuře.

2.1. Měření „statického stavu“

Jedná se o měření veličin, jejichž hodnoty se s časem nemění, například délek, objemů, hmotností, velikosti stejnosměrného proudu či napětí (nebo velikostí efektivních hodnot veličin pro střídavý proud ....). Zcela nevhodné je používat následující postupy na veličiny, jejichž hodnoty se s časem mění (například teplota při zahřívání kalorimetru) nebo na takové, kdy má být výsledkem měření graf (VA charakteristiky, časové či teplotní závislosti).

2.1..1 Přímo měřené veličiny

Veličiny měřené přímo pomocí měřícího přístroje cejchovaného v jednotkách těchto veličin, např. délka (metr, pravítko, posuvné měřítko, mikrometrický šroub), proud a napětí (ampérmetr, voltmetr), čas (stopky, měřící programy v počítači), hustota kapaliny (Mohrovými vážkami, nikoliv pyknometrickou metodou!) a další.

Vztahy používané pro výpočet chyb jsou odvozeny na základě následujících předpokladů:

i. Při každém měření působí m náhodných vlivů, které jsou vzájemně nezávislé.

ii. Každý z těchto vlivů dává vznik elementární chybě d a to buď kladné, nebo záporné.

iii. Kladné i záporné elementární chyby jsou stejně časté, tj. pravděpodobnost vzniku chyby +d je 1/2 a pravděpodobnost vzniku chyby -d je rovněž 1/2.

Za těchto předpokladů lze použít binomické rozdělení (pro veličiny s diskrétními hodnotami, což ve fyzice téměř neexistuje, snad jen počet pulsů při radioaktivních měřeních, a ty se řídí Poissonovým rozdělením) anebo normální Gaussovo rozdělení (spojité spektrum hodnot, nejčastější používané rozdělení pro zpracovávání fyzikálních veličin).

Zpracování hodnot pro přímo měřenou veličinu:

(a) Nejprve spočítejme *aritmetický průměr* $\bar{x}$ n naměřených hodnot x_i:

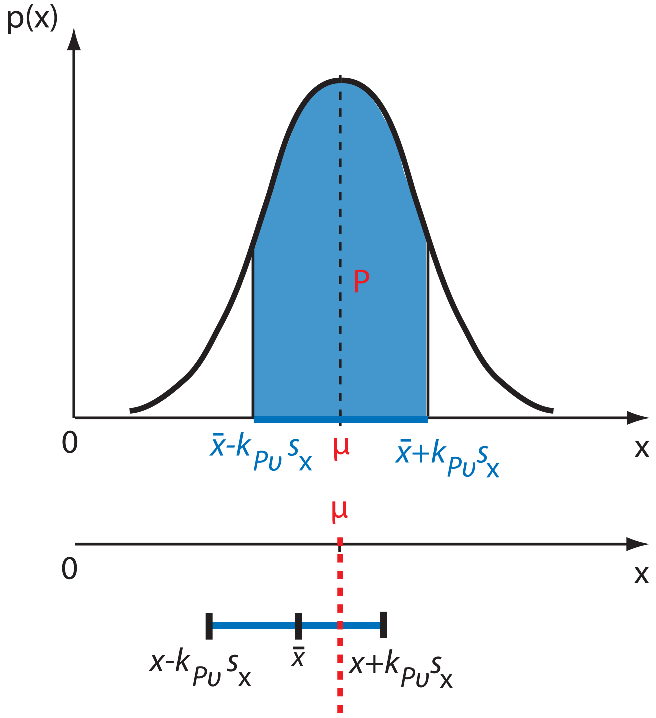
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2.1}$$

(b) *chyba jednoho měření* se určí jako *směrodatná odchylka jednoho měření*

$$s1_x = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \tag{2.2}$$

(c) *chyba n měření* se určí jako směrodatná odchylka jednoho měření dělená odmocninou z počtu měření (lze odvodit například pomocí zákona šíření chyb). Nazývá se pak *směrodatná odchylka aritmetického průměru*

$$s_x = \frac{s1_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \tag{2.3}$$



Obrázek 2.2: Význam intervalu spolehlivosti

(d) Odstraňme ze souboru n měření *hrubé chyby*. Hodnoty zatížené těmito chybami se výrazně odlišují od ostatních hodnot. Je-li interval spolehlivosti dostatečně široký, leží téměř všechny naměřené hodnoty nezatížené hrubou chybou uvnitř tohoto intervalu (viz text následujícího odstavce a obrázek 2.2 a tabulka Studentových koeficientů /1/). Konkrétně pro fitování souboru naměřených hodnot Gaussovým rozložením leží 99,73% hodnot uvnitř intervalu $\langle \bar{x} - 3.s_x, \bar{x} + 3.s_x \rangle$. Postupujme tedy takto:

   i. Ze souboru naměřených hodnot určeme aritmetický průměr $\bar{x}$ a směrodatnou odchylku aritmetického průměru s_x.

   ii. Ze souboru vyškrtejme všechny hodnoty ležící **vně** intervalu $\langle \bar{x} - 3.s_x, \bar{x} + 3.s_x \rangle$.

   iii. Postup uvedený v bodech i. a ii. opakujme tak dlouho, dokud všechny naměřené hodnoty nebudou ležet **uvnitř** intervalu $\langle \bar{x} - 3.s_x, \bar{x} + 3.s_x \rangle$.

   S takto upraveným souborem hodnot zbývá určit interval spolehlivosti pro zvolenou hladinu spolehlivosti (viz následující bod).

(e) Pomocí aritmetického průměru $\bar{x}$ a směrodatné odchylky aritmetického průměru s_x lze vytvořit *interval spolehlivosti* $[\bar{x} - t_{P\nu}s_x \leq \mu \leq \bar{x} + t_{P\nu}s_x]$, v němž s určitou pravděpodobností P leží měřené hodnoty veličiny x (viz obrázek 2.2, μ je střední hodnota rozdělení, kterým se pokoušíme fitovat rozložení naměřených veličin).

   Tuto pravděpodobnost P nazýváme *hladinou (úrovní) spolehlivosti*, koeficienty $t_{P\nu}$ jsou pro tyto úrovně tabelovány (Jde o koeficienty tzv. Studentova rozdělení, které má jediný volný parametr, a to počet stupňů volnosti $\nu = n - 1$. Pro nekonečný počet měření přechází toto rozdělení v Gaussovo normální rozdělení – viz tabulka /1/.).

Výsledek měření pak zapisujeme ve tvaru

$$x = (\bar{x} \pm t_{P\nu} s_x)\,[X]\ \textbf{pro}\ P = \ldots\%. \tag{2.4}$$

(f) Zvažme ještě *vliv chyby měřících přístrojů.* Je to chyba *krajní* (tradičně se značí κ), to znamená chyba pro hladinu spolehlivosti 99,73%. U měřících přístrojů se stupnicí má velikost jednoho dílku stupnice, u digitálních měřících přístrojů bývá uvedena v manuálu, u ručkových elektrických přístrojů se počítá pomocí třídy přesnosti, uvedené přímo na stupnici, u měření stopkami je potřeba započítat i reakční dobu. Její velikost porovnejme s velikostí směrodatné odchylky aritmetického průměru přepočítanou pomocí Studentových koeficientů na stejnou hladinu spolehlivosti. **Celková chyba je pak součtem** chyby určené směrodatnou odchylkou a chyby měřícího přístroje.

Pokud je chyba měřícího přístroje mnohem menší než chyba určená směrodatnou odchylkou, můžeme ji zanedbat. Pokud však je chyba určená směrodatnou odchylkou nulová (například posuvným měřítkem měříme neustále stejnou hodnotu délky), neznamená to, že měření je zcela bez chyby, ale že je zatíženo chybou měřícího přístroje!!!

(g) Chyby měřících přístrojů pro konkrétní měření

i. *Přístroje s lineární stupnicí* (například: pravítko, posuvné měřítko, rtuťový teploměr, U-trubice na měření tlaku, ...). Zde je krajní chyba rovna velikosti jednoho dílku stupnice přístroje, například 1mm u běžného pravítka.

ii. *Ručkové měřící přístroje* (voltmetr, ampérmetr, ...) Zde je třeba umět dešifrovat symboly uvedené pod stupnicí (napsat na toto místo tabulku symbolů pro analogové měřící přístroje nebo s ní studenty vůbec neseznamovat?). Pro určení chyby je důležité číslo uvedené nad vodorovnou čárkou (u stejnosměrných měřáků) nebo nad vlnovkou (u střídavých měřáků). Toto číslo udává krajní chybu relativně, tj. v procentech z daného rozsahu.

Příklad: Měřeni analogovým voltmetrem

Analogový multimetr METRAHIT1A (http://www.metra.cz/)
měřící rozsah 0-50 V stejnosměrného napětí
krajní chyba je 2,5% z uvedného rozsahu (třída přesnosti)
byly naměřeny dvě hodnoty, a to $U_1 = 8\,V$ a $U_2 = 42\,V$.
Krajní chyba je tedy $\kappa U = \frac{2,5}{100}.50\,\mathrm{V} = 1,25\,\mathrm{V}$. Naměřené hodnoty je třeba uvést s chybou jako

$$\begin{aligned} U_1 &= (8,00 \pm 1,25)\,\mathrm{V} = (8 \pm 1)\,\mathrm{V}, \\ U_2 &= (42,00 \pm 1,25)\,\mathrm{V} = (42 + 1)\mathrm{V}. \end{aligned}$$

Napětí U_1 je zatíženo daleko větší chybou než U_2, stačí určit relativní chybu δ_U jako podíl chyby κU a naměřené hodnoty napětí:

$$\begin{aligned} \delta_{U_1} &= \frac{\kappa U_1}{U_1} = \frac{1\,\mathrm{V}}{8\,\mathrm{V}} = 12,5\%, \\ \delta_{U_2} &= \frac{\kappa U_2}{U_2} = \frac{1\,\mathrm{V}}{42\,\mathrm{V}} = 2,4\%. \end{aligned}$$

Tento výpočet ukazuje, proč je vhodné při měření analogovým přístrojem volit rozsah stupnice tak, aby se ručička pohybovala za polovinou stupnice.

---

iii. *Digitální měřící přístroje* - je potřeba mít manuál, ve kterém je uvedena chyba přístroje. Z něj vyčteme, jak chybu měření určovat. Většinou má chyba dvě složky: procento z měřené hodnoty a digits (d, dgs) = počet jednotek na posledním desetinném místě daného rozsahu.

Příklad: Měřeni digitálním voltmetrem

Pro digitální multimetr METRAHIT WORLD je pro stejnosměrný rozsah napětí do 60 V uvedena chyba ($\pm 1\% + 3d$). První číslo udává procento z měřené hodnoty, druhé číslo je počet jednotek na posledním desetinném místě aktuálního rozsahu (tzv. digits).
Například měříme-li na rozsahu 60 V napětí $U_1 = 8,132\,\mathrm{V}$, je celková krajní chyba rovna

$$\kappa U_1 \quad = \quad \pm 1\% \mathrm{z}\, 8,132\,\mathrm{V} \pm 3 * 0,001\,\mathrm{V} = (0,081 + 0,003)\,\mathrm{V} = 0,084\,\mathrm{V}.$$

Měříme-li na témže rozsahu napětí $U_2 = 42,12\,V$ (displej má pro čísla 4 pozice), je celková krajní chyba rovna

$$\kappa U_2 \quad = \quad \pm 1\% \mathrm{z}\, 42,12\,\mathrm{V} \pm 3 * 0,01\,\mathrm{V} = (0,42 + 0,03)\,\mathrm{V} = 0,45\,\mathrm{V}.$$

Relativní chyby pak jsou

$$\begin{aligned} \delta_{U_1} &= \frac{\kappa U_1}{U_1} = \frac{0,084\,\mathrm{V}}{8,132\,\mathrm{V}} = 1,03\%, \\ \delta_{U_2} &= \frac{\kappa U_2}{U_2} = \frac{0,45\,\mathrm{V}}{42,12\,\mathrm{V}} = 1,07\%. \end{aligned}$$

Měření velké i malé hodnoty na témže rozsahu jsou srovnatelně přesná.

---

iv. *Měření pomocí počítače* hodí se něco napsat?

(h) Dodatky:

i. Dopsat zdůvodnění předchozích vztahů z pozice matematické statistiky nebo dát jen odkazy na vhodnou literaturu? Napsat něco o Gaussově a jiných rozděleních? Jak moc důkladně?

2.1..2 Nepřímo měřené veličiny

Veličiny měřené pomocí měřícího přístroje cejchované v jiných jednotkách (např. termočlánek, kdy je teplota určena pomocí naměřených hodnot napětí, nebo kapalinový teploměr, kdy je teplota určena výškou hladiny kapaliny v kapiláře) anebo častěji počítané pomocí přímo měřených veličin (hustota kapaliny (pyknometrickou metodou, nikoliv Mohrovými vážkami!), objem tělesa (výpočtem z rozměrů, ne pomocí kapaliny a odměrného válce), výkon (pomocí proudu a napětí, ne pomocí wattmetru), povrchové napětí (kapková metoda, odtrhávací metoda, ...) a další...).

Vztahy používané pro výpočet chyb jsou odvozeny na základě následujících předpokladů:

i. Nepřímo měřená veličina y závisí na n přímo měřených veličinách, $n \geq 1$:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.5}$$

ii. Pro platnost zákona šíření chyb předpokládáme, že tato funkce není silně nelineární a neprochází v místě aritmetického průměru hodnot x_1 až x_n extrémem.

iii. Pokud není funkce silně nelineární a pokud mají veličiny x_1 až x_n normální rozdělení, má veličina y také normální rozdělení.

Zpracování hodnot pro nepřímo měřenou veličinu:

(a) Určeme aritmetické průměry $\bar{x_1}, \bar{x_2}, \dots \bar{x}_n$.

(b) Určeme výše uvedeným postupem směrodatné odchylky arimetrického průměru $s_{x_1}, s_{x_2}, \dots s_{x_n}$ (včetně vyloučení hrubých chyb).

(c) Určeme hodnotu nepřímo měřené veličiny

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n). \tag{2.6}$$

(d) Určíme odchylku nepřímo měřené veličiny

$$s_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2_{x_1=\bar{x}_1} s^2_{x_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2_{x_2=\bar{x}_2} s^2_{x_2} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2_{x_n=\bar{x}_n} s^2_{x_n}}, \tag{2.7}$$

kde symbol $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_i=\bar{x}_i}$ znamená provést parciální derivaci funkce f podle proměnné x_i a výsledek vyčíslit pro $x_i = \bar{x}_i$ pro každé $1 \le i \le n$ (při parciálním derivování je jedinou proměnnou zkoumané x_i, ostatní veličiny $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n$ se při něm považují za konstanty).

(e) Dopočítejme ještě relativní chybu

$$\delta_{\bar{y}} = \frac{s_y}{\bar{y}} \tag{2.8}$$

(f) Pokud platí bod **iii.**, má veličina y normální rozdělení, a pak lze stanovit i interval spolehlivosti

$$y = (\bar{y} \pm k_{P\infty} s_y) \text{ pro P} = \dots \%.$$

Je ovšem potřeba mít jednotlivé chyby přímo měřených veličin převedené na stejné hladiny spolehlivosti.

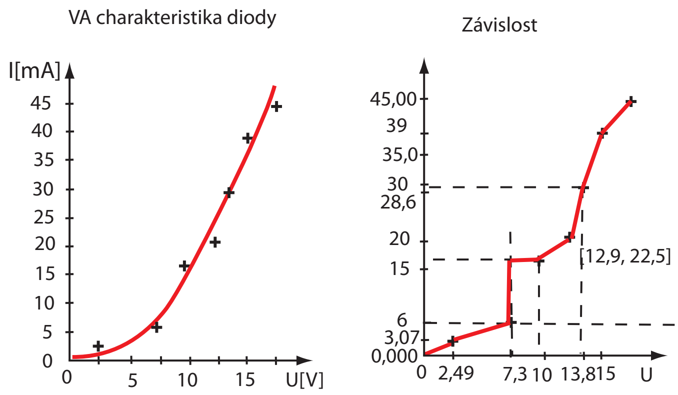
(g) Pro případ některých konkrétních funkcí $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je jednodušší spočítat nejprve relativní chybu $\delta_{\bar{y}}$ a z ní teprve chybu absolutní (směrodatnou odchylku). Toto lépe ukáže cvičení – matematické (dodatek A) i aplikace na určování tíhového zrychlení z doby kyvu matematického kyvadla (dodatek B).

2.2. Měření závislostí a jejich zpracování

2.2..1 Kreslení grafů

Graf má být především přehledný a názorný. Při jeho kreslení se držíme těchto pravidel:

(a) Na vodorovnou osu vynášíme nezávisle proměnnou, na svislou závisle proměnnou.



Obrázek 2.3: Dobře a špatně zakreslený graf

(b) Jednotky na osách volíme tak, aby graf pokryl na šířku i výšku cca 80% plochy. (Na každé ose může být jiné měřítko, jde o to, aby graf nebyl natěsnán v úzkém proužku.)

(c) Průsečík os nemusí být počátek, aby v grafu nebylo zbytečně volné místo bez bodů.

(d) Stupnice popisujeme rovnoměrně, nevynášíme na ně naměřené hodnoty, osu ukončíme šipkou, nezapomeneme na konec osy napsat měřenou veličinu a její jednotku.

(e) Volbu měřítek provádíme pokud možno tak, aby přesnost odečtu bodů z grafu byla srovnatelná s přesností měření.

(f) Do grafů nezakreslujeme mřížky, propojení jednotlivých bodů k hodnotám na osách, a to především v případě, že rýsujeme na milimetrový papír.

(g) Body vyznačujeme křížky, kolečky, čtverečky, ..., vhodné velikosti, nikdy ne tečkami, nikdy k nim nevypisujeme hodnoty.

(h) Stupnice volíme tak, aby prokládaná závislost byla co nejvíce lineární (můžeme například používat nejen lineární, ale i kvadratické či logaritmické stupnice).

(i) Prokládáme-li křivku bez použití počítače nebo bez znalostí parametru prokladu, čili tzv. „od oka“, prokládáme křivku hladkou, bez zlomů, tak aby počet bodů pod a nad křivkou byl stejný. Nikdy nespojujeme body lomenou čarou!

(j) Je-li v grafu více křivek, odlišíme je barevně či typem čáry a přidáme legendu.

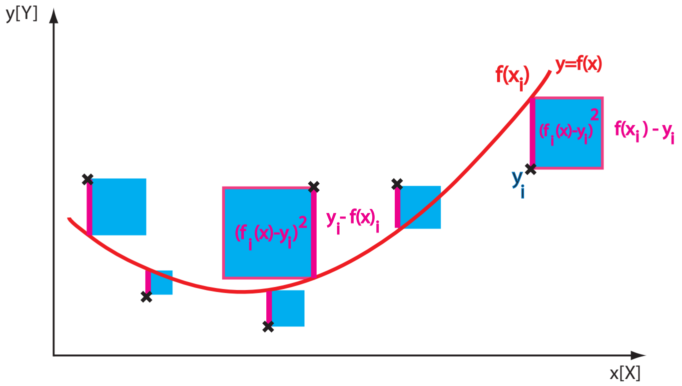
(k) Někdy je vhodné do grafu vynášet i interval spolehlivosti pro jednotlivé hodnoty, například pomocí krajní chyby (P=99,73%).

(l) Do záhlaví grafu zapíšeme název vystihující obsah grafu.

Na obrázku 2.3 jsou příklady správně a nesprávně nakresleného grafu.

2.2..2 Metoda nejmenších čtverců – proklad grafů, obvykle přímkou

Jedná se o metodu proložení funkce $y = f(x)$, která má co nejlépe vystihnout závislost, která je mezi n naměřenými hodnotami $[x_i, y_i]$, $i = 1 \dots n$. Lze ukázat (například



Obrázek 2.4: Grafické znázornění metody nejmenších čtverců

viz [6]), že takováto funkce má splňovat podmínku, že funkce S má minimální hodnotu,

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - y_i\right)^2 .$$

Funkce S je součtem kvadrátů rozdílů zadaných a funkčních hodnot, což vlastně určuje název metody (viz obrázek 2.4). Zderivováním tohoto součtu kvadrátů odchylek S podle parametrů A_j funkce $f(x)$ a nalezením jejich minima získáme hodnoty parametrů funkce $f(x)$, pro niž se tato funkce nejvíce blíží naměřeným hodnotám y_i.

Platnost metody nejmenších čtverců:

- Mezi veličinami x a y opravdu existuje závislost.
- K určení hledaných parametrů funkce f je potřeba naměřit alespoň tolik různých dvojic $[x_i, y_i]$, kolik je hledaných parametrů (např. na proklad přímkou $y = A + B.x$ alespoň dvě dvojice).
- Předpokládáme, že hodnoty x nejsou zatíženy žádnou chybou (pokud tento předpoklad neplatí, používáme tento postup vědomě se systematickou chybou. Přesnější je v takovémto případě použít ortogonální regresi [4]).
- Hodnoty y_i jsou náhodné, nejsou však zatíženy hrubými nebo systematickými chybami.

Vztahy pro parametry nejčastěji používaných závislostí $f(x)$:

- **Lineární závislost** $y = A + B.x$ (máme n naměřených dvojic $[x_i, y_i]$, $i = 1 \ldots n$, $n \geq 2$, sčítáme přes všechna n):

  $$B = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad A = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

  Pro odhad chyby platí (viz [7])

  $$S_0 = \sum \left(Bx_i + A - y_i\right)^2 \qquad s = \sqrt{\frac{S_0}{n-2}}$$

  $$s_B = s.\sqrt{\frac{n}{n.\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}} \qquad s_A = s.\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n.\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}}$$

  $$B = B \pm s_B t_{P,n-2} \qquad A = A \pm s_A t_{P,n-2},$$

kde $t_{P,n-2}$ jsou koeficienty Studentova rozdělení (viz tabulka /1/).

- **Kvadratická závislost** $y = A + B.x + C.x^2$ (máme n naměřených dvojic $[x_i, y_i]$, $i = 1 \dots n$, $n \geq 3$, sčítáme přes všechna n): Provedeme přímé derivování vztahu $S = \left(y_i - (A + B.x_i + C.x_i^2)\right)^2$ podle parametrů A, B, C a najdeme pak jejich hodnotu (tento výpočet je uveden v [1] včetně výsledků).

  Druhou možností je vynášet na osu x druhé mocniny naměřených hodnot $X_i = x_i^2$ a pro dvojice $[X_i, y_i]$ spočítat parametry lineární závislosti $y = A_1 + B_1 X = A_1 + B_1 x^2$. V grafu je již pouhým pohledem vidět linearitu, případně nelinearitu hodnot, také takovýto graf lépe než kvadratická závislost odhalí hrubé chyby měření – hodnoty jimi zatížené „odskakují“ od lineárního trendu do plochy.

- **Proklad polynomem vyššího stupně** $y = A_0 + A_1.x + A_2.x^2 + \dots + A_m.x^m$ (máme n naměřených dvojic $[x_i, y_i]$, $i = 1 \dots n$, $n \geq m$, sčítáme přes všechna n): Obecné rovnice pro výpočet (převzato z [1]) jsou tvaru

$$nA_0 + A_1 \sum x_i + \dots + A_m \sum x_i^m = \sum y_i \tag{2.9}$$

$$A_0 \sum x_i + A_1 \sum x_i^2 + \dots + A_m \sum x_i^{m+1} = \sum x_i y_i \tag{2.10}$$

$$\vdots \tag{2.11}$$

$$A_0 \sum x_i^m + A_1 \sum x_i^{m+1} + \dots + A_m \sum x_i^{2m} = \sum x_i^m y_i \tag{2.12}$$

  Tuto soustavu rovnic lze řešit, například maticovou metodou, ale tento výpočet je rozumnější přenechat počítači.

- **Proklad závislosti pro funkci exponenciální**

  Tento úkol lze snadno převést na úkol předchozí, totiž proklad grafu přímkou. Tento proklad nám umožní navíc i zjistit, zda je předpoklad exponenciální závislosti u daných naměřených hodnot na místě (viz komentář k obdobnému postupu u kvadratické závislosti. Uvažujme o situaci, kdy závisle proměnná y závisí na nezávisle proměnné x exponenciálně, čili

$$y = A_1.e^{B.x},$$

  kde A_1, B jsou konstanty (reálná čísla) a $e = 2,71828\dots$ je základ přirozených logaritmů. Připomeňme si některá pravidla pro počítání s logaritmy:

  (a) Logaritmus součinu je součet logaritmů: $\log_a(x_1.x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$, a je základ logaritmu.

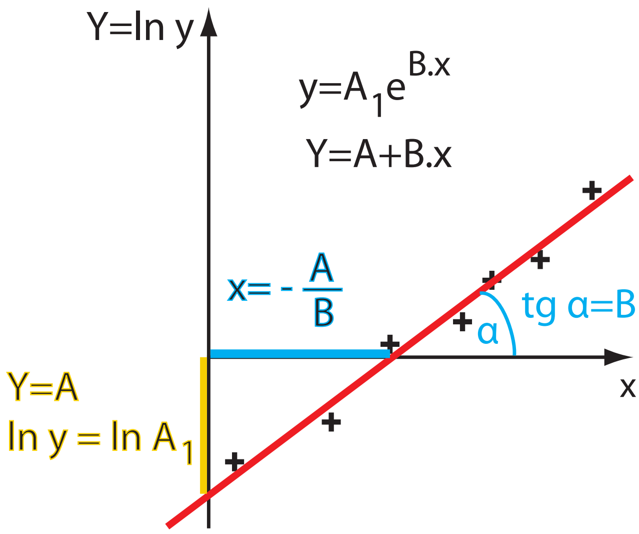
  (b) Logaritmus podílu je rozdíl logaritmů: $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$.

  (c) Mocninu logaritmujeme, pokud logaritmus základu mocniny x vynásobíme exponentem mocniny n: $\log_a x^n = n.\log_a x$. Protože odmocninu lze zapsat jako $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, lze takto logaritmovat i odmocniny: $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}.\log_a x$.

  (d) Přímo z definice základu logaritmu plyne, že $\log_a a = 1$.

  Zlogaritmujme nyní výše uvedenou rovnici ($\ln = \log_e$) a pomocí těchto pravidel ji upravme:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln\left(A_1.e^{B.x}\right)\\
\ln y &= \ln A_1 + \ln\left(e^{B.x}\right)\\
\underbrace{\ln y}_{ozn. Y} &= \underbrace{\ln A_1}_{ozn. A} + (B.x)\,.\underbrace{\ln e}_{=1}\\
Y &= A + B.x.
\end{aligned}$$



Obrázek 2.5: Převod exponenciální na lineární závislost – význam koeficientů

Tato závislost je tedy zřejmě lineární. Stačí tedy do grafu vynášet místo dvojic hodnot $[x, y]$ dvojice hodnot $[x, \ln y] = [x, Y]$, a pak těmito body proložit přímku. Pro její parametry platí: $A = \ln A_1 \Rightarrow A_1 = e^A$, B je směrnice přímky (viz obrázek 2.5), obvykle je fyzikálně důležitější právě B.
Jako příklad uvádíme výpočet koeficientu lineární absorpce ve skle (viz příklady B).

2.2..3 Dodatky:

- **Odvození metody nejmenších čtverců**
  Nejprve zopakujme podmínky platnosti této metody:
  Platnost metody nejmenších čtverců:
  – Mezi veličinami x a y opravdu existuje závislost.
  – K určení hledaných parametrů funkce f je potřeba naměřit alespoň tolik různých dvojic $[x_i, y_i]$, kolik je hledaných parametrů (např. na proklad přímkou $y = A + B.x$ alespoň dvě dvojice).
  – Předpokládáme, že hodnoty x nejsou zatíženy žádnou chybou (pokud tento předpoklad neplatí, používáme tento postup vědomě se systematickou chybou. Přesnější je v takovémto případě použít ortogonální regresi [4]).
  – Hodnoty y_i jsou náhodné, nejsou však zatíženy hrubými nebo systematickými chybami.

  Snažíme se, aby funkce
  $$S = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i, A_1, \ldots, A_m) - y_i\right)^2$$
  měla minimální hodnotu. Proto musíme provést derivaci této funkce podle jejích parametrů $A_1, A_2, \ldots A_m$:
  $$\frac{\partial S}{\partial A_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Omezme se na tvar funkce

$$f(x) = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \ldots + A_m f_m(x),$$

čili na lineární regresní funkci (vzhledem k jejím parametrům A_j). Výraz pro S je tvaru

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(A_1 f_1(x_i) + A_2 f_2(x_i) + \ldots + A_m f_m(x_i) - y_i\right)^2 .$$

Zavedeme-li označení

$$q_{hj} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} f_h(x_i) f_j(x_i) \quad q_h = \sum_{i=1}^{n} f_h(x_i) y_i \quad h = 1, 2, \ldots, m,$$

je podmínka minima tvaru:

$$\frac{\partial S}{\partial A_h} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{h1} A_1 + q_{h2} A_2 + \ldots + q_{hn} A_n = a_h, \quad h = 1, 2, \ldots, m.$$

Jedná se tedy o soustavu n rovnic o n neznámých, která je za předpokladu regularnosti matice ($\det A \neq 0$) řešitelná Cramerovým pravidlem:

$$A_h = \frac{\det A_h}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1(h-1)} & q_1 & q_{1(h+1)} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2(h-1)} & q_2 & q_{2(h+1)} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{m(h-1)} & q_m & q_{2(h+1)} & \cdots & q_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mm} \end{vmatrix}} \qquad h = 1, 2, \ldots, m.$$

Výpočet více ozřejmí konkrétní matematický příklad (viz dodatek A1).

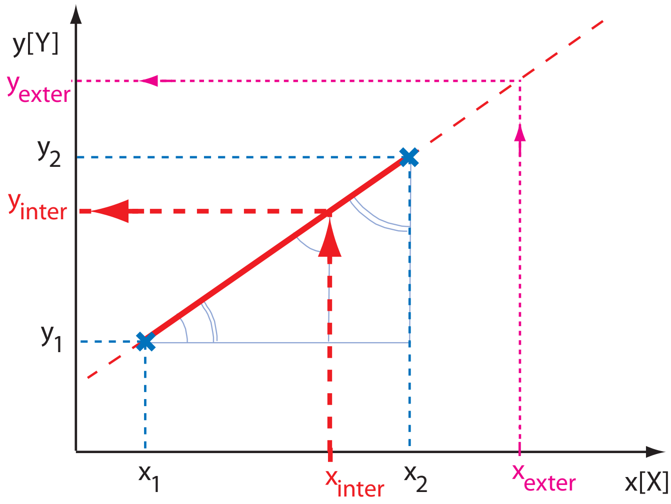
- Proklad v počítačovém programu – význam údajů – napsat???
- Jak udělat metodu nejmenších čtverců, je-li osa x zatížena chybou = ortogonální regrese podle [4] — napsat???

2.2..4 Interpolace a extrapolace

Interpolovat a extrapolovat můžeme v podstatě libovolnou funkcí, ale nejběžněji používanou funkcí je rovnice přímky – pak hovoříme o lineární interpolaci a extrapolaci.

Lineární interpolace (extrapolace)

Lineární interpolace a extrapolace jsou metody nalezení odhadu hodnoty naměřené veličiny uvnitř a vně intervalu naměřených dvojic veličin $[x_i, y_i]$, $i = 1, \ldots, n$, $n \geq 2$, které jsou spojeny lineární závislostí (nebo závislostí, kterou lze v daném intervalu hodnot považovat za lineární). Jsou to metody užitečné, ovšem musíme vždy zvážit vhodnost jejich použití pro danou závislost, zvláště v případě extrapolace,



Obrázek 2.6: Lineární interpolace (extrapolace – čárkovaná část přímky)

kde se pohybujeme už v oblasti mimo interval naměřených veličin, ve které nemusí předpoklad linearity platit.

Předpokládáme, že funkční závislost mezi dvěma naměřenými hodnotami je lineární (v grafu je to úsečka). Hledáme hodnotu y pro zvolené x na této úsečce. V obrázku 2.6 lze najít podobné trojúhelníky (věta uu), pro které plyne:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Pro hledanou hodnotu y příslušnou danému x dostaneme úpravou:

$$y=y_1+(y_2-y_1)\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Příklad interpolace a extrapolace

Hmotnost ročního chlapce je 13 kg, váha téhož dítěte jako dvouletého je 15 kg. Určete jeho váhu porodní (věk 0 let) a hmotnost po dosažení plnoletosti.

Provedeme-li výpočet porodní váhy a hmotnosti v plnoletosti extrapolací, dostaneme:

$$\begin{aligned} m_0 &= \left(m_1+(m_2-m_1)\frac{0-1}{2-1}\right)[\mathrm{kg}] = (13+(15-13).(-1))\,\mathrm{kg} = 11\,\mathrm{kg}. \\ m_0 &= \left(m_1+(m_2-m_1)\frac{18-1}{2-1}\right)[\mathrm{kg}] = (13+(15-13).17)\,\mathrm{kg} = 47\,\mathrm{kg}. \end{aligned}$$

Zkusme vyjít z běžné porodní váhy $m_0 = 3,5$kg a váhy v jednom roce $m_1 = 13$kg. Pro váhu ve dvou letech a v plnoletosti pak dostaneme:

$$\begin{aligned} m_2 &= \left(m_0+(m_1-m_0)\frac{2-0}{1-0}\right)[\mathrm{kg}] = (3,5+(13-3,5).2)\,\mathrm{kg} = 22,5\,\mathrm{kg}. \\ m_{18} &= \left(m_1+(m_2-m_1)\frac{18-0}{1-0}\right)[\mathrm{kg}] = (13+(13-3,5).18)\,\mathrm{kg} = 184\,\mathrm{kg}. \end{aligned}$$

Je jasné, že obě extrapolace vedou k nesmyslným výsledkům. Váhový přírůstek dítěte mezi jedním a dvěma roky je celkem rovnoměrný, ale tento předpoklad není splněn v období

0-1 rok, kdy velmi rychle přibývá (od okamžiku, kdy přestane těsně po narození hubnout, což je také normální, ale většina statistik o nejvýše prvním týdnu života neuvažuje), pak se tento přírůstek zpomaluje a k dalšímu, tentokrát pomalejšímu, přírustku váhy dochází v období puberty a postpuberty. Lineární extrapolace pro tyto situace není tedy vhodná. Nahlédněte například na stránky, na nichž jsou uvedeny váhové a výškové grafy včetně percentilů pro populaci: http://www. ... Růst, výška a hmotnost dítěte, percentilové grafy, růstove tabulky.html.

Chybí ještě něco podstatného?

A Příklady k procvičení – matematika

Přímo měřené veličiny – statistické zpracování měření

1. Zpracování přímo měřených veličin – Něco sepsat?
2. Chyby měřících přístrojů – Něco napsat?

Nepřímo měřené veličiny – Zákon šíření chyb

Zadání:

1. Určete vztah pro zákon přenosu chyb pro lineární závislost $y = \pm Ax_1 \pm Bx_2$.
2. Určete vztah pro zákon přenosu chyb pro polynom $y = \pm Ax_1^n, n \neq 0, -1$.
3. Určete vztah pro zákon šíření chyb v součinu $y = A.x_1.x_2$.
4. Určete vztah pro zákon šíření chyb v podílu $y = \frac{A.x_1}{x_2}$.
5. Určete vztah pro zákon šíření chyb při výpočtu hustoty jistého kovu, z nějž je vyrobena krychle o hmotnosti m a o hraně a.
6. Vymyslet jich víc pro konkrétní fyzikální situace, v nichž platí součinové vztahy?

Řešení:

1. Určete vztah pro zákon přenosu chyb pro lineární závislost $y = \pm Ax_1 \pm Bx_2$.

   Určeme nejprve jednotlivé parciální derivace

   $$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \pm A \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \pm B$$

   Dosazením do zákona šíření chyb dostaneme

   $$s_y = \sqrt{(\pm A)^2\, s_{x_1}^2 + (\pm B)^2\, s_{x_2}^2} = \sqrt{A^2 s_{x_1}^2 + B^2 s_{x_2}^2}$$

2. Určete vztah pro zákon přenosu chyb pro polynom $y = \pm Ax_1^n, n \neq 0, -1$.

   Nejprve proveďme derivaci

   $$\frac{\partial f}{\partial x_1} = A.n.x_1^{n-1}$$

   Dosazením do zákona šíření chyb dostaneme

   $$s_y = \sqrt{\left(A.n.\bar{x}_1^{n-1}\right)^2 s_{x_1}^2} = A.n.\bar{x}_1^{n-1}.s_{x_1}.$$

Spočítejme relativní chybu

$$\delta_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{A.n.\bar{x}_1^{n-1}.s_{x_1}}{A.\bar{x}_1^n} = n.\frac{s_{x_1}}{\bar{x}_1} = n.\delta_{x_1}.$$

Relativní chyba je tedy n-násobkem relativní chyby veličiny x_1, přičemž n je mocninou v daném polynomu.

3. Určete vztah pro zákon šíření chyb v součinu $y = A.x_1.x_2$.

Určeme nejprve jednotlivé parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = A.x_2 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = A.x_1$$

Dosadíme do zákona šíření chyb

$$s_y = \sqrt{\left(A.\bar{x}_2\right)^2 s_{x_1}^2 + \left(A.\bar{x}_1\right)^2 s_{x_2}^2}.$$

Určeme relativní chybu

$$\delta_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{\sqrt{\left(A.\bar{x}_2\right)^2 s_{x_1}^2 + \left(A.\bar{x}_1\right)^2 s_{x_2}^2}}{A.\bar{x}_1.\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\left(A.\bar{x}_2\right)^2 s_{x_1}^2 + \left(A.\bar{x}_1\right)^2 s_{x_2}^2}{A^2\bar{x}_1^2\bar{x}_2^2}} = \sqrt{\frac{s_{x_1}^2}{\bar{x}_1^2} + \frac{s_{x_2}^2}{\bar{x}_2^2}}.$$

Výsledná relativní chyba součinu má jednoduché vyjádření

$$\delta_y = \sqrt{\delta_{x_1}^2 + \delta_{x_2}^2}$$

4. Určete vztah pro zákon šíření chyb v podílu $y = \frac{A.x_1}{x_2}$.

Určeme nejprve jednotlivé parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{A}{x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{Ax_1}{x_2^2}.$$

Dosadíme do zákona šíření chyb:

$$s_y = \sqrt{\left(\frac{A}{\bar{x}_2}\right)^2 s_{x_1}^2 + \left(-\frac{A\bar{x}_1}{\bar{x}_2^2}\right)^2 s_{x_2}^2}.$$

Určeme relativní chybu

$$\delta_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{A}{\bar{x}_2}\right)^2 s_{x_1}^2 + \left(-\frac{A\bar{x}_1}{\bar{x}_2^2}\right)^2 s_{x_2}^2}{\left(\frac{A\bar{x}_1}{\bar{x}_2}\right)^2}} = \sqrt{\left(\frac{s_{x_1}}{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{s_{x_2}}{\bar{x}_2}\right)^2}$$

Vyjádření pro výslednou relativní chybu podílu je stejné jako pro relativní chybu součinu:

$$\delta_y = \sqrt{\delta_{x_1}^2 + \delta_{x_2}^2}$$

5. Určete vztah pro zákon šíření chyb při výpočtu hustoty jistého kovu, z nějž je vyrobena krychle o hmotnosti m a o hraně a.

Jednotlivými přímo měřenými veličinami jsou $x_1 = m$, $x_2 = a$, nepřímo měřenou veličinou je hustota ($y = \rho$). Závislost veličin je dána vztahem

$$\rho = \frac{m}{a^3}\left(= m.a^{-3}\right).$$

Podle výsledků předchozích příkladů můžeme rovnou napsat

$$\delta_\rho = \sqrt{\delta_m^2 + \left(-3.\delta_a\right)^2} = \sqrt{\delta_m^2 + 9.\delta_a^2}.$$

Je tedy jasné, že výslednou chybu více ovlivňuje nepřesnost měření délky, která se vyskytuje ve vzorci pro hustotu ve třetí mocnině, než nepřesnost měření hmotnosti, která je ve vztahu v mocnině první.

Metoda nejmenších čtverců:

1. Matematické procvičení Cramerova pravidla:

   Řešte soustavu rovnic Cramerovým pravidlem:

$$\begin{aligned} 3A_1 + 2A_2 + A_3 &= 1 \\ 2A_2 + 3A_3 &= 2 \\ A_1 - 2A_2 - 3A_3 &= 3 \end{aligned}$$

   Řešení: Nejprve ověrme nenulovost determinantu soustavy A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \underbrace{3.2.(-3) + 2.3.1 + 1.0.(-2) - 1.2.1 - 2.0.(-3) - 3.3.(-2)}_{-18+6+0-2+0+18} = 4 \neq 0$$

   Nyní určeme jednotlivé proměnné:

$$\begin{aligned} A_\mathbf{1} &= \frac{1}{\det A}.\det A_\mathbf{1} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ \mathbf{2} & 2 & 3 \\ \mathbf{3} & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ A_\mathbf{1} &= \frac{1}{4}.\underbrace{1.2.(-3) + 2.3.3 + 1.2.(-2) - 1.2.3 - 2.2.(-3) - 1.3.(-2)}_{-6+18-4-6+12+6} = \frac{20}{4} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\mathbf{2} &= \frac{1}{\det A}.\det A_\mathbf{2} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 3 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & 3 \\ 1 & \mathbf{3} & -3 \end{vmatrix} \\ A_\mathbf{2} &= \frac{1}{4}.\underbrace{3.2.(-3) + 1.3.1 + 1.0.3 - 1.2.1 - 3.3.3 - (-3).1.0}_{-18+3-0-2-27-0} = \frac{-44}{4} = -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\mathbf{3} &= \frac{1}{\det A}.\det A_\mathbf{3} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 3 & 2 & \mathbf{1} \\ 0 & 2 & \mathbf{2} \\ 1 & -2 & \mathbf{3} \end{vmatrix} \\ A_\mathbf{3} &= \frac{1}{4}.\underbrace{3.2.3 + 2.2.1 + 1.0.(-2) - 1.2.1 - 2.(-2).3 - 3.2.0}_{18+4+0-2+12-0} = \frac{32}{4} = 8. \end{aligned}$$

   Proveďme i zkoušku.

$$\begin{aligned} 3.5 + 2.(-11) + 1.8 = 15 - 22 + 8 &= 1 \\ 2.(-11) + 3.8 = -22 + 24 &= 2 \\ 5 - 2.(-11) - 3.8 = 5 + 22 - 24 &= 3 \end{aligned}$$

2. Odvození rovnice lineární regrese pro přímku

Rovnice přímky má $m = 2$ parametry, $A_1 = A$ a $A_2 = B$, funkce S je tvaru

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(A + Bx_i - y_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n}(A^2 + B^2x_i^2 + y_i^2 + 2ABx_i - 2Ay_i - 2Bx_iy_i), \end{aligned}$$

n je počet naměřených dvojic hodnot $[x_i, y_i]$. Přímým zderivováním podle parametrů A, B dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial A} &= n.2A + 2B\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial B} &= 2B\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2A\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i = 0 \end{aligned}$$

Dále upravíme:

$$\begin{aligned} n.A + B\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\ A\sum_{i=1}^{n} x_i + B\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \end{aligned}$$

a řešíme sčítací metodou:

$$\begin{aligned} A.\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i\sum_{i=1}^{n} x_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} y_i.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.\sum_{i=1}^{n} x_i \\ B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i.\sum_{i=1}^{n} x_i - n.\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) &= \sum_{i=1}^{n} y_i.\sum_{i=1}^{n} x_i - n.\sum_{i=1}^{n} x_iy_i, \end{aligned}$$

odkud lze spočítat hodnoty parametrů A a B.

3. Určete rovnici lineární regrese – přímku procházející body $[1, 3], [2, 5]$.

   Dosadíme do předchozích výsledků:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2.\sum_{i=1}^{2} x_iy_i - \sum_{i=1}^{2} y_i.\sum_{i=1}^{2} x_i}{2.\sum_{i=1}^{2} x_i^2 - \sum_{i=1}^{2} x_i.\sum_{i=1}^{2} x_i} = \frac{2.(1.3 + 2.5) - (3 + 5).(1 + 2)}{2.(1^2 + 2^2) - (1 + 2)^2} = 2 \\ A &= \frac{\sum_{i=1}^{2} y_i.\sum_{i=1}^{2} x_i^2 - \sum_{i=1}^{2} x_iy_i.\sum_{i=1}^{2} x_i}{2.\sum_{i=1}^{2} x_i^2 - \sum_{i=1}^{2} x_i.\sum_{i=1}^{2} x_i} = \frac{(3 + 5).(1^2 + 2^2) - (1.3 + 2.5).(1 + 2)}{2.(1^2 + 2^2) - (1 + 2)^2} = 1 \end{aligned}$$

Rovnice je tedy tvaru $y = 1 + 2.x$, což se dá ověřit klasickým výpočtem parametrické rovnice přímky procházející zadanými body. Určíme-li ještě zbytkovou ještě zbytkovou sumu čtverců, zjistíme, že je nulová, protože oba body leží na přímce. Abychom mohli určit i parametr s, přidejme ještě jeden bod ležící na téže přímce, například $[0, 1]$. Dostaneme:

$$S_0 = \sum(Bx_i + A - y_i)^2 = (\underbrace{(2.1 + 1 - 3)^2}_{0} + \underbrace{(2.2 + 1 - 5)^2}_{0} + \underbrace{(2.0 + 1 - 1)^2}_{0}) = 0.$$

$$s = \sqrt{\frac{S_0}{n-2}} = \sqrt{\frac{0}{3-2}} = 0$$

$$\begin{aligned} s_B = s.\sqrt{\frac{n}{n.\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} &= 0.\sqrt{\frac{3}{3.(1^2+2^2+0^2) - (1+2+0)^2}} = 0 \\ s_A = s.\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n.\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} &= 0.\sqrt{\frac{1^2+2^2+0^2}{3.(1^2+2^2+0^0) - (1+2+0)^2}} = 0 \end{aligned}$$

Přímka tedy prochází těmito body přesně.

Uvažujme o situaci, kdy máme tři body, které geometricky neleží v jedné přímce, například $[1,3], [2,5], [0,1.5]$. Proveďme výpočet znovu:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{3.\sum_{i=1}^{3} x_i y_i - \sum_{i=1}^{3} y_i.\sum_{i=1}^{3} x_i}{3.\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i.\sum_{i=1}^{3} x_i} = \\
&= \frac{3.(1.3+2.5+0.1,5)-(3+5+1,5).(1+2+0)}{3.(1^2+2^2+0^2)-(1+2+0)^2} = 1,75 \\
A &= \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i.\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i y_i.\sum_{i=1}^{3} x_i}{3.\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i.\sum_{i=1}^{3} x_i} = \\
&= \frac{(3+5+1,5).(1^2+2^2+0^2)-(1.3+2.5+0.1,5).(1+2+0)}{3.(1^2+2^2+0^2)-(1+2+0)^2} = 1,42
\end{aligned}$$

Určeme ještě zbytkovou sumu čtverců a chyby:

$$S_0 = \sum (Bx_i + A - y_i)^2 = (\underbrace{(1,75.1+1,42-3)^2}_{0{,}0289} + \underbrace{(1,75.2+1,42-5)^2}_{0{,}0064} +$$

$$+ \underbrace{(1,75.0+1,42-1,5)^2}_{0{,}0064}) = 0,0417.$$

$$s = \sqrt{\frac{S_0}{n-2}} = \sqrt{\frac{0{,}0417}{3-2}} = 0,2042$$

$$s_B = s.\sqrt{\frac{n}{n.\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} = 0,2042.\sqrt{\frac{3}{3.(1^2+2^2+0^2)-(1+2+0)^2}} = 0,1444$$

$$s_A = s.\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n.\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} = 0,2042.\sqrt{\frac{1^2+2^2+0^2}{3.(1^2+2^2+0^0)-(1+2+0)^2}} = 0,1864$$

Zvolíme-li hladinu spolehlivosti 0,6827 (směrodatná odchylka), je Studentův koeficient 1,321, a pak dostaneme hodnoty

$$B = B \pm s_B t_{P,n-2} = 1,75 \pm 0,1444.1,321 = 1,75 \pm 0,19,$$
$$A = A \pm s_A t_{P,n-2} = 1,42 \pm 0,1864.1,321 = 1,42 \pm 0,25.$$

B Příklady k procvičení – fyzika

Zákon šíření chyb – Konkrétní případy – matematické kyvadlo

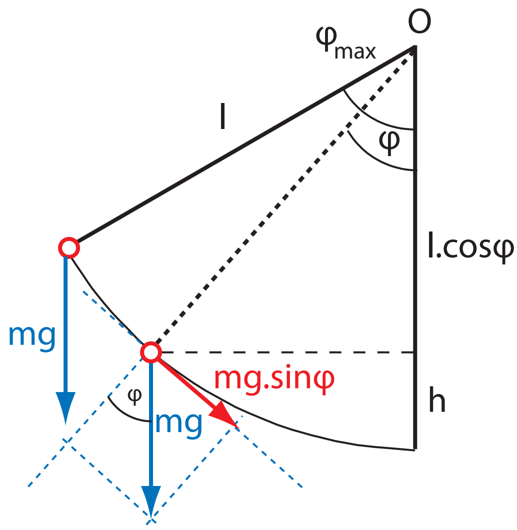
Jakým způsobem lze určit tíhové zrychlení? Jedna z možností je pomocí periody matematického kyvadla (viz Obrázek 3.8). Matematickým kyvadlem rozumíme hmotný bod zavěšený na nehmotném závěsu (při praktické realizaci tedy musíme dbát, aby hmotnost závaží byla mnohem větší než hmotnost niti, na níž závaží visí).

Pohybovou rovnici kyvadla lze odvodit dvojím způsobem:

1. Pomocí druhé impulzové věty (analogie druhé Newtonovy rovnice pro rotující systém):

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Moment setrvačnosti hmotného bodu ve vzdálenosti l od osy otáčení je roven $J = m.l^2$. Úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ má směr z papíru k nám, ramenem síly $\vec{r}$ je spojnice osy otáčení a okamžité polohy hmotného bodu. Orientace je k hmotnému bodu, délka je l. Z vlastností vektorového součinu vyplývá, že jedinou silou s pohybovým účinkem je složka síly tíhové do



Obrázek 2.7: Matematické kyvadlo

směru tečného k trajektorii $F = m.g.\sin\varphi$ (složky do směru ramene síly mají nulový silový moment). Sestavme tedy pohybovou rovnici

$$\begin{aligned} J.\varepsilon &= F.l \\ ml^2.\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -mg\sin\varphi.l \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi &= 0 \end{aligned}$$

2. Pomocí zákona zachování energie lze k poslední uvedené rovnici dojít také: Potenciální energie kyvadla ve výšce h_{max} při maximální výchylce matematického kyvadla (nulovou hladinu potenciální energie volíme v rovnovážné poloze) je rovna součtu potenciální energie kyvadla ve výšce h a kinetické energie kyvadla v této výšce. Protože rychlost kyvadla $v = l.\frac{d\varphi}{dt}$ a pro výšku h platí $h = l - l\cos\varphi = l(1-\cos\varphi)$, dostaneme

$$\begin{aligned} E_p(\varphi_{max}) &= E_p(\varphi) + E_k(\varphi) \\ mgl(1-\cos\varphi_{max}) &= mgl(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}m.\left(l\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ gl(1-\cos\varphi_{max}) &= gl(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}l^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \end{aligned}$$

Rovnici zderivujme podle času:

$$\begin{aligned} 0 &= gl\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}.l^2.2.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{d^2\varphi}{dt^2} \\ \left(gl\sin\varphi + l^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\frac{d\varphi}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

přičemž výraz v závorce je výše uvedená pohybová rovnice.

Nyní zbývá tuto rovnici ještě rozřešit. Většinou se postupuje tak, že provedeme aproximaci pro malé úhly $\sin\varphi \doteq \varphi$ a rovnice 2.13

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \tag{2.13}$$

přejde v rovnici 2.14

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0, \tag{2.14}$$

která je exaktně řešitelná, a pro periodu kyvadla platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{2.15}$$

Vyjádříme-li z tohoto vztahu tíhové zrychlení, dostaneme

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}l. \tag{2.16}$$

Je potřeba si uvědomit, že jsme použili aproximaci pro malé úhly. Musí pro ně platit $\sin\varphi \doteq \varphi$, což platí pro $\varphi \leq 5°$ (hodnoty sinu a úhlu v radiánech se liší až na čtvrtém desetinném místě). Například pro kyvadlo délky 1 m lze vychýlit kyvadlo jen o 87mm. Pokud vychýlíme kyvadlo více, je měření zatíženo systematickou chybou, skutečná perioda je větší než perioda určená pomocí vztahu 2.15

$$T_{neaprox} = T\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi_{max}}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^4 \sin^4\frac{\varphi_{max}}{2} + \ldots\right), \tag{2.17}$$

kde φ_{max} je maximální výchylka matematického kyvadla (což je konstanta). (Odvození je delší, napíšeme ho do dodatku C). Pokud bychom tedy počítali tíhové zrychlení podle vztahu 2.16 a neuvažovali korigovanou periodu 2.17, získali bychom tíhové zrychlení systematicky menší. Ale pokud dodržíme podmínku $\varphi \leq 5°$, je tato systematická chyba zanedbatelně malá.

Chybu určení tíhového zrychlení vyjádříme jako chybu relativní, protože toto vyjádření je jednodušší než přímý výpočet ze zákona šíření chyb (viz předchozí část, zákon šíření chyb – procvičení matematiky) . Obdržíme

$$\delta_g = \sqrt{\delta_l^2 + 4\delta_T^2}. \tag{2.18}$$

Je tedy jasně vidět, že pro minimalizaci chyby určení tíhového zrychlení je třeba změřit co nejpřesněji periodu matematického kyvadla.

Logaritmická regrese, lineární proklad – koeficient lineární absorpce ve skle

Dopadá-li na sklo tloušťky dx záření intenzity I, pak intenzita záření pohlcená ve skle dI je přímo úměrná oběma uvedený veličinám:

$$dI = -\mu.I.dx,$$

kde záporné znaménko znázorňuje úbytek intenzity, μ je koeficient lineární absorpce, který je ve vztahu konstantou úměrnosti. Tuto lineární diferenciální rovnici prvního řádu (pro chemiky: kinetika prvního řádu) řešíme separací proměnných a integrací přes celou tloušťku skleněné desky:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{I} &= -\mu dx \\ \int \frac{dI}{I} &= -\mu \int dx \\ \ln I &= -\mu x + konst. \end{aligned}$$

Konstantu zvolme tak, aby platilo, že při tloušťce skla $x = 0$ je $I = I_0$, což je hodnota intenzity pro dopadající záření. Dostaneme $konst = \ln I_0$ a dále upravíme:

$$\begin{aligned} \ln I - \ln I_0 &= -\mu x \\ \ln\frac{I}{I_0} &= -\mu x \\ \frac{I}{I_0} &= e^{-\mu x}. \end{aligned}$$

V dalším textu značme tloušťku skla x víceméně ze zvykových důvodů d. Pro absorpci záření ve skle tedy platí vztah

$$I = I_0 e^{-\mu d},$$

kde I je intenzita prošlého záření, I_0 je intenzita dopadajícího záření, d je tloušťka skla, koeficient lineární absoprce μ je závislý na vlnové délce dopadajícího záření. Měříme-li tedy tak, že za sebe postupně řadíme destičky tlouštěk $d_1, d_2, \dots d_n$, dostáváme postupně:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 e^{-\mu d_1} \\ I_2 &= I_0 e^{-\mu(d_1+d_2)} \\ &\vdots \\ I_n &= I_0 e^{-\mu(d_1+d_2+\ldots+d_n)}, \end{aligned}$$

což dá celkem n dvojic hodnot $[d_1 + \ldots + d_i, I_i], i = 1 \ldots n$. Z nich spočítat μ jako směrnici přímky proložené grafem závislosti

$$\ln I = \ln I_0 - \mu d$$

(pro kontrolu můžeme zjistit i druhý parametr, I_0, který je měřitelný přímo). Porovnáme-li tuto hodnotu s tabulkovou, zjistíme, že je vždy menší než tabulková. Při měření se totiž dopouštíme systematické chyby - chyby metody. Pokud totiž dopadá světlo na sklo, částečně prochází (to je hodnota I) a částečně se odráží, což činí rozdíl mezi hodnotou I_0, kterou by naměřil luxmetr při přímém dopadu záření, a hodnotou skutečnou, která je menší o hodnotu intenzity odraženého záření. Pokud můžeme uvažovat o kolmém dopadu, platí pro odrazivost rozhraní vzduch-sklo $R = \left(\frac{n_{sklo}-n_{vzduch}}{n_{sklo}+n_{vzduch}}\right)^2 = \left(\frac{1{,}5-1}{1{,}5+1}\right)^2 = 4\%$. Tato ztráta nastává na každém rozhraní vzduch-sklo. Máme dvě možnosti, jak systematickou chybu odstranit – první možností je kápnout mezi jednotlivé destičky imerzní olej (kapalinu o stejném nebo alespoň velice blízkém indexu lomu jako má sklo, může to tedy být i voda). K odrazu pak dochází jen na první destičce, což nevadí (hodnotu I_0 lze odečíst z grafu). Koeficient absorpce je pak ovšem ovlivněn i absorcí ve vrstvě imerzní kapaliny neznámé tloušťky. Druhou možností je započítat odraz na každém skleněném rozhraní do rovnic:

$$\begin{aligned} I_1 &= (1-R) I_0 e^{-\mu d_1} \\ I_2 &= (1-R)^2 I_0 e^{-\mu(d_1+d_2)} \\ &\vdots \\ I_n &= (1-R)^n I_0 e^{-\mu(d_1+d_2+\ldots+d_n)}, \end{aligned}$$

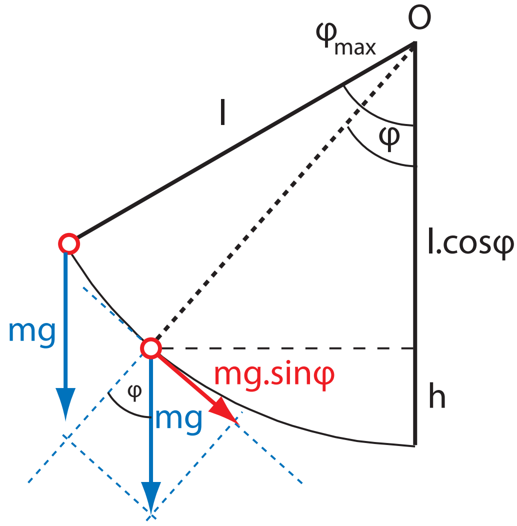
Rozdíly obou přístupů naznačuje konkrétní výpočet pomocí počítačového programu, například Excelu, který si jistě zvládne sepsat čtenář sám.

C Matematické kyvadlo – řešení pro velké výchylky

Proveďme odvození vztahu pro periodu matematického kyvadla, pokud se neomezujeme na malé úhly.

Matematickým kyvadlem rozumíme hmotný bod zavěšený na nehmotném závěsu (při praktické realizaci tedy musíme dbát, aby hmotnost závaží byla mnohem větší než hmotnost niti, na níž závaží visí). Napišme zákon zachování energie pro toto kyvadlo: potenciální energie v maximální výchylce φ_{max} je rovna součtu potenciální a kinetické energie v libovolné výchylce φ :

$$\begin{aligned} m.g.h_{max} &= m.g.h + \frac{1}{2}.m.v^2 \\ m.g.l.(1-\cos\varphi_{max}) &= m.g.l.(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}.m.\left(l.\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ g.(\cos\varphi - \cos\varphi_{max}) &= \frac{1}{2}.l.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ dt &= \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\left(\cos\varphi - \cos\varphi_{max}\right)}} \end{aligned}$$



Obrázek 3.8: Matematické kyvadlo

Nyní musíme zvolit integrační meze a vhodnou substituci. Použijme substituci

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_{max}}{2}.\sin\Phi$$

a integrujme v mezích $t = 0\ldots\Phi = 0$, $t = \frac{T}{4}\ldots\Phi = \frac{\pi}{2}$. Tato volba zajišťuje, že v čase $t = 0$ je kyvadlo v rovnovážné poloze a v čase $t = \frac{T}{4}$ je kyvadlo v amplitudě φ_{max}.

Postupujme takto:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\varphi}{2} &= \sin\frac{\varphi_{max}}{2}.\sin\Phi \\
\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi &= \sin\frac{\varphi_{max}}{2}.\cos\Phi d\Phi \\
\cos\varphi &= \cos 2.\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 - 2.\sin^2\frac{\varphi}{2} \\
\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_{max}}} &= \frac{\sin\frac{\varphi_{max}}{2}.\cos\Phi d\Phi}{\frac{1}{2}.\cos\frac{\varphi}{2}.\sqrt{\left(1-2.\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) - \left(1-2.\sin^2\frac{\varphi_{max}}{2}\right)}} = \\
&= \frac{\sin\frac{\varphi_{max}}{2}.\cos\Phi d\Phi}{\frac{1}{2}.\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}}.\sqrt{2.\sin^2\frac{\varphi_{max}}{2}\left(1-\sin^2\Phi\right)}} = \\
&= \frac{\sqrt{2}d\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\sqrt{2}d\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^2\Phi}}
\end{aligned}$$

Takovýto integrál by však nebyl exaktně řešitelný, je to tzv. eliptický integrál EllipticK( ), tabelován je například v Maple. Výraz ve jmenovateli lze rozvinout v řadu:

$$|\varepsilon| < 1 \quad\Rightarrow\quad (1\pm\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{1}{2}.\varepsilon + \frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2 \mp \frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\varepsilon^4 \mp \ldots$$

$$\begin{aligned}
\left(1-\sin^2\frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^2\Phi\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}.\sin^2\frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^2\Phi + \frac{1.3}{2.4}\sin^4\frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^4\Phi + \\
&+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6\frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^6\Phi + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin^8\frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^8\Phi + \ldots
\end{aligned}$$

Nyní se můžeme věnovat konečně výslednému integrování:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{T}{4}} dt &= \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2}\,(\cos\varphi - \cos\varphi_{max})} \\
\frac{T}{4} &= \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \frac{1}{2}.\sin^2\frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^2\Phi + \frac{1.3}{2.4}\sin^4\frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^4\Phi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6\frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^6\Phi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin^8\frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^8\Phi + \ldots \right] d\Phi \\
T &= 4.\sqrt{\frac{l}{g}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}.\sin^2\frac{\varphi_{max}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\Phi d\Phi + \frac{1.3}{2.4}\sin^4\frac{\varphi_{max}}{2}. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\Phi d\Phi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6\frac{\varphi_{max}}{2}. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\Phi d\Phi + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin^8\frac{\varphi_{max}}{2}. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\Phi d\Phi + \ldots \right]
\end{aligned}$$

Nyní je potřeba zintegrovat sudou mocninu funkce sinus v daných mezích. Platí:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\Phi d\Phi &= \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.2n}.\frac{\pi}{2} \quad \text{pro } n \geq 1, \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\Phi d\Phi &= \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Poslední výraz pak přejde do tvaru

$$\begin{aligned}
T &= 4.\sqrt{\frac{l}{g}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}.\sin^2\frac{\varphi_{max}}{2} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\Phi d\Phi}_{\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}} + \frac{1.3}{2.4}\sin^4\frac{\varphi_{max}}{2}. \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\Phi d\Phi}_{\frac{1.3}{2.4}.\frac{\pi}{2}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6\frac{\varphi_{max}}{2}. \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\Phi d\Phi}_{\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\pi}{2}} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin^8\frac{\varphi_{max}}{2}. \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\Phi d\Phi}_{\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{\pi}{2}} + \ldots \right]
\end{aligned}$$

Nakonec dostaneme hledaný vztah pro periodu kyvu matematického kyvadla s libovolně velkou amplitudou (vztah pro periodu $T = 2\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}$ bez následující závorky používáme pouze v přiblížení pro malé úhly $\varphi_{max} < 5°$):

$$\begin{aligned}
T_{neaprox} &= \underbrace{2\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}}_{T} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2.\sin^2\frac{\varphi_{max}}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\varphi_{max}}{2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\sin^6\frac{\varphi_{max}}{2} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2\sin^8\frac{\varphi_{max}}{2} + \ldots \right]
\end{aligned}$$

D Tabulky koeficientů pro Gaussovo a Studentovo rozdělení

Povšimněte si, že hodnoty pro Gaussovo rozdělení jsou obsaženy v tabulce pro Studentovo rozdělení na posledním řádku. Gaussovo rozdělení je totiž limitním případem Studentova pro nekonečný počet měření.

Studentovy koeficienty

ν	**hladina spolehlivosti**				
	0,5000	**0,6827**	**0,9000**	**0,9545**	**0,9973**
1	1,000	1,837	6,314	13,96	235,8
2	0,817	1,321	2,920	4,526	19,21
3	0,765	1,197	2,353	3,307	9,219
4	0,741	1,141	2,132	2,869	6,620
5	0,727	1,110	2,015	2,649	5,507
6	0,718	1,091	1,943	2,516	4,904
7	0,711	1,077	1,895	2,429	4,530
8	0,706	1,067	1.860	2,366	4,277
9	0,703	1,059	1,833	2,320	4,094
10	0,700	1,053	1,812	2,284	3,957
11	0,697	1,048	1,796	2,255	3,850
12	0,695	1,043	1,782	2,231	3,764
13	0,693	1,040	1,771	2,212	3,694
14	0,692	1,037	1,761	2,195	3,636
15	0,691	1,034	1,753	2,182	3,586
16	0,690	1,032	1,746	2,169	3,544
17	0,689	1,030	1,740	2,158	3,508
18	0,688	1,028	1,734	2,149	3,475
19	0,688	1,027	1,729	2,141	3,447
20	0,687	1,026	1,725	2,133	3,422
25	0,684	1,021	1,708	2,105	3,329
30	0,683	1,017	1,697	2,087	3,270
40	0,681	1,013	1,684	2,064	3,199
50	0,679	1,010	1,676	2,051	3,157
70	0,678	1,007	1,667	2,036	3,111
100	0,677	1,005	1,660	2,025	3,077
200	0,676	1,003	1,653	2,013	3,040
∞	0,675	1,000	1,645	2,000	3,000

Tabulka 1: Tabulka Studentových koeficientů (převzato z [5]):

Koeficienty Gaussova rozdělení

P	k_p
0,500	0,674
0.683	1,000
0.950	1,960 $\doteq$ 2 (konvenčně)
0,990	2,576

Tabulka 2: Tabulka koeficientů pro Gaussovo rozdělení (převzato z [1]):

Reference

[1] Novák Miroslav, *Úvod do praktické fyziky*, výrobna skript rektorátu UJEP Brno, Brno 1989

[2] Novák Miroslav, Máca Bohuslav, *Úvod do fyzikálních měření*, výrobna skript rektorátu UJEP Brno, Brno 1979

[3] Kučírková Assja, Navrátil Karel, *Fyzikální měření – I.*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1986

[4] Anděl Jiří, *Statistické metody*, MATFYZPRESS, Praha 2003

[5] Pánek Petr, *Úvod do fyzikálních měření*, Masarykova univerzita, Brno 2001

[6] Humlíček Josef, *Statistické zpracování výsledků měření*, UJEP Brno 1984

[7] Meloun Milan, Militký Jiří, *Statistické zpracování experimentálních dat*, PLUS Praha 1994