Ústav fyzikální elektroniky PřF MU

Něco málo o matematickém kyvadle

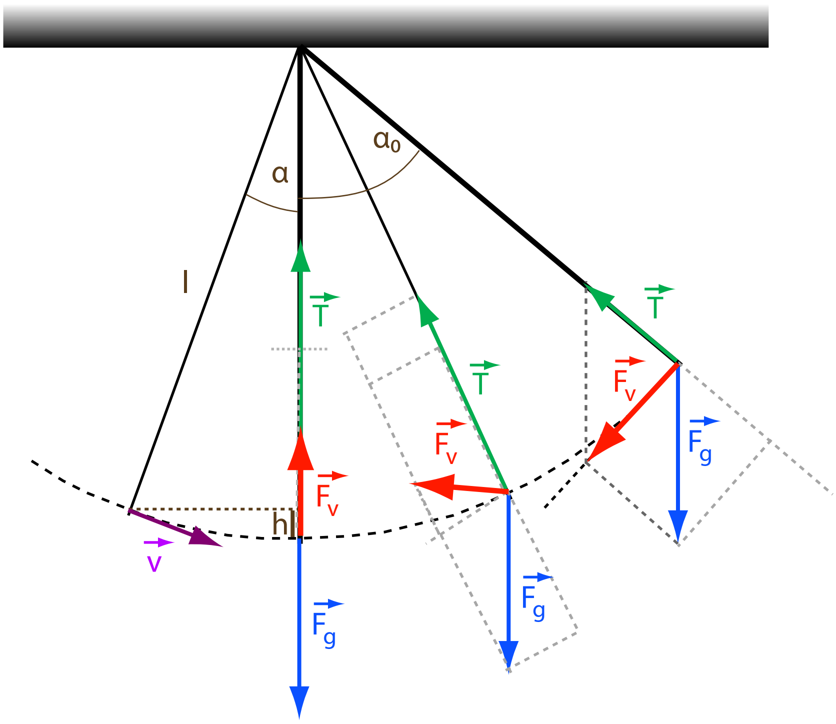
1 Matematické kyvadlo – silový rozbor

1. Matematické kyvadlo o hmotnosti $m = 0,10\,\mathrm{kg}$ a délce $l = 1,0\,\mathrm{m}$ je volně vypuštěno z polohy o úhlové výchylce $\varphi = 30°$. Tíhové zrychlení je $g = 9,8\,\mathrm{m.s}^{\breve{}2}$, hmotnost závěsu je zanedbatelná. Určete tahovou sílu závěsu při průchodu kyvadla rovnovážnou polohou. Odporové síly zanedbejte.

   Řešení :

   Řešit můžeme v inerciální i neinerciální soustavě. Řešení v inerciální soustavě (pozorovatel např. v ose otáčení nebo úplně mimo): Působící síly jsou tíhová (svisle dolů) a tahová (do směru závěsu). Jejich výslednicí je síla, která má dostředivý charakter (viz obrázek 1). V rovnovážné poloze je $F_g = mg, F_v = F_d = \frac{mv^2}{l}$ a

   Obrázek 1:

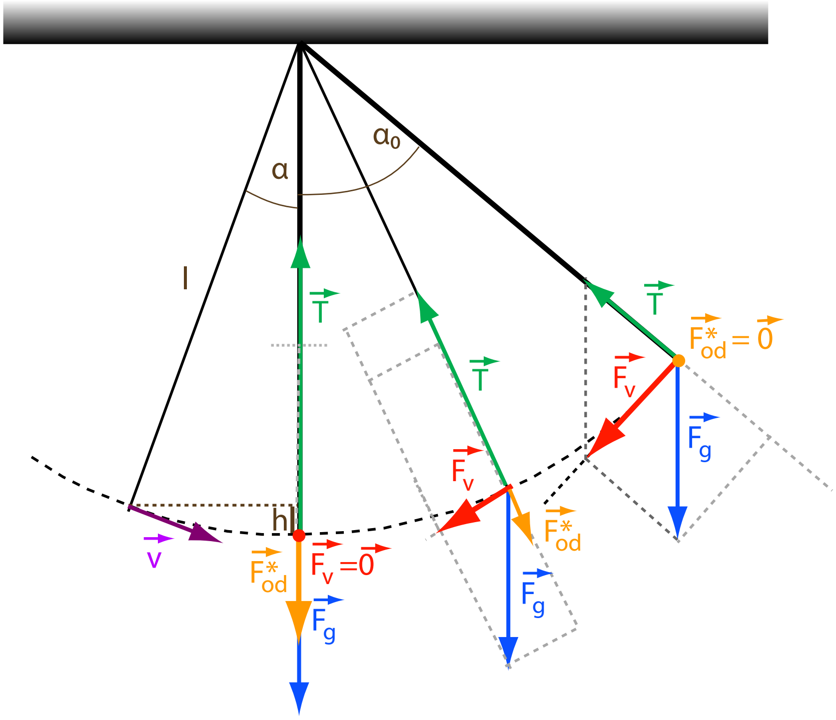


   $T = F_g + F_d = mg + \frac{mv^2}{l}$. Rychlost dostaneme ze zákona zachování energie: $\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mgl(1 - \cos\varphi)$. Pro velikost tahové síly tedy platí

$$T = mg + 2mg(1 - \cos\varphi) = 3mg - mg\cos\varphi = 3.0,1.9,8 - 0,1.9,8.\cos 30° = 2\,\mathrm{N}.$$

   Řešíme-li vše v neinerciální soustavě (pozorovatel na kuličce): Působící síly jsou síla tíhová (svisle dolů), tahová (do směru závěsu) a síla odstředivá (směr závěsu, orientace od bodu závěsu), jejichž výslednice ve směru závěsu je nulová (viz obrázek 2). V rovnovážné poloze je $F_g = mg, F^{\star}_{od} = \frac{mv^2}{l}$ a $T = F_g + F^{\star}_{od} = mg + \frac{mv^2}{l}$. Opět platí zákon zachování energie a zbytek výpočtu je stejný.

Obrázek 2:



2 Zákon šíření chyb – Konkrétní případy – matematické kyvadlo

Jakým způsobem lze určit tíhové zrychlení? Jedna z možností je pomocí periody matematického kyvadla (viz Obrázek 3). Matematickým kyvadlem rozumíme hmotný bod zavěšený na nehmotném závěsu (při praktické realizaci tedy musíme dbát, aby hmotnost závaží byla mnohem větší než hmotnost niti, na níž závaží visí).

Pohybovou rovnici kyvadla lze odvodit dvojím způsobem:

1. Pomocí druhé impulzové věty (analogie druhé Newtonovy rovnice pro rotující systém):
$$J\vec{\varepsilon} = \vec{r} \times \vec{F}.$$
Moment setrvačnosti hmotného bodu ve vzdálenosti l od osy otáčení je roven $J = m.l^2$. Úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ má směr z papíru k nám, ramenem síly $\vec{r}$ je spojnice osy otáčení a okamžité polohy hmotného bodu. Orientace je k hmotnému bodu, délka je l. Z vlastností vektorového součinu vyplývá, že jedinou silou s pohybovým účinkem je složka síly tíhové do směru tečného k trajektorii $F = m.g.\sin\varphi$ (složky do směru ramene síly mají nulový silový moment). Sestavme tedy pohybovou rovnici
$$\begin{aligned} J.\varepsilon &= F.l \\ ml^2.\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -mg\sin\varphi.l \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi &= 0 \end{aligned}$$

2. Pomocí zákona zachování energie lze k poslední uvedené rovnici dojít také: Potenciální energie kyvadla ve výšce h_{max} při maximální výchylce matematického kyvadla

(nulovou hladinu potenciální energie volíme v rovnovážné poloze) je rovna součtu potenciální energie kyvadla ve výšce h a kinetické energie kyvadla v této výšce. Protože rychlost kyvadla $v = l.\frac{d\varphi}{dt}$ a pro výšku h platí $h = l - l\cos\varphi = l(1-\cos\varphi)$, dostaneme

$$\begin{aligned}
E_p(\varphi_{max}) &= E_p(\varphi) + E_k(\varphi) \\
mgl(1-\cos\varphi_{max}) &= mgl(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}m.\left(l\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\
gl(1-\cos\varphi_{max}) &= gl(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}l^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2
\end{aligned}$$

Rovnici zderivujme podle času:

$$\begin{aligned}
0 &= gl\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}.l^2.2.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{d^2\varphi}{dt^2} \\
\left(gl\sin\varphi + l^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\frac{d\varphi}{dt} &= 0,
\end{aligned}$$

přičemž výraz v závorce je výše uvedená pohybová rovnice.

Nyní zbývá tuto rovnici ještě rozřešit. Většinou se postupuje tak, že provedeme aproximaci pro malé úhly $\sin\varphi \doteq \varphi$ a rovnice 1

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \tag{1}$$

přejde v rovnici 2

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0, \tag{2}$$

která je exaktně řešitelná, a pro periodu kyvadla platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{3}$$

Vyjádříme-li z tohoto vztahu tíhové zrychlení, dostaneme

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}l. \tag{4}$$

Je potřeba si uvědomit, že jsme použili aproximaci pro malé úhly. Musí pro ně platit $\sin\varphi \doteq \varphi$, což platí pro $\varphi \leq 5^\circ$ (hodnoty sinu a úhlu v radiánech se liší až na čtvrtém desetinném místě). Například pro kyvadlo délky 1 m lze vychýlit kyvadlo jen o 87mm. Pokud vychýlíme kyvadlo více, je měření zatíženo systematickou chybou, skutečná perioda je větší než perioda určená pomocí vztahu 3

$$T_{neaprox} = T\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\varphi_{max}}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^4\sin^4\frac{\varphi_{max}}{2} + \dots\right), \tag{5}$$

kde φ_{max} je maximální výchylka matematického kyvadla (což je konstanta). (Odvození je delší, napíšeme ho do dodatku 3). Pokud bychom tedy počítali tíhové zrychlení podle vztahu 4 a neuvažovali korigovanou periodu 5, získali bychom tíhové zrychlení systematicky menší. Ale pokud dodržíme podmínku $\varphi \leq 5^\circ$, je tato systematická chyba zanedbatelně malá.

Chybu určení tíhového zrychlení vyjádříme jako chybu relativní, protože toto vyjádření je jednodušší než přímý výpočet ze zákona šíření chyb (viz předchozí část, zákon šíření chyb – procvičení matematiky) . Obdržíme

$$\delta_g = \sqrt{\delta_l^2 + 4\delta_T^2}. \tag{6}$$

Je tedy jasně vidět, že pro minimalizaci chyby určení tíhového zrychlení je třeba změřit co nejpřesněji periodu matematického kyvadla.

3 Matematické kyvadlo – řešení pro velké výchylky

Proveďme odvození vztahu pro periodu matematického kyvadla, pokud se neomezujeme na malé úhly.

Matematickým kyvadlem rozumíme hmotný bod zavěšený na nehmotném závěsu (při praktické realizaci tedy musíme dbát, aby hmotnost závaží byla mnohem větší než hmotnost niti, na níž závaží visí). Napišme zákon zachování energie pro toto kyvadlo: potenciální energie v maximální výchylce φ_{max} je rovna součtu potenciální a kinetické energie v libovolné výchylce φ :

$$\begin{aligned}
m.g.h_{max} &= m.g.h + \frac{1}{2}.m.v^2 \\
m.g.l.(1 - \cos\varphi_{max}) &= m.g.l.(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}.m.\left(l.\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\
g.\left(\cos\varphi - \cos\varphi_{max}\right) &= \frac{1}{2}.l.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\
dt &= \sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{2\left(\cos\varphi - \cos\varphi_{max}\right)}}
\end{aligned}$$

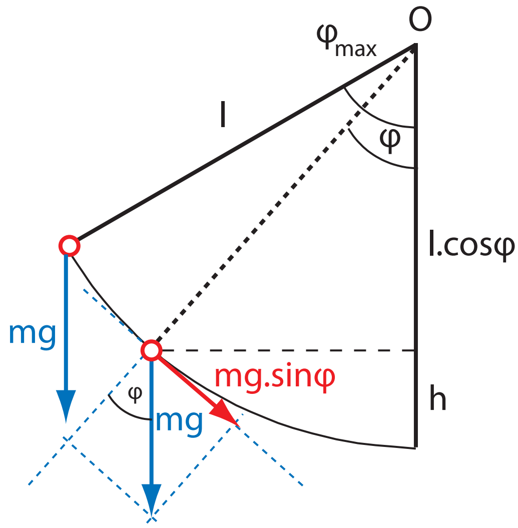
Nyní musíme zvolit integrační meze a vhodnou substituci. Použijme substituci

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_{max}}{2}.\sin\Phi$$

a integrujme v mezích $t = 0\ldots\Phi = 0$, $t = \frac{T}{4}\ldots\Phi = \frac{\pi}{2}$. Tato volba zajišťuje, že v čase $t = 0$ je kyvadlo v rovnovážné poloze a v čase $t = \frac{T}{4}$ je kyvadlo v amplitudě φ_{max}.

Postupujme takto:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\varphi}{2} &= \sin\frac{\varphi_{max}}{2}.\sin\Phi \\
\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi &= \sin\frac{\varphi_{max}}{2}.\cos\Phi d\Phi \\
\cos\varphi &= \cos 2.\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 - 2.\sin^2\frac{\varphi}{2} \\
\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_{max}}} &= \frac{\sin\frac{\varphi_{max}}{2}.\cos\Phi d\Phi}{\frac{1}{2}.\cos\frac{\varphi}{2}.\sqrt{\left(1-2.\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) - \left(1 - 2.\sin^2\frac{\varphi_{max}}{2}\right)}} = \\
&= \frac{\sin\frac{\varphi_{max}}{2}.\cos\Phi d\Phi}{\frac{1}{2}.\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}}.\sqrt{2.\sin^2\frac{\varphi_{max}}{2}\left(1-\sin^2\Phi\right)}} = \\
&= \frac{\sqrt{2}d\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\sqrt{2}d\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^2\Phi}}
\end{aligned}$$



Obrázek 3: Matematické kyvadlo

Takovýto integrál by však nebyl exaktně řešitelný, je to tzv. eliptický integrál EllipticK( ), tabelován je například v Maple. Výraz ve jmenovateli lze rozvinout v řadu:

$$|\varepsilon| < 1 \quad \Rightarrow \quad (1 \pm \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{1}{2}.\varepsilon + \frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2 \mp \frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\varepsilon^4 \mp \dots$$

$$\begin{aligned}\left(1 - \sin^2 \frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^2 \Phi\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}.\sin^2 \frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^2 \Phi + \frac{1.3}{2.4}\sin^4 \frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^4 \Phi + \\ &+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6 \frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^6 \Phi + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin^8 \frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^8 \Phi + \dots\end{aligned}$$

Nyní se můžeme věnovat konečně výslednému integrování:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{T}{4}} dt &= \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2}\,(\cos\varphi - \cos\varphi_{max})} \\ \frac{T}{4} &= \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \frac{1}{2}.\sin^2 \frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^2 \Phi + \frac{1.3}{2.4}\sin^4 \frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^4 \Phi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6 \frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^6 \Phi + \right. \\ &\left. + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin^8 \frac{\varphi_{max}}{2}.\sin^8 \Phi + \dots\right] d\Phi \\ T &= 4.\sqrt{\frac{l}{g}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}.\sin^2 \frac{\varphi_{max}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \Phi d\Phi + \frac{1.3}{2.4}\sin^4 \frac{\varphi_{max}}{2}. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \Phi d\Phi + \right. \\ &\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6 \frac{\varphi_{max}}{2}. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \Phi d\Phi + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin^8 \frac{\varphi_{max}}{2}. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 \Phi d\Phi + \dots\right]\end{aligned}$$

Nyní je potřeba zintegrovat sudou mocninu funkce sinus v daných mezích. Platí:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \Phi d\Phi &= \frac{1.3.5.\dots.(2n-1)}{2.4.6.\dots.2n}.\frac{\pi}{2} \quad \text{pro } n \geq 1, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \Phi d\Phi &= \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Poslední výraz pak přejde do tvaru

$$T = 4.\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}.\sin^2\frac{\varphi_{max}}{2}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\Phi d\Phi}_{\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}} + \frac{1.3}{2.4}\sin^4\frac{\varphi_{max}}{2}.\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\Phi d\Phi}_{\frac{1.3}{2.4}.\frac{\pi}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6\frac{\varphi_{max}}{2}.\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\Phi d\Phi}_{\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\pi}{2}} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin^8\frac{\varphi_{max}}{2}.\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8\Phi d\Phi}_{\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{\pi}{2}} + \dots\right]$$

Nakonec dostaneme hledaný vztah pro periodu kyvu matematického kyvadla s libovolně velkou amplitudou (vztah pro periodu $T = 2\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}$ bez následující závorky používáme pouze v přiblížení pro malé úhly $\varphi_{max} < 5°$):

$$T_{neaprox} = \underbrace{2\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}}_{T}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2.\sin^2\frac{\varphi_{max}}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\varphi_{max}}{2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\sin^6\frac{\varphi_{max}}{2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2\sin^8\frac{\varphi_{max}}{2} + \dots\right]$$