SAMOADJUNGOVANÉ OPERÁTORY

<u>Definice:</u> U, V vektorové prostory se skalárním součinem

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

lineární zobrazení. Zobrazení $\varphi^* : V \longrightarrow U$ se nazývá adjungované k zobrazení φ, jestliže platí

$$\forall u \in U, \forall v \in V : \quad \langle \varphi(u), v \rangle_V = \langle u, \varphi^*(v) \rangle_U$$

<u>Příklad:</u> $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $\varphi(x) = Ax$, A matice $k \times n$

$\varphi^* : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ je definována předpisem $\varphi^*(y) = A^T y$.

$$\langle \varphi(x), y \rangle_{\mathbb{R}^k} = (Ax)^T \cdot y = x^T A^T y = x^T \cdot (A^T y) = \langle x, \varphi^* y \rangle .$$

Odtud plyne $\quad A^T = \overline{B}, \quad B = \overline{\overline{B}} = \overline{A}^T$

Stačí zvolit φ^* tak, aby $(\varphi^*)_{\alpha,\beta} = \overline{A}^T$ a dostaneme φ^* jako adjungované zobrazení.

Definice: Nechť U je vekt. prostor se skalárním součinem. Operátor $\varphi : U \to U$ se nazývá samoadjungovaný, jestliže

$$\forall u, v \in U : \quad \langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$$

Jinými slovy $\varphi = \varphi^*$.

Věta o matici samoadjungovaného operátoru:
Nechť $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný a nechť α je ortonormální báze

Příklad Kolmá projekce na podprostor je samoadjungované zobrazení

U vekt. prostor, $V \subseteq U$ podprostor, $\varphi : U \longrightarrow U$, φ je kolmá projekce na V.

φ je samoadjungované:

- $\forall u \in U \quad \varphi(u) \in V$
- $\quad u - \varphi(u) \perp V$

$$\underline{\langle \varphi(u), v \rangle} = \langle \varphi(u), v - \varphi(v) + \varphi(v) \rangle = \overbrace{\langle \underbrace{\varphi(u)}_{\in V}, \underbrace{v - \varphi(v)}_{\in V^\perp} \rangle}^{=0} + \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle =$$

$$= \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle \underbrace{u - \varphi(u)}_{\in V^\perp}, \underbrace{\varphi(v)}_{V} \rangle + \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle =$$

$$= \underline{\langle u, \varphi(v) \rangle}$$

Věta o vlastních číslech a vektorech samoadj. operátorů

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skalárním součinem a $\varphi: U \to U$ samoadjungovaný operátor. Potom platí

(1) každé vlastní číslo λ operátoru φ je reálné

(2) jsou-li u_1, u_2 dva vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům λ_1, λ_2, pak $u_1 \perp u_2$.

(3) V U existuje ortonormální báze z tvořená vlastními vektory operátoru φ.

<u>Důkaz:</u> (1) Nechť λ je vlastní číslo s vlastním vektorem $u \neq \vec{o}$.

$$\lambda \underset{\neq 0}{\langle u,u\rangle} = \langle \lambda u, u\rangle = \langle \varphi(u), u\rangle = \langle u, \varphi(u)\rangle = \langle u, \lambda u\rangle = \bar{\lambda} \underset{\neq 0}{\langle u,u\rangle}$$

$$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nechť u_1 je příslušný vlastní vektor k kořenu vl čísla (označme to $\lambda_1 \in \mathbb{R}$)

Potom ukážeme, že $V = \{u_1\}^\perp$ je invariantní podprostor vzhledem k φ.

$v \in V$

$$\langle \varphi(v), u_1 \rangle = \langle v, \varphi(u_1) \rangle = \langle v, \lambda_1 u_1 \rangle = \overline{\lambda_1} \langle v, u_1 \rangle =$$

$$= \lambda_1 \langle \underset{V}{\underset{\cap}{v}}, \underset{\perp V}{\underset{\cap}{u_1}} \rangle = 0$$

$\varphi(v)$ je kolmé na u_1. tedy leží ve V.

Proto

$\varphi/V : V \longrightarrow V$ je samoadjungovaný operátor na prostoru

V dimenze $n-1$. Podle ind. předpokladu, má V ortonormální bázi tvořenou vlastními vektory $u_2, u_3, \dots u_n$. Proto $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ je ortonormální bázi.

Spektrum lin. operátoru = množina vlastních čísel lin. operátoru včetně algebraických násobností

Spektrum samoadj. operátoru je

$$\underbrace{\lambda_1\,\lambda_1 \dots \lambda_1}_{\text{násobnost } \lambda_1} \quad \underbrace{\lambda_2 \dots \lambda_2}_{\text{násobnost } \lambda_2} \quad \dots \quad \underbrace{\lambda_k \dots \lambda_k}_{\text{násobnost } \lambda_k}$$

U samoadj. operátoru alg. násobnost = geom. násobnost neboť v U je báze tvořená vlastními vektory.

<u>Věta</u> Spektrální rozklad samoadj. operátoru

Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ jsou všechna vl. čísla samoadj. operátoru $\varphi : U \to U$

Důsledek věty o ortonormální bázi

Nechť A je symetrická reálná matice. Potom existuje ortonormální matice P (tj. $P^{-1} = P^T$) taková, že

$$P^{-1} A P = P^T A P$$

je diagonální matice.

Dk: $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$, $A = A^T$, φ je samoadj. operátor.
Podle věty o ortonormální bázi samoadj. operátorem, existuje v $\mathbb{R}^n$ báze α tvořená vlastními vektory.

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix} = (\varphi)_{\alpha,\varepsilon} (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} (id)_{\varepsilon,\alpha} = P^{-1} A P$$

Věta Diagonalizace kvadr. formy v ortonormální bázi:

Nechť U je prostor reálný se skal. součinem. Nechť $g: U \to \mathbb{R}$ je kvadr. forma. Potom v U existuje ortonormální báze $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ taková, že v souřadnicích této báze, že

$$g(u) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$$

přitom $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice B kvadr. formy.

Dk: Nechť β je ortonormální báze v U. Matice g v bázi β je B. Tato matice je symetrická, tedy zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Bx$ je samoadjungované.