Věta: Nechť $\varphi: U \to V$ je lineární, U, V komplexní vekt. prostory se skalárním součinem. Potom $\varphi^*: V \to U$ existuje a je určeno jednoznačně. Navíc, je-li α ortonormální báze v U a β ortonormální báze ve V platí

$$(\varphi^*)_{\alpha,\beta} = \overline{(\varphi)_{\beta,\alpha}}^T$$

$$B = \overline{A}^T$$

Důkaz. Pokud φ^* existuje a má $(\varphi^*)_{\alpha,\beta} = B$, pak platí $((\varphi)_{\beta,\alpha} = A)$

$$(A(u)_\alpha)^T \cdot \overline{(v)_\beta} = ((\varphi(u))_\beta)^T \cdot \overline{(v)_\beta} = \langle \varphi(u), v \rangle_V = \langle u, \varphi^*(v) \rangle_U = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(\varphi^* v)_\alpha} = (u)_\alpha^T \, \overline{B \cdot (v)_\beta}$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$(u)_\alpha^T A^T \overline{(v)_\beta} \qquad\qquad (u)_\alpha^T \overline{B} \cdot \overline{(v)_\beta}$$

vzhledem k bázi α prostoru U. Potom pro matici $A = (\varphi)_{\alpha\alpha}$ platí

$$A = \overline{A}^T \quad (\text{j.-li } U \text{ nad } \mathbb{C})$$

$$A = A^T \quad (\text{j.-li } U \text{ nad } \mathbb{R}).$$

<u>Definice:</u> Komplexní matice A s vlastností $A = \overline{A}^T$ se nazývá hermitovská matice.

<u>Příklad.</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 3-i \\ 3+i & 2 \end{pmatrix} \qquad \overline{\begin{pmatrix} 1 & 3-i \\ 3+i & 2 \end{pmatrix}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3-i \\ 3+i & 2 \end{pmatrix},$$

Jinak: $v_1, \dots v_k$ ortonormální báze podprostoru V, doplníme si na ortonormální bázi $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots v_n$ prostoru U. Označme $\alpha = (v_1, \dots, v_n)$.

Potom

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = A$$

$\varphi(v_1) = v_1 = 1 v_1 + 0 \cdot v_2 \dots$

$\varphi(v_2) = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 v_2 + \dots$

$\vdots$

$\varphi(v_k) = v_k$

$\varphi(v_{k+1}) = 0$

$\vdots$

$\varphi(v_n) = 0$

$\overline{A}^T = A$, tedy φ je samoadjungovaný operátor.

(2) Nechť λ_1 je vl. číslo s vl. vektorem u_1 a $\lambda_2 \neq \lambda_1$ je vl. číslo s vl. vektorem u_2.

$$\underline{\lambda_1\langle u_1, u_2\rangle} = \langle \lambda_1 u_1, u_2\rangle = \langle \varphi(u_1), u_2\rangle = \langle u_1, \varphi(u_2)\rangle = \langle u_1, \lambda_2 u_2\rangle = \overline{\lambda_2}\langle u_1, u_2\rangle$$

$$= \underline{\lambda_2\langle u_1, u_2\rangle}$$

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}\langle u_1, u_2\rangle = 0$$

Odtud plyne, že $\langle u_1, u_2\rangle = 0$, tedy $u_1 \perp u_2$.

(3) Dokážeme indukcí podle dim prostoru U. Je-li $\dim U = 1$, věta platí.
Nechť $\dim U = n$ a věta platí pro $\dim \leq n-1$.
$\varphi: U \to U$ je samoadjungované a U je nad $\mathbb{C}$, tak char. polynom má kořen v $\mathbb{C}$, to je vlastní číslo a podle (1) leží v $\mathbb{R}$.

Takže prostor U tvořený vlastními vektory. ■

Důkaz pro $\varphi : U \to U$, kde U je reálný prostor. Předpokládejme, že $U = \mathbb{R}^n$.

Potom $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$, $A = A^T$. (A reálná matice symetr.)

$\tilde{\varphi} :$ $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\tilde{\varphi}(x) = Ax$, $x \in \mathbb{C}^n$

$A = \bar{A}^T$, $\tilde{\varphi}$ je samoadjungovaný operátor, ten má vlastní číslo

$\lambda_1 \in \mathbb{R}$ a toto vlastní číslo má vlastní vektor $u_1 \in \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$

Nyní postupujeme stejně jako v předchozím případě nad $\mathbb{C}$.

Nechť $U_1, U_2, \dots U_k$ jsou příslušné vlastní podprostory pro vl. čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

$$U_i = \ker(\varphi - \lambda_i \mathrm{id})$$

Nechť $P_1, P_2, \dots P_k$ jsou kolmé projekce na podprostory $U_1, U_2, \dots U_k$.

Potom

$$\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k.$$

Důkaz: Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ je ortonormální báze tvořená vlastními vektory φ. Ukážeme, že lin. zobrazení φ a $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k$ jsou si na těchto vektorech rovny.

$$\varphi(u_1) = \lambda_{i_1} u_1 \qquad u_1 \in U_{i_1} \quad u_1 \perp U_1, U_2, \dots \text{ ostatní vl. prostory}$$

$$\lambda_1 P_1 u_1 + \lambda_2 P_2 u_1 + \dots = 0 + 0 + \dots \lambda_{i_1} \boxed{P_{i_1} u_1} + 0 + \dots 0 = \lambda_{i_1} \boxed{u_1}$$

Protože ε i α jsou ortonormální báze, je matice $(id)_{\varepsilon,\alpha}$ je ortogonální. Proto $P^{-1} = P^T$ a tudíž

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = P^{-1} A P = P^T A P$$

Lin. operátor samoadj. $\qquad \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \varphi(x) = Ax, \quad A = A^T$

Sym. bilin. forma $\qquad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = x^T A y$

$A = A^T$

Transformace operátoru do jiných bází $\qquad B = P^{-1} A P$

Transformace bilin. formy $\qquad B = Q^T A Q$

$P^T A P$

Obě formulky jsou stejné pokud P je ortogonální.

Tedy existuje ~~[illegible]~~ ortogonální matice P taková, že

$$P^T B P \qquad\qquad P = (id)_{\beta\alpha}$$

je diagonální. Nyní nazveme bázi α takto

$$\alpha = \beta\ (id)_{\beta\alpha} = \beta P$$

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n)\, P$$

V této bázi, je matice kvadratické formy g rovna

$$P^T B P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda \end{pmatrix}$$

$(v_1, v_2, \dots, v_n)$ je ortonormální báze.

Proto i báze $\alpha = \beta P$, kde P je ortogonální matice je ~~ortogonální~~ ortonormální.