Minule jsme dokázali, že ke každé kvadratické formě na $\mathbb{R}^n$ existuje ortonormální báze, v níž je forma diagonální.

Tuto bázi musíme hledat pomocí vl. čísel a vektorů matice kvadr. formy.

<u>Příklad</u> $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad g(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$

matice g ve stand. bázi je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$ symetrická matice

Diagonalizace pomocí úpravy na čtverce $\quad y_1 = x_1 - x_2 \quad y_2 = x_2$

$$g(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$$

$=$

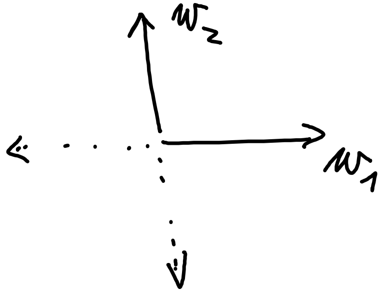
$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}\left(1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^T$$

$$w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}\left(1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^T$$

ortonormální báze v $\mathbb{R}^2$

V ~~ta.~~ souřadnicích z_1, z_2 této báze je

$$g(x) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} z_1^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} z_2^2$$



Matice má JKT, je-li blokově diagonální a jednotlivé bloky jsou tzv. Jordanovy buňky

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & & & 0 \\ & \boxed{J_{k_2}(\lambda_2)} & & & \\ & & \boxed{J_{k_3}(\lambda_3)} & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{J_{k_i}(\lambda_i)} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_1) - \lambda v_1 = \vec{O} \qquad (\varphi - \lambda id) v_1 = \vec{O}$$
$$\varphi(v_2) - \lambda v_2 = v_1 \qquad (\varphi - \lambda id) v_2 = v_1$$
$$\varphi(v_3) - \lambda v_3 = v_2 \qquad (\varphi - \lambda id) v_3 = v_2$$
$$\vdots \qquad \text{- - - - - - - -}$$
$$\varphi(v_k) - \lambda v_k = v_{k-1} \qquad (\varphi - \lambda id) v_k = v_{k-1}$$

$$(2) \qquad v_k \xrightarrow{\varphi - \lambda id} v_{k-1} \xrightarrow{\varphi - \lambda id} v_{k-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_2 \xrightarrow{\varphi - \lambda id} v_1 \xrightarrow{\varphi - \lambda id} \vec{O}$$

Vektory $v_1, v_2, \ldots v_k$ splňující (2) se nazývají řetízec operátoru φ na vlastní číslo λ.

Dokázali jsme: <u>Věta:</u> Je-li $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J_k(\lambda)$, pak vektory báze α tvoří řetízec.

Dostaneme $\underbrace{a_1 \cdot \vec{o}}_{\vec{o}} + a_2 v_1 + a_3 v_2 + \dots + a_{j+1} v_j = \vec{o}$

Podle ind. předpokladu jsou $v_1, v_2, \dots, v_j$ lin. nezávislé, proto

$$a_2 = a_3 = \dots = a_{j+1} = 0$$

Dosadíme zpět $\quad a_1 v_1 = 0 \qquad v_1 \neq \vec{o} \implies a_1 = 0.$

Tím jsme dokázali lin. nezávislost.

$$\varphi(v_1) = \lambda v_1 + (0 v_2 + 0 v_3 + \dots)$$
$$\varphi(v_2) = v_1 + \lambda v_2$$
$$\vdots$$
$$\varphi(v_k) = v_{k-1} + \lambda v_k$$

$$(\varphi - \lambda\, id) v_2 = v_1 \iff \varphi(v_2) - \lambda v_2 = v_1$$

Tedy $V = [v_1, v_2, \dots, v_k]$ je invariantní.

$$(\varphi / V)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \\ 0 & \lambda & 1 & \\ 0 & 0 & \lambda & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} = J_k(\lambda)$$

② Věta o Jordanově kanonickém tvaru nad $\mathbb{C}$

Nechť U je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Potom pro každý lin. operátor $\varphi : U \to U$ existuje báze α prostoru U taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$

je matice v JKT. Tato matice je určena jednoznačně až na pořadí bloků.

① $\Rightarrow$ ② neboť char. polynom nad $\mathbb{C}$ má n kořenů včetně násobností

Pravidlo 1 pro počítání JKT

J má na diagonále vlastní čísla operátoru φ každé tolikrát, kolik činí jejich násobnost.

Pravidlo číslo 2

J má tolik buněk kolik činí součet geometrických násobností tj. vlastních čísel operátoru φ

$$J = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{matrix} & \\ & \begin{matrix} \lambda_2 & 1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Každá buňka určuje řetězec a v něm je jeden vlastní vektor.

Příklad 1b

$\varphi(x) = Ax \quad : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$\lambda_1 = 2 \qquad v_1 = (1,0,0)^T$

$\lambda_2 = 1 \qquad v_2 = (1,-1,0)^T$ geom. násobnost 1

Z pravidel 1 a 2 víme už, že

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ \hline & 1 & 1 \\ & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Chceme najít bázi α tak, že $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$

Musíme najít řetězec délky 2 pro vl. číslo 1

$$v_3 \xrightarrow{\varphi - id} v_2 \xrightarrow{\varphi - id} 0$$

$$(A - E)v_3 = v_2$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Potřebujeme najít bázi α tak, že $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$.

$\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ je řetězec pro vl. číslo 2.

$$(A-2E)\, u_2 = u_1 \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A-2E)\, u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jiný postup: najdeme řetězec v opačném pořadí („hádáním")

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{A-2E} v_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \xmapsto{A-2E} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \xmapsto{A-2E} \vec{o}$$

$$(A-2E)\,w = au + bv$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ -2 & -4 & 0 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b \end{array}\right)$$

Soustava je řešitelná pouze když $2a + b = 0$

$a = 1,\ b - 2$. Potom

$w = (-1, 1, 1)^T$ je řešením.

$$\alpha = (u,\ u - 2v,\ w)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J$$