Jordanův kanonický tvar

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & J_{k_3}(\lambda_3) & \\ 0 & & & \boxed{} \end{pmatrix} \qquad J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & \ddots \\ & 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$k \times k$

Věta o JKT Předpoklad: $\varphi : U \to U$ je lin. operátor, který má $n = \dim U$ vlastních čísel vč. alg. násobnosti. Pak existuje báze α v U taková, že

Báze α se skládá z řetězců, pro každou Jordanovu buňku máme jeden řetězec

$$v_k \xrightarrow{\varphi-\lambda id} v_{k-1} \xrightarrow{\varphi-\lambda id} v_{k-2} \xrightarrow{\varphi-\lambda id} \dots \; v_2 \longrightarrow \underbrace{\underline{v_1}}_{\text{vl. vektor}} \xrightarrow{\varphi-\lambda id} 0$$

Pro JkT matice A platí

① Na diagonále jsou vl. čísla matice A každé tolikrát, kolik činí jeho alg násobnost.

② Počet buněk pro vl číslo λ je roven geom násobnosti vl čísla λ
(V každém řetězci jeden vl. vektor.)

(3) geom. násobnost je 1   1 Jordanova buňka   1 řetězec délky 4

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(4) geom. násobnost je 2   2 Jordanovy buňky neurčují JKT jednoznačně

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad J = \begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} & \\ & \boxed{\lambda} \end{matrix}$$

2 řetězce délky 2   1 řetězec délky 3
1 řetězec délky 1

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 2 & 2 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a-2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tato soustava má řešení pro každé $\underline{a}$ a $\underline{b}$.

Rovnice $(A+E)\,w_1 = u$, $(A+E)\,w_2 = v$ mají řešení

Dostáváme dva řetězce délky 2

$$w_1 \xrightarrow{A+E} u \xrightarrow{A+E} 0 \qquad w_1 = (0,-1,0,3)^T$$

$$w_2 \xrightarrow{A+E} v \xrightarrow{A+E} 0 \qquad w_2 = (0,-2,0,5)^T$$

V bázi tvořené těmito řetězci

$$\alpha = (u, w_1, v, w_2) \text{ je } (\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix} =: J$$

Máme-li pěkná celá čísla, lze je hezky "hádat"

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A+E} v_1 = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -30 \\ -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{A+E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = (v_1, v_2, w_1, w_2)$$

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A+E} w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A+E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J = Q^{-1} A Q$$

$$Q = \begin{pmatrix} -12 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 0 & 12 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soustava má řešení, právě když $a + 6b = 0$.

$a = -6, \ b = 1 \qquad -6u + v = (-2, -6, 3, -6)^T$

Řešení $(A - E)w = -6u + v$ je tvaru

$$w = \left(\frac{1}{3}, -1, 0, 0\right)^T + \underbrace{a_1 u + b_1 v}_{\text{obecné řešení } (A-E)x = 0}$$

w je 2 vektor řetízce

$$w \xrightarrow{A-E} -6u + v \xrightarrow{A-E} 0$$

Hledáme 3. vektor $(A - E)z = w$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 6 & 8 & 4 & -8 & -1 + a_1 \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b_1 \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a_1 \end{array}\right) \sim \underset{\dots\dots\dots}{\text{stejné úpravy}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & +1 + \frac{1}{3} b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \end{array}\right)$$

„Hádání"

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A \cdot E} v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{A \cdot E} v_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \\ 9 \\ -18 \end{pmatrix} \longrightarrow 0$$

v_4 vl. vektor lin. nezávislý s v_1

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow 0$$

Volím $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ pak

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hline & & & 3 & 1 \\ & & & 0 & 3 \end{array}$$

$$(J-2E)^2 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \end{pmatrix} =$$

$$(J-2E) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & 0 & & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & & & 1 & 2 \\ & & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$5-1$

$5-2=3$

$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

A matice $n \times n$ a chceme řešit soustavu dif. rovnic

$$x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n$$
$$x_2' = a_{21} x_1 + \dots \quad \dots + a_{2n} x_n$$
$$x_n' = a_{n1} x_1 + \dots \quad \dots + a_{nn} x_n$$

a_{ij} konstanty

$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \dots$

$$x'(t) = A\,x(t), \quad x(0) = x^0$$

Lemma Je-li $y(t)$ řešení soustavy $y'(t) = D\,y(t)$, pak $P\,y(t) = x(t)$ je řešením soustavy
$$x'(t) = A\,x(t), \quad \text{kde } P^{-1}AP = D.$$

Důkaz. Derivujme
$$x'(t) = \big(P\,y(t)\big)' = P\,y'(t) = P\,D\,y(t) = P\,D\,P^{-1}x(t) = A\,x(t)$$

~~Př~~ ~~Ať~~ Nechť $\alpha = (v_1, v_2, \dots v_n)$ je báze $\mathbb{R}^n$ tvořená vl. vektory matice A. Pak $P = (id)_{\varepsilon\alpha}$

Řešení je $x(t) = (id)_{\varepsilon\alpha} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$

V případě, že $J = P^{-1}AP$, kde J je matice v JKT

je řešení rovnice $x'(t) = Ax(t)$

opět tvaru $x(t) = Py(t)$, kde $y(t)$ je řešení rovnice

$$y'(t) = Jy(t)$$

Řešení této soustavy jsou tvaru $\left(D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \right)$

$$e^{Jt} y^0 = e^{(D+Z)t} y^0 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} e^{Zt} y^0 =$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots$$