$(\varphi)_{\alpha\alpha}$ je matice v JKT. $\alpha = (v_1, v_2, \ldots v_n)$

· Jednoznačnost

$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} =$

$P = (id)_{\varepsilon\alpha} = \left((v_1)_\varepsilon \; (v_2)_\varepsilon \ldots (v_n)_\varepsilon \right)$

V úlohách $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$, $\varphi(x) = Ax$.

$(\varphi)_{\varepsilon\varepsilon} = A$

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha\varepsilon} (\varphi)_{\varepsilon\varepsilon} (id)_{\varepsilon\alpha} = P^{-1} A P$$

Věta pro matice: Jediná matice $n \times n$ má n vlastních čísel (počítáno s násobnostmi), je podobná matici v JKT.

$$J = P^{-1} A P \qquad P = (id)_{\varepsilon\alpha}$$

Matice 4×4 má vlastní číslo λ alg. násobnosti 4

(1) geom. násobnost je 4 ... 4 Jordanovy buňky, 4 lin. nez. vl. vektory

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & & & 0 \\ & \boxed{\lambda} & & \\ & & \boxed{\lambda} & \\ 0 & & & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

(2) geom. násobnost je 3 ... 3 Jord. buňky

$1 \times (2 \times 2)$

$2 \times (1 \times 1)$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\lambda} & \\ & & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

1 řetězec délky 2

2 řetězce délky 1

Příklad 4 $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $\quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda E) = (1+\lambda)^4$

-1 je vl. čísla alg. násobnosti 4

Vl. vektory: $\quad (A - \lambda E)\, x = 0$

pod tvaru $au + bv$

$u = (1,0,3,6)^T, \quad v = (0,0,1,-2)^T$

Hledáme řetězec: $\quad (A - \lambda E)\, w = au + bv$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -12 & 5 & 4 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 10 & 5 & 3a+b \\ -12 & 6 & 4 & 2 & -2b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -12 & 5 & 4 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a-2b \\ -6 & 2 & 2 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 2 & 2 & 1 & a-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a-2b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a-2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tj. máme, že $J = P^{-1} A P$, kde

$$P = (id)_{\varepsilon\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(A+E)u = 0$$

$$(A+E)v = 0$$

$$(A+E)^2 w_1 = (A+E)\underbrace{(A+E)w_1}_{u} = 0$$

$$(A+E)^2 w_2 = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}^4 \quad (A+E)^2 x = 0.$

$$(\varphi - \lambda\, id)^2 = 0$$

Příklad 5 $\quad \varphi: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)^4$

1 je vl. číslo alg násobnosti 4

a geom násobnosti 2

Vl vektory $au + bv$

$u = (0,1,0,1)^T$, $v = (-2,0,3,0)^T$

$(A-E)w = au + bv$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 6 & 8 & 4 & -8 & a \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 2 & 0 & -2 & a+4b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right)$$

Soustava má řešení právě když $-1 \cdot a_1 + 6 b_1 = 0$

Zvolíme $a_1 = 1,\ b_1 = 0$

$$w = \left(\frac{1}{3}, -1, 0, 0\right) + u = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 1\right)^T$$

$$z = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$$

řetízek délky 3 je:

$$z \xrightarrow{A-E} w \xrightarrow{A-E} -6u+v \xrightarrow{A-E} 0$$

$$u \xrightarrow{A-E} 0$$

V bázi

$\alpha = (-6u+v, w, z, u)$ má φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right)$$

$$(A-E)^2 z = (A-E) w = -6u + v \neq 0$$

Zde existují vektory takové, že $(A-E)^2 x \neq 0$, ale $\forall x\ (A-E)^3 x = 0$.

V příkladu 4 $\quad \forall x \in \mathbb{R}^4 \quad (\varphi - \lambda\, id)^2 x = 0$

V příkladu 5 $\quad \forall x \in \mathbb{R}^4 \quad (\varphi - \lambda\, id)^3 x = 0$, ale existovalo z

$$(A - \lambda\, id)^2 z \neq 0$$

Pravidlo 3

Velikost největší buňky pro vl. čísla λ = nejmenší k takové, že

$$\text{hodnost } (A - \lambda E)^k = n - \text{alg násobnost } \lambda$$

Příklad 4 a 5, alg. násobnost $\lambda = n = 4$

$$h\,(A - \lambda E)^k = 0$$

nejmenší $k = 2$ v příkladu 4

nejmenší $k = 3$ v příkladu 5

$$(J-2E)^3 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & & & 1 & 3 \\ & & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$h = 5 - 3$$

$$(J-2E)^4 = \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline & 1 & 4 \\ & 0 & 1 \end{array}$$

$$h = 5-3 = 2$$

$$h(J-2E)^k = n \cdot \text{alg.} \cdot \text{na}^{?} \cdot 2$$

$$5 - 3 = 2$$

$D = P^{-1} \_ P$, kde D je diagonální

Uvažujme rovnici $y'(t) = D\, y(t)$, $y(0) = y^0$

Tato rovnice má řešení

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & \ddots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix} \text{ pro } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$y_1' = \lambda_1 y_1$$
$$y_2' = \lambda_2 y_2$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} y_1^0 \\ e^{\lambda_2 t} y_2^0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(e^{\lambda_1 t} v_1,\ e^{\lambda_2 t} v_2,\ e^{\lambda_3 t} v_3,\ \dots\ e^{\lambda_n t} v_n \right) \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix} =$$

$$x(t) = y_1^0 e^{\lambda_1 t} v_1 + y_2^0 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + y_n^0 e^{\lambda_n t} v_n$$

Toto je tvar obecného řešení rovnice $x'(t) = A x(t)$ pokud A je podobná diagonální matici

jinak $v_1, v_2, \dots v_n$ je báze tvořená vl. vektory

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \cdot \left(E t + Z t + \frac{Z^2 t^2}{2!} + \frac{Z^3 t^3}{3!} + \dots \dots \right) \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\exists k$ tak, že $Z^k = 0$

Proto je výraz v závorce konečný a můžeme ho spočítat

$(*)$ je obecné řešení soustavy $y'(t) = J y(t)$