$u_1 \sim_V u_2$ a $v_1 \sim_V v_2 \Rightarrow u_1 + v_1 \sim_V u_2 + v_2$

Věta (Zjednodušená verze Jordanovy věty)

Nechť $\varphi : U \to U$ má vl. čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ ~~součet jejich alg. ná~~
každé uvedené tolikrát, kolik činí jeho alg. násobnost.
Pak v U existuje báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & & \\ & \lambda_2 & * & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Důkaz indukcí podle $\dim U$.
λ_1 je vlastní číslo, nechť $u_1 \neq 0$ je jeho vlastní vektor.

na $\tilde{\varphi}: U/[u_1] \to U/[u_1]$ aplikujeme ind. předpoklad

Existuje báze $\beta = (u_2 + [u_1], u_3 + [u_1], u_4 + [u_1], \dots u_n + [u_1])$

že $(\tilde{\varphi})_{\beta\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & b_1 & * \\ & \lambda_3 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\quad (\varphi)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_1 & a_2 & \\ 0 & \lambda_2 & b_1 & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \\ \vdots & \vdots & 0 & \\ 0 & 0 & \vdots & \\ & & 0 & \end{pmatrix}$ atd

$\alpha = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ také je báze (U)

Spočítáme $\varphi(u_1), \varphi(u_2)$, atd

$\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1$

$\tilde{\varphi}(u_2 + [u_1]) = \lambda_2 (u_2 + [u_1])$

$\varphi(u_2) + [u_1] = \lambda_2 u_2 + [u_1]$

$\varphi(u_2) = \lambda_2 u_2 +$ prvek z $[u_1] = \lambda_2 u_2 + a_1 u_1$

www.math.muni.cz/~slovak

$\sim 35-45$

Nechť φ splňuje předpoklady věty (součet alg. násobností vl. čísel $= n = \dim U$, $\varphi: U \to U$)

Kořenový podprostor pro vlastní číslo λ je

$$R_\lambda = \{ u \in U,\ \exists k \in \mathbb{N}\ (\varphi - \lambda\, id)^k u = 0 \}$$

Řetězec $\quad u_s \to u_{s-1} \to u_{s-2} \ldots \xrightarrow{\varphi - \lambda id} u_1 \xrightarrow{\varphi - \lambda id} 0$

$(\varphi - \lambda id)^s u = 0 \qquad \ker(\varphi - \lambda id) \subseteq R_\lambda$

Věta o kořenových podprostorech

(1) R_λ je skutečně vekt. podprostor

(2) R_λ je invariantní vůči φ $\quad \varphi(R_\lambda) \subseteq R_\lambda$.

(3) $\alpha \neq \lambda$, pak $\varphi - \alpha\, id / R_\lambda : R_\lambda \to R_\lambda$ je izomorfismus

3) Uz nime, še $(\varphi - \mu\, id)(R_\lambda) \subseteq R_\lambda$

Predp. še $u \in R_\lambda \cap \ker(\varphi - \mu\, id)$, $u \neq 0$

Naj bo l je najmanjši takšno, da $(\varphi - \lambda\, id)^l u = 0$

Potem $\varphi(u) = \mu u$

$$\underset{\overset{\|}{0}}{(\varphi - \lambda\, id)^l u} = (\varphi - \lambda\, id)^{l-1}(\varphi(u) - \lambda u) = (\varphi - \lambda\, id)^{l-1}(\mu u - \lambda u)$$

$$= (\mu - \lambda)(\varphi - \lambda\, id)^{l-1} u \neq 0$$

spor $\quad \varphi - \mu\, id|_{R_\lambda} : R_\lambda \to R_\lambda$ je injektivna, je tudi izomorfizem.

(4) $v_1, v_2, \dots v_k$ je baza R_λ $\quad \exists k_i \quad (\varphi - \lambda\, id)^{k_i} v_i = 0$

$k = \max k_i \quad (\varphi - \lambda\, id)^k v_i = 0 \Rightarrow \forall u \in R_\lambda \quad (\varphi - \lambda\, id)^k u = 0$

Dk Součet je přímý pomocí indukce podle k.

Nechť $R_{\lambda_1}+\dots+R_{\lambda_{k-1}}$ je přímý.

Nechť $u_1+u_2+\dots+u_k = 0$ / aplikujeme $(\varphi-\lambda_k \, id)^{k_i}$

$$\underbrace{(\varphi-\lambda_k id)^{k_1} u_1}_{v_1 \in R_{\lambda_1}} + \dots + \underbrace{(\varphi-\lambda_k id)^{k_1} u_{k-1}}_{v_{k-1} \in R_{\lambda_{k-1}}} + \underbrace{(\varphi-\lambda_k id)^{k_1} u_k}_{\vec{0}} = 0$$

$$v_1+v_2+\dots+v_{k-1} = \vec{0}$$

Podle ind. předpokladu $v_1=v_2=\dots=v_{k-1}=\vec{0}$

$(\varphi-\lambda_k id)^{k_1}$ je izomorfismus na R_{λ_i} pro $i<k$.

Proto $u_1 = \left[(\varphi-\lambda_k id)^k\right]^{-1} v_1 = 0$, $u_2=\dots=u_{k-1}=\vec{0} \Rightarrow u_k=\vec{0}$.

Indukcí se dokáže, že

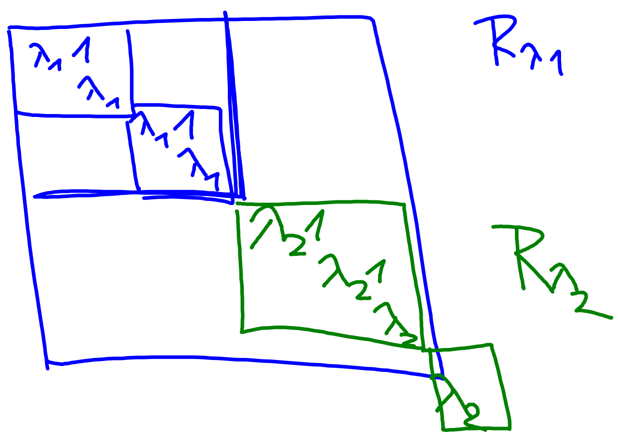
$$\dim(R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus R_{\lambda_k}) = \dim R_{\lambda_1} + \dim R_{\lambda_2} + \ldots\ldots$$
$$= n_1 + n_2 + \ldots = n$$

$R_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus R_{\lambda_k} \subseteq U \qquad \dim U = n \implies R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus R_{\lambda_k} = U.$

$\varphi(x) = Jx \qquad \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad R_{\lambda_1} = [e_1, e_2, e_3, e_4]$

$R_{\lambda_2} = [e_5, e_6, e_7, e_8]$

$\ldots\ldots\ldots$



Důkaz Jord věty pomocí dvou předchozích

$\varphi: U \to U \qquad U = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k}$

$(\varphi - \lambda_i \, id)|_{R_{\lambda_i}} : R_{\lambda_i} \to R_{\lambda_i}$ je nilpotentní

v předchozí větě položíme $\psi = \varphi - \lambda_i \cdot id$

Platí $\quad R_{\lambda_i} = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_{e_i}$

$\psi = \varphi - \lambda_i \, id$ je cyklické na V_i

Báze V_i je řetězec. Vzhledem k tomu, že nuly jsou jednotlivé, dostanu všechny řetězce dohromady bázi R_{λ_i}. Tak to uděláme pro každé i a ve výsledné bázi α dostaneme $(\varphi)_{\alpha\alpha} = J$.

$e_1^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1}$ tvoří, proto $b_1 = \dots = 0$. Po dosazení dostaneme $a_1 = \dots = 0$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & & 0 & & & & \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \\
e_1^{k-1} & \dots & e_{p_{k-1}}^{k-1} & 0 & & & 0 \\
\uparrow & & \uparrow & \uparrow & & & \uparrow \\
e_1^{k-2} & \dots & e_{p_{k-1}}^{k-2} & \tilde{e}_{p_{k-1}+1}^{k-2} & \dots & \dots & \tilde{e}_{p_{k-2}}^{k-2}
\end{array}
$$

Doplníme na bázi prostoru P_{k-2}

(vektory typu e_j^{k-2})

$$\psi(e_j^{k-2}) = \sum_i a_i e_i^{k-1}$$

Vektory e_j^{k-2} nahradíme vektory

$$\tilde{e}_j^{k-2} = e_j^{k-2} - \sum_i a_i e_i^{k-2}$$

$$\psi(\tilde{e}_j^{k-2}) = \psi(e_j^{k-2}) - \sum_i a_i \underbrace{\psi(e_i^{k-2})}_{= e_i^{k-1}} \overset{?}{=} 0$$

Vektory e_i^{k-1}, e_i^{k-2} a $\tilde{e}_j^{k-2}$ pořád tvoří bázi.

Jednoznačnosť Jordanovho rozkladu až na poradie buniek je daná dimenziami priestorov P_i

počet buniek veľkosti k $= \dim P_{k-1}$

počet buniek ~~dimenz~~ veľkosti $k-1$ $= \dim P_{k-2} - 2 \dim P_{k-1}$

počet buniek veľkosti $k-2$ $= \dim P_{k-3} - 2 \dim P_{k-2} - \dim P_{k-1}$

počet