Lin. formy $\quad f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

Kvadratické formy $\quad g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{j,i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

BILINEÁRNÍ FORMY

Definice: Nechť U je vektorový prostor nad tělesem K.
Zobrazení $f: U \times U \longrightarrow K$ se nazývá bilineární forma jestliže platí

$$f(u, av + bw) = a f(u, v) + b f(u, w)$$

$$f(au + bv, w) = a f(u, w) + b f(v, w)$$

jiný zápis:

$$f(x, y) = (2x_1 + 4x_2)y_1 - (3x_1 + 5x_2)y_2 =$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= (2x_1 + 4x_2, \ -3x_1 - 5x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x^T \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} y = x^T A y$$

$$f(x + \bar{x}, y) = (x + \bar{x})^T A y = x^T A y + \bar{x}^T A y = f(x, y) + f(\bar{x}, y)$$

Matice bilineární formy v dané bázi

Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ je báze prostoru U. Nechť $f : U \times U \to \mathbb{K}$ je bilineární forma. Maticí bilineární formy f v bázi α je matice A taková, že

$$A_{ij} = f(u_i, u_j)$$

Příklad: $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 2x_1y_1 + 4x_2y_1 - 3x_1y_2 - 5x_2y_2 = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = (e_1, e_2)$$

$\varphi : U \longrightarrow U \qquad \alpha = (u_1 \ldots u_n)$ báze

Matice lin. zobrazení φ v bázi α $\qquad (\varphi)_{\alpha,\alpha}$

$$(\varphi(u))_\alpha = (\varphi)_{\alpha,\alpha} (u)_\alpha$$

Změna matice bilineární formy při změně báze

Vekt. prostor U a v něm báze $\alpha = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ a $\beta = (v_1, v_2, \ldots v_n)$

$f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ je bilineární forma

V bázi α má matici A : $f(u,v) = (u)_\alpha^T A (v)_\alpha$

V bázi β má matici B : $f(u,v) = (u)_\beta^T B (v)_\beta$

Nechť $(id)_{\alpha\beta}$ je matice přechodu

(*) $(u)_\alpha = (id)_{\alpha\beta} (u)_\beta$, $(v)_\alpha = (id)_{\alpha\beta} (v)_\beta$

Závěr Dokázali jsme, že

A, B jsou kongruentní

$$\boxed{B = (id)_{\alpha\beta}^{T} \; A \; (id)_{\alpha\beta}}$$

$$\boxed{B = P^{T} A P}$$

Poznámka: $\varphi : U \to U$, $(\varphi)_{\alpha\alpha}$ $(\varphi)_{\beta\beta}$ α, β dvě báze

$$(\varphi)_{\beta\beta} = (id)_{\beta\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha\alpha} \cdot (id)_{\alpha\beta}$$

$$= (id)_{\alpha\beta}^{-1} (\varphi)_{\alpha\alpha} (id)_{\alpha\beta}$$

$$\boxed{B = P^{-1} A P}$$ A, B podobné matice

ALGORITMUS

Dokážeme následující: Nechť A je symetrická matice $n \times n$ nad polem K.

Potom existuje regulární matice P taková, že matice

$$B = P^T A P$$

je diagonální

Realizace EŘO a ESO

1) Výměna 1. a 2. řádku $\qquad A \longmapsto PA$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot \\ a & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \vdots & & \cdots & \end{pmatrix}$$

$A \mapsto AP^T$ k 1. sloupci přičteme a-násobek 2 sloupce

symetrická

$$A \rightsquigarrow P_k^T \cdots P_3^T P_2^T P_1^T A P_1 P_2 P_3 \cdots P_k$$

přidáme stejné sloupcové a řádkové operace

$$= (P_1 P_2 \cdots P_k)^T A (P_1 P_2 P_3 \cdots P_k)$$

$$= P^T A P$$

P_i jsou regulární matice (elementární matice) tedy také P je regulární

$$
A = \begin{array}{ccc|ccc}
0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & & & \\
0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}
\sim
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
2 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\
2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & & & \\
0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right)
\sim
\begin{array}{ccc|ccc}
4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0 \\
4 & 0 & 12 & 0 & 2 & 0 \\
20 & 24 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
\hline
1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 2 & 0 & & & \\
0 & 0 & 2 & & &
\end{array}
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 4 & -100 & -5 & -5 & 2 \\
\hline
1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 2 & 0 & & & \\
0 & 0 & 2 & & &
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -4 & 4 & -1 & 4 & 0 \\
0 & 4 & -100 & -5 & -5 & 2 \\
\hline
1 & -1 & -5 & & & \\
1 & 1 & -5 & & & \\
0 & 0 & 2 & & &
\end{array}\right)
\sim
$$

<u>Věta</u> Nechť $f: U \times U \to K$ je symetrická bilineární forma. Potom existuje báze B prostoru U taková, že matice f v bázi B je diagonální, tj.

$$f(u,v) = b_{11}x_1y_1 + b_{22}x_2y_2 + \dots + b_{nn}x_ny_n =$$

$$= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & b_{22} & \\ 0 & & \ddots \; b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

kde $B = \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & b_{22} & \\ 0 & & \ddots \; b_{nn} \end{pmatrix}$ je daná matice a

$$x = (u)_B, \quad y = (v)_B.$$

Matice f v bázi $\mathcal{B}$ tak bude

$$P^T A P = B$$

<u>Příklad</u>: $U = \mathbb{R}^3$ $\quad f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2 .$$

$\alpha = (e_1, e_2, e_3)$ je stand. báze, v této bázi je matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \exists P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P^TAP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix}$$