Dokažte, že existuje nějaká bilineární forma $f : U \times U \to K$ taková, že

$$g(u) = f(u, u).$$

Příklad: $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad g(\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{u}) = 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 12x_2x_3$

$$f(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 - 6x_2y_3 - 6x_3y_2$$

$$f(x, x) = 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 12x_2x_3 = g(x).$$

Platí: $$f(u,v) = \frac{1}{4}\Big(g(u+v) - g(u-v)\Big)$$

<u>Důkaz:</u> g je kvadr. forma, kde $g(u) = h(u,u)$ pro nějakou sym. bilin. formu h.

$$\frac{1}{4}\Big(g(u+v) - g(u-v)\Big) = \frac{1}{4}\Big(h(u+v,u+v) - h(u-v,u-v)\Big) = \frac{1}{4}\Big(h(\underline{u+v},u) + h(\underline{u+v},v)$$
$$- h(\underline{u-v},u) + h(\underline{u-v},v)\Big) = \frac{1}{4}\Big(\underline{h(u,u)} + h(v,u) + h(u,v) + \underline{h(v,v)} \underline{- h(u,u)} + h(v,u)$$
$$+ h(u,v) \underline{- h(v,v)}\Big) = \frac{1}{4}\Big(4h(u,v)\Big) = h(u,v)$$

Máme vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi symetr. bilin. formami a kvadr. formami

Tedy $g(u) = f(u,u) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2$

<u>Definice</u> Bázi B z předchozí věty nazýváme <u>polární bází</u>

K dané kvadratické formě existuje <u>mnoho polárních bází</u>.

<u>Příklad</u> $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 12x_2x_3$

Příslušná sym bil forma je $f(x,y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2$

Minule jsme získali matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \;\cdots\cdots\; B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 96 \end{pmatrix}$

Jiný postup pro diagonalizaci kvadr. formy

Nechť $g: U \longrightarrow \mathbb{K}$ je kvadr. forma, která má v bázi α vyjádření.

$$g(u) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots$$

$$\dots + a_{nn}x_n^2$$

(1) $a_{11} \neq 0$

$$g(u) = a_{11}\left(x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + 2\frac{a_{13}}{a_{11}}x_1x_3 + \dots + 2\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n \right)$$

$$+ h(x_2, x_3, \dots x_n)$$

$$(A_1 + A_2)^2 = A_1^2 + 2A_1A_2 + A_2^2$$

$$(A_1 + A_2 + A_3)^2 = (A_1 + A_2 + A_3)(A_1 + A_2 + A_3) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + 2A_1A_2 + 2A_1A_3 + 2A_2A_3$$

Nyní zavedeme nové souřadnice $$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n$$
$$y_2 = x_2,\ y_3 = x_3, \dots, y_n = x_n$$

V nových souřadnicích
$$g(u) = a_{11} y_1^2 + k(y_2, \dots y_n)$$

Lze-li podobně postupovat i s kvadr. formou k, dostaneme v nějakých souřadnicích $$g(u) = b_{11} z_1^2 + b_{22} z_2^2 + \dots + b_{nn} z_n^2$$

(2) $a_{11} = 0$, ale nějaké $a_{ii} \neq 0$. Místo x_1 vezmeme x_i a opakujeme předchozí postup.

$$= 4\left(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3\right)^2 - y_1^2 - 25y_3^2 - 2y_1y_3$$

$$= 4\left(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3\right) - \left(y_1^2 + 2y_1y_3\right) - 25y_3^2 = 4\left(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3\right)^2$$

$$- \left\{\left(y_1 + y_3\right)^2 - y_3^2\right\} - 25y_3^2 = 4\left(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3\right)^2$$

$$- \left(y_1 + y_3\right)^2 + y_3^2 - 25y_3^2 = 4\left(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3\right)^2 - \left(y_1 + y_3\right)^2 - 24y_3^2$$

$$z_1 = \left(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3\right) \qquad z_2 = \left(y_1 + y_3\right) \qquad z_3 = y_3$$

$$g(u) = 4z_1^2 - z_2^2 - 24z_3^2$$

V jaké bázi jsou souřadnice z_1, z_2, z_3?

V našem příkladě je báze $B = (v_1, v_2, v_3)$

$$(v_1, v_2, v_3) = (e_1, e_2, e_3)\, Q^{-1} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= (e_1\, e_2\, e_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Závěr.

<u>Důkaz:</u> Existuje nějaká báze $\alpha = (u_1 \cdot \cdot u_n)$ tak, že

$$g(u) = a_{11} x_1^2 + \dots + a_{nn} x_n^2$$

Jestliže $a_{11} > 0$ vezmeme nové souřadnice $y_1 = \sqrt{a_{11}}\, x_1$

Pak $a_{11} x_1^2 = y_1^2$

Jestliže $a_{ii} < 0$, vezmeme $y_i = \sqrt{-a_{ii}}\, x_i$

$$a_{ii} x_i^2 = -\left(\sqrt{-a_{ii}}\right)^2 x_i^2 = -y_i^2$$

Jestliže $a_{ii} = 0$, $y_i = x_i$

Spočítáme $\dim(V \cap W)$

$$\dim(V\cap W) = \dim V + \dim W - \underbrace{\dim(V+W)}_{\leq n} \geq p+n-s-n = p-s > 0$$

Tedy $\dim(V\cap W) \geq 1$, existuje $u \in V \cap W$, $u \neq \vec{o}$

$$0 < g(u) \leq 0$$

$u \in V$ $\quad$ $u \in W$ $\quad$ SPOR.

P^TAP a Q^TBQ jsou diagonální s $1, -1$ a 0 na diagonále

Protože mají stejnou signaturu, jsou si rovny

$$P^TAP = Q^TBQ \quad /$$

Q^{-1} zprava

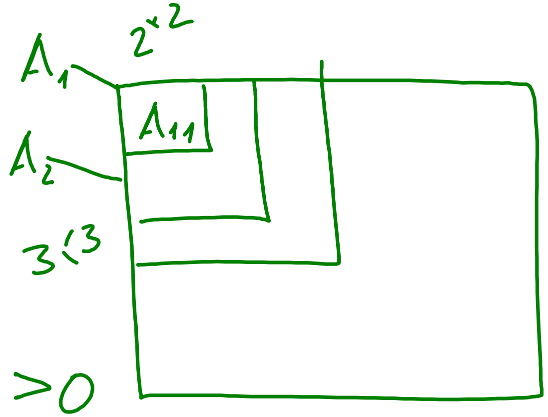
$Q^{T^{-1}}$ zleva

$$(PQ^{-1})^T APQ^{-1} = B$$

A, B jsou kongruentní

A matice kvadr. formy g

Hlavní minory matice A



jsou $\det A_1, \det A_2, \dots \det A_n.$

$$g(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 > 0$$

pro $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ pozitivně def.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$|A_1| = 2$

$|A_2| = 6$

$|A_3| = 24$