Téma SKALÁRNÍ SOUČIN

Definice skalárního součinu na reálném vekt. prostoru U

Skalární součin je zobrazení $\langle\ ,\ \rangle : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$

s vlastnostmi:

(1) $\langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v\rangle + b\langle u, w\rangle$

$\langle au + bw, v \rangle = a\langle u, v\rangle + b\langle w, v\rangle$

(2) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

(3) $\langle u, u\rangle \geq 0$, rovnost nastane pouze $u = \vec{o}$.

Pomocí předchozích pojmů lze definovat skalární součin

~~Def.~~ Takto definovaný výraz bilin. forma bude pozitivně definitní právě tehdy (podle Sylvestrova kriteria) budou hlavní minory matice A kladné

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \det(2) = 2, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0$$

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$$

$$\langle x, x \rangle > 0 \quad \text{pro } x \neq 0$$

<u>Definice</u> skalárního součinu na komplexním vekt. prostoru

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$. Zobrazení $\langle , \rangle : U \times U \to \mathbb{C}$ je skalární součin, jestliže platí

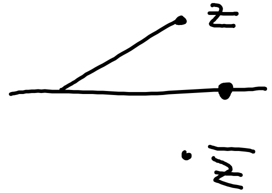
(1) $\langle au+bv, w\rangle = a\langle u,w\rangle + b\langle v,w\rangle$

$\langle u, av+bw\rangle = \bar{a}\langle u,v\rangle + \bar{b}\langle u,w\rangle$

(2) $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$

(3) $\langle u,u\rangle > 0$ pro $u \neq \vec{o}$

$\langle u,u\rangle = \overline{\langle u,u\rangle}$



Vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem se nazývá UNITÁRNÍ.

Velikost vektoru (U vekt prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skal součinem)

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Příklad $\mathbb{R}^n$ se stand skal součinem ($n = 2, 3$)

$$\|u\| = \sqrt{u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2 + \dots + u_n \cdot u_n} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2}$$

Platí $\|a \cdot u\| = |a| \cdot \|u\|$ důkaz z definice

Cauchyova-Schwarzova nerovnost

Pro všechna $u, v \in U$ platí

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Rovnost nastane právě když u a v jsou lineárně závislé.

Aplikace:

$\mathbb{R}^n$ $\quad \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n| \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$$

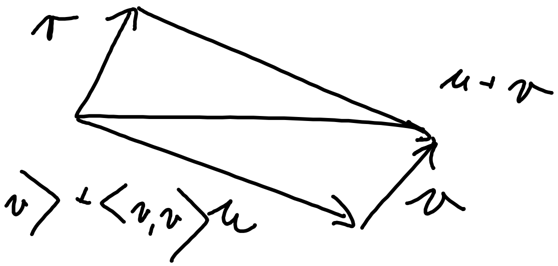
$C[a, b]$

$$\left| \int_a^b f(x) g(x)\, dx \right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\, dx}$$

Trojúhelníková nerovnost

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$$

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u,u \rangle + 2\langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle$$

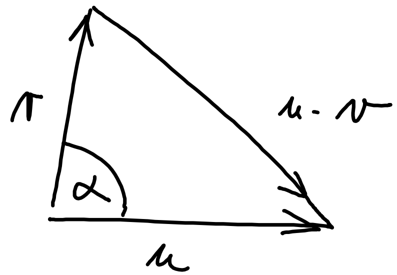


Řekneme, že vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou na sebe kolmé, jestliže

$$\langle u, v \rangle = 0. \qquad u \perp v$$

Zajímavé si můžeme z vlastností skalárního součinu a definice délky dokázat kosinovou větu.

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\,\|v\| \cos\alpha$$



nebo Pythagorovu větu

$$\langle u, v \rangle = 0$$

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Stejně tak dokážeme pro každé a_i s $1 \leq i \leq k$.

<u>Ortogonální báze</u> prostoru U je báze tvořená ortogonálními vektory.

<u>Ortonormální báze</u> je báze tvořená vektory velikosti 1, které jsou navzájem kolmé

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

<u>Příklad</u>: $\mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ je ortonormální báze

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Máme už v_1, v_2, hledáme v_3

$$v_3 = u_3 - a_1 v_1 - a_2 v_2 \quad \Big/ \langle -, v_1 \rangle$$

$$0 = \langle v_3, v_1 \rangle = \langle u_3, v_1 \rangle - a_1 \langle v_1, v_1 \rangle - a_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{= 0}$$

$$a_1 = \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}$$

<u>Výpočet a_2</u>: vynásobíme $\langle -, v_2 \rangle$

$$0 = \langle v_3, v_2 \rangle = \langle u_3, v_2 \rangle - a_1 \underbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}_{= 0} - a_2 \langle v_2, v_2 \rangle$$

$$a_2 = \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle}$$

Věta. Každý prostor se skalárním součinem má ortonormální bázi.

Dále platí

(a) souřadnice vektoru u v ortonormální bázi $\alpha = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ jsou

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} \langle u, u_1 \rangle \\ \langle u, u_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, u_n \rangle \end{pmatrix}$$

(b) V souřadnicích ortonormální báze se skalární součin dá psát takto

$$\langle u, v \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \ldots + x_n \overline{y_n}$$

kde $(u)_\alpha = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$, $(v) = (y_1, y_2, \ldots y_n)^T$

<u>Ortogonální doplněk:</u>

Nechť $\emptyset \neq M \subset U$ (podmnožina)

$$M^{\perp} = \{ u \in U, \ \forall v \in M, \ \langle u, v \rangle = 0 \}$$

ortogonální doplněk množiny M

<u>Lemma</u>: Ortogonální doplněk je vždy vektorový podprostor.

Dk: za domácí úlohu.

Dk: $u \in U$

$$u = \underbrace{P_V u}_{\in V} + \underbrace{u - P_V u}_{\overset{?}{\in} V^\perp}$$

$u - P_V u$ z definice P_V.

$$V \cap V^\perp = \{0\}$$

$$v \in V \cap V^\perp \Rightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0.$$

Zbývá dokázat, že kolmá projekce do podprostoru skutečně existuje.