jako pozitivně definitní sym bilineární formu

Příklady (1) $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ $\quad \langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2$

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

$\mathbb{R}^n$ $\quad \langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n = (x_1,x_2,\dots,x_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} = x^T E y$

Standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$

symetrická matice

(2) Jiné skalární součiny na $\mathbb{R}^n$

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j = (x_1 \dots x_n)\, A \begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} \longrightarrow \langle x,x\rangle > 0 \text{ pro } x\neq\vec{0}$$

$$a_{ij}=a_{ji}$$

3) $U = C[a,b]$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x)\, dx > 0 \quad \text{pokud } f \not\equiv 0.$$

4) $U = \mathbb{R}_n[x]$

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x)\, dx$$

Reálný vektorový prostor se skalárním součinem se nazývá <u>euklidovský</u>.

Příklady: (1) C^n

$$\langle x,y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots + x_n\overline{y_n} = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix}\overline{y_1}\\ \overline{y_2}\\ \vdots \\ \overline{y_n}\end{pmatrix} = X^T\overline{y} = X^T \cancel{E}\,\overline{y}$$

$$\langle x,x\rangle = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \dots + x_n\overline{x_n} = |x_1|^2 + \dots + |x_n| > 0$$

pro $x \neq \vec{0}$

(2) Spojité funkce s hodnotami v komplexních číslech

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\cdot\overline{g}(x)\,dx$$

2012

(3) $\mathbb{C}_n[x]$ $\quad \langle p,q\rangle = \int_{-8} p(x)\,\overline{q}(x)\,dx$

$$z\cdot\overline{z} = |z|^2$$

Důkaz v reálných vekt. prostorech , Předp. že $v \neq \vec{o}$.

$$0 \leq \|u - tv\|^2 = \langle u - tv, u - tv \rangle = \langle u, u \rangle - t\langle v, u \rangle - t\langle u, v \rangle + t^2 \langle v, v \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle - 2t\langle u, v \rangle + t^2 \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\neq 0} = f(t)$$

Diskriminant kvadr. funkce $f(t)$ je ≤ 0, tj. platí

$$4\langle u, v \rangle^2 - 4\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \leq 0$$

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$$

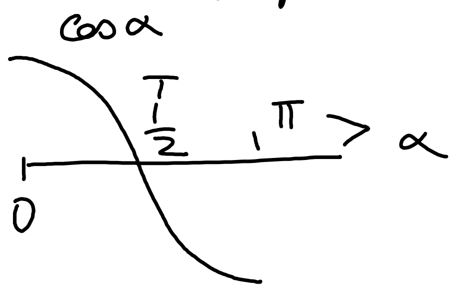
Kdy nastane rovnost?
Když existuje t tak, že $u - tv = \vec{o}$, tj. právě když $\underline{u}$ a $\underline{v}$ jsou LZ.

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle \le \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = \underline{(\|u\| + \|v\|)^2}$$

Tedy $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$

<u>Úhel dvou vektorů $\vec{u} \neq \vec{0}$ a $\vec{v} \neq \vec{0}$</u> je $\alpha \in [0, \cancel{2}\pi]$, jestliže platí

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$$



Z Cauchyovy nerovnosti tedy plyne, že

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} \le 1 \implies -1 \le \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \le 1$$

Ortogonální vektory

Vektory $u_1, u_2, \dots u_k \in U$ jsou ortogonální, jestliže $u_i \perp u_j$ pro $i \neq j$

Lemma Nechť $u_1, \dots, u_k$ jsou nenulové ortogonální vektory. Potom jsou lin. nezávislé.

Dk: Co chceme dokázat?

Jestliže $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{0}$, pak $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$.

Nechť $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{0} \quad \Big| \; \langle -, u_1 \rangle$

$$\langle a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k, u_1 \rangle = \langle \vec{0}, u_1 \rangle$$

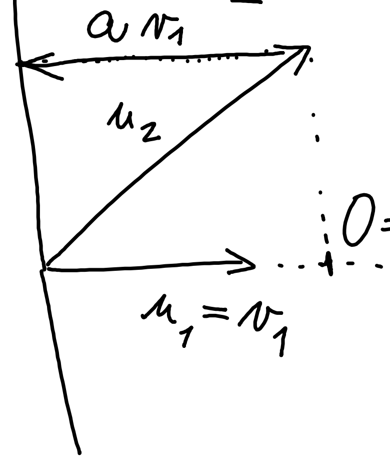
$$a_1 \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{\neq 0} + a_2 \underbrace{\langle u_2, u_1 \rangle}_{0} + \dots + a_k \underbrace{\langle u_k, u_1 \rangle}_{0} = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$$

Grammův - Schmidtův ortogonalizační proces

Nechť $(u_1, u_2, \dots u_k)$ je k-tice LN vektorů.

Daný proces vyrobí z této k-tice k-tici ortogonálních nenulových vektorů $(v_1, v_2, \dots v_k)$ takových, že platí

$$[v_1, v_2, \dots v_i] = [u_1, u_2, \dots u_i] \quad \text{pro } i = 1, 2, 3, \dots k$$



$$v_2 = u_2 - a v_1 \quad / \langle \cdot , v_1 \rangle$$

$$0 = \langle v_2, v_1 \rangle = \langle u_2, v_1 \rangle - a \langle v_1, v_1 \rangle$$

$$a \langle v_1, v_1 \rangle = \langle u_2, v_1 \rangle \qquad a = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}$$

Dk: $v_i = u_i - a_1 v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_{i-1} v_{i-1}$

$$a_j = \frac{\langle u_i, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}$$

Tímto procesem lze z každé báze $u_1, u_2, \dots u_n$ prostoru U dostat ortogonální bázi $v_1, v_2, \dots v_n$ a z této báze zase ortonormální bázi $w_1, w_2, \dots, w_n$

$$w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1, \dots, w_n = \frac{1}{\|v_n\|} v_n \qquad \|w_i\| = \frac{1}{\|v_i\|} \cdot \|v_i\| = 1$$

Řešení (a) $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$, tj. $(u)_\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

Vynásobíme napři u_2

$$\langle u, u_2 \rangle = x_1 \underbrace{\langle u_1, u_2 \rangle}_{=0} + x_2 \underbrace{\langle u_2, u_2 \rangle}_{=1} + x_3 \underbrace{\langle u_3, u_2 \rangle}_{=0} + \dots + x_n \underbrace{\langle u_n, u_2 \rangle}_{=0}$$

$$\langle u, u_2 \rangle = x_2$$

Stejně ostatní souřadnice:

(b) $\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_i x_i u_i , \sum_j y_j u_j \right\rangle =$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

$\langle u_i, u_j \rangle = 0$ pro $i \neq j$, $\langle u_i, u_j \rangle = 1$ pro $i = j$

Kolmá projekce do podprostoru:

Nechť U je vekt. prostor a V je ho podprostor.

Kolmá projekce do podprostoru V je lin. zobrazení

$$P_V : U \longrightarrow V$$

takové, že platí

$$u - P_V u \in V^\perp$$ tj. $u - Pu$ je kolmý na V.

Lemma Nechť V je podprostor v U. Potom

$$U = V \oplus V^\perp.$$