Euklidovská geometrie – pokračování

Odchylka afinních podprostorů

Nechť $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{U}$ jsou afinní podprostory. Potom jejich odchylka

$$\measuredangle(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \measuredangle(Z(\mathcal{M}), Z(\mathcal{N}))$$

$Z(\mathcal{M})$ a $Z(\mathcal{N})$ jsou vektorové podprostory v U. Budeme definovat odchylku vektorových podprostorů V a W

(1) $V = [v]$, $W = [w]$, $v \neq \vec{o}$, $w \neq \vec{o}$

$$\cos(\measuredangle([v],[w])) = \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\|\,\|w\|} \qquad \measuredangle([v],[w]) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Odchylka zprava je definována podle (2), neboť

$$\left(V\cap (V\cap W)^{\perp}\right)\cap\left(W\cap (V\cap W)^{\perp}\right) = (V\cap W)\cap (V\cap W)^{\perp} = \{\vec{o}\}.$$

(4) $\measuredangle\left(V, \{\vec{o}\}\right) = 0.$

Věta: Odchylka podprostoru $[v]$ od podprostoru W v prostoru U je

$$\cos\left(\measuredangle([v], W)\right) = \frac{\|P_W v\|}{\|v\|} \qquad \text{pro } v\neq\vec{o}.$$

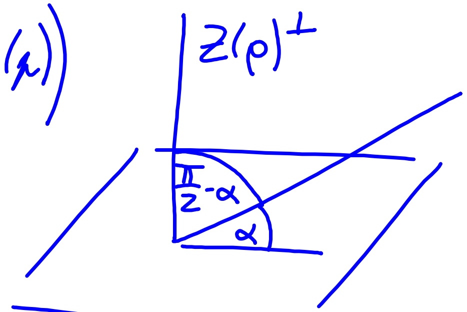
Dk: V 1. větě minulé přednášky bylo dokázáno:

$$\frac{\|P_W v\|}{\|v\|} = \max_{w\in W\setminus\{\vec{o}\}}\frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\|\,\|w\|} = \cos\measuredangle([v], W) \text{ podle (2).}$$

Příklad výpočtu

Známe z gymnázia: ρ rovina, p je přímka

$$\measuredangle\big(Z(\rho), Z(p)\big) = \frac{\pi}{2}\ \measuredangle\big(Z(\rho)^{\perp}, Z(p)\big)$$



Analogicky: m je 3-dim afinní podprostor v $\mathbb{R}^4$

n je 2-dim. afinní podrovina v $\mathbb{R}^4$.

$$\measuredangle\big(Z(m), Z(n)\big) = \frac{\pi}{2} - \measuredangle\big(\underbrace{Z(m)^{\perp}}_{\text{1-dim vekt. podprostor}}, Z(n)\big)$$

Matice A, B typu $n \times n$ nazveme <u>podobné</u>, jestliže existuje regulární matice P taková, že

$$B = P^{-1} A P.$$

V našem případě $(\varphi)_{\beta,\beta}$ a $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ jsou podobné

Podobnost je relace ekvivalence

$\varphi : U \to U$

<u>Definice</u>: Podprostor $V \subseteq U$ se nazývá invariantní vůči φ, jestliže

$$\varphi(V) \subseteq V.$$

<u>Příklad</u> $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = Ax$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}$

Věta: Nechť $V \subseteq U$ je invariantní podprostor lin operátoru $\varphi: U \to U$ nechť $v_1, v_2, .. v_k$ je báze podprostoru V a nechť $\alpha = (v_1, v_2, .. v_k, v_{k+1}, .. v_n)$ je rozšíření této báze na prostor U. Potom matice φ v bázi α má následující tvar

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{array}{c} A \\ \hline 0 \end{array}}_{k} \!\!\begin{array}{|c} B \\ \hline C \end{array}_{\!\!} \underbrace{}_{n-k} \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array}$$

Důkaz: $v_1 \ldots\ldots \varphi(v_1) \in V, \ \varphi(v_1) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k + 0 \cdot v_{k+1} + \ldots + 0 \cdot v_n$

$(\varphi(v_1))_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .. 1. sloupec matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$. Stejně pro 2., 3, až k-tý sloupec

Věta. Nechť V a W jsou invariantní podprostory lin. operátoru $\varphi : U \to U$ dimenzí k a $n-k$ takové, že $V \oplus W = U$. Nechť B vznikne z báze $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ prostoru V a z $(v_{k+1}, \ldots, v_n)$ prostoru W. Potom v bázi B je matice operátoru φ následující:

$$(\varphi)_{BB} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} \end{array}$$

Důkaz je stejný jako u předchozí věty.

Nalezení invariantních podprostorů nám umožňuje zjednodušit zápis daného lin. operátoru.

Definice: Vlastní vektor lin. operátoru $\varphi: U \to U$ je nenulový vektor $u \in U$ takový, že existuje $\lambda \in \mathbb{K}$ a platí

$$\varphi(u) = \lambda u.$$

Číslo λ se nazývá vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru u

Příklad: $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ je vlastní vektor operátoru φ s vlastním číslem $\lambda = 2$.

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) + \cdots = (-\lambda)^n + \lambda^{n-1} A_{n-1} + \lambda^{n-2} A_{n-2} + \cdots$$

$$\cdots + \det A$$

Toto je polynom stupně n, nazývá charakteristický polynom matice A.

<u>Věta:</u> λ je vlastní číslo matice A (lin. operátoru $\varphi(x)=Ax$) právě když λ je kořenem charakteristického polynomu $\det(A-\lambda E)$.

Vlastní vektor k $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2E)\,x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 = t,\ x_1 = t$$

vlastní vektory k $\lambda = 2$ jsou $x = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \neq 0.$

Vlastní vektor k $\lambda_2 = -1$

$$(A + E)\,x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_2 = 4t \\ x_1 = t \end{matrix}$$

vlastní vektory jsou $\begin{pmatrix} t \\ 4t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ t \neq 0.$

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \qquad (\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(u_1) = 2u_1 + 0 \cdot u_2$$
$$\varphi(u_2) = 0 \cdot u_1 - 1u_2$$

Platí, že $\det\big((\varphi)_{\alpha\alpha} - \lambda E\big) = \det\big((\varphi)_{\beta\beta} - \lambda E\big).$

je totiž $(\varphi)_{\beta\beta} = P^{-1}(\varphi)_{\alpha\alpha}P$

$$\det\big((\varphi)_{\beta\beta} - \lambda E\big) = \det\big(P^{-1}(\varphi)_{\alpha\alpha}P - \lambda E\big) = \det\big(P^{-1}((\varphi)_{\alpha\alpha} - \lambda E)P\big)$$

$$= \underbrace{\det P^{-1} \det\big((\varphi)_{\alpha\alpha} - \lambda E\big) \det P}_{\text{součin} = 1} = \det\big((\varphi)_{\alpha\alpha} - \lambda E\big)$$

Definice Nechť $\varphi : U \to U$ je lin. operátor. Jeho charakteristický polynom je $\det\big((\varphi)_{\alpha\alpha} - \lambda E\big)$ pro nějakou bázi α prostoru α.