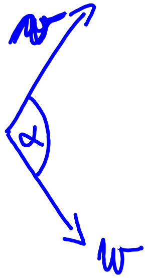
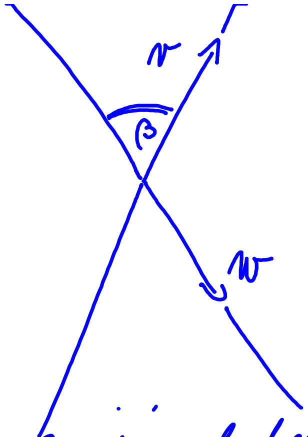
$\cos\alpha = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$





$\cos\beta = \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\|\,\|w\|}$

(2) $V, W \subseteq U$ mají vlastnost, že $\underline{V \cap W = \{\vec{o}\}}$

Podm. $\cancel{\cos \measuredangle(V, W) = \inf\left\{\frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\|\,\|w\|},\ v \in V \setminus \{\vec{o}\},\ w \in W \setminus \{\vec{o}\}\right\}}$

$$\measuredangle(V, W) = \inf_{u, v}\left(\measuredangle([v], [w]),\ v \in V \setminus \{\vec{o}\},\ w \in W \setminus \{\vec{o}\}\right)$$

(3) Pokud $V \cap W \neq \{\vec{o}\}$, pak definujeme

$$\measuredangle(V, W) = \measuredangle\left(V \cap (V \cap W)^{\perp},\ W \cap (V \cap W)^{\perp}\right)$$

Příklad Zjistěte odchylku vedl podprostorů v $\mathbb{R}^4$

$$V = [e_1+e_2,\ e_1+e_2+e_3]$$

$$W = [e_2+e_4,\ e_2+e_3+e_4]$$

$$V\cap W = [e_3]$$

$$(V\cap W)^{\perp} = [e_1, e_2, e_4]$$

$$V\cap (V\cap W)^{\perp} = [e_1+e_2]$$

$$W\cap (V\cap W)^{\perp} = [e_2+e_4]$$

$$\alpha = \sphericalangle(V, W) = \sphericalangle\big([e_1+e_2], [e_2+e_4]\big)$$

$$\cos\alpha = \frac{|\langle e_1+e_2, e_2+e_4\rangle|}{\|e_1+e_2\|\,\|e_2+e_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

<u>Definice</u>: Lineární zobrazení $\varphi : U \longrightarrow U$ se nazývá lineární operátor (lineární transformace, lin. homomorfismus).

Matice lin. operátoru v bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\alpha, (\varphi(u_2))_\alpha, \dots, (\varphi(u_n))_\alpha \right)$$

α, β dvě báze prostoru U

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = (id)_{\beta\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha\beta} = (id)^{-1}_{\alpha\beta} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha\beta}$$

$$V = \left[\, e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \right] \qquad \varphi(e_1) = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\\0\end{pmatrix} = e_1 + 2u_2 \in V$$

$$\varphi(u_2) = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = -2e_1 + u_2 \in V$$

$$\varphi(a e_1 + b u_2) = a\underbrace{\varphi(e_1)}_{\in V} + b\underbrace{\varphi(u_2)}_{\in V} \in V$$

$\varphi(V) \subseteq V$, V je invariantní podprostor

Vezmeme v $\mathbb{R}^4$ novou bázi $\alpha = (e_1, u_2, e_3, e_4)$. Najdeme $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \qquad ((\varphi)(e_1))_\alpha = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} \quad (\varphi(u_2))_\alpha = \begin{matrix}-2\\1\\0\\0\end{matrix}$$

nulová matice $\longrightarrow$

Pokračování v příkladu $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} x$

$$V = \left[e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$W = \left[e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \qquad \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot e_3 - u_4 \in W$$

$$\varphi(u_4) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = -e_3 + 4u_4 \in W \qquad \varphi(W) \subseteq W$$

Báze $B = (e_1, u_2, e_3, u_4)$

$$(\varphi)_{B,B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right)$$

Pro každý lin. operátor máme 2 tzv. triviální invariantní podprostory

$\varphi : U \to U$ $\{\vec{o}\}$ a U

Nyní se budeme zajímat o JEDNOROZMĚRNÉ INVARIANTNÍ PODPROSTORY.

Nechť $[u]$, kde $u \neq \vec{o}$ je invariantní podprostor

Potom $\varphi(u) \in [u]$, tedy $\varphi(u) = \lambda u$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{K}$

Navíc, je-li au nějaký násobek vektoru u, pak

$$\varphi(au) = a\varphi(u) = a\lambda u = \lambda(au)$$

Tedy φ na jednorozměrném invariantním podprostoru je násobení číslem λ.

Výpočet vlastních čísel a vektorů

Nejprve uvažujme lin. operátory $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$, $\varphi(x) = Ax$

$x \in \mathbb{K}^n$ je vlastní vektor a $\lambda \in \mathbb{K}$ je vlastní číslo, jestliže

$\varphi(x) = Ax = \lambda x$

$\iff$ $Ax - \lambda E x = 0$

$\iff$ $(A - \lambda E)x = 0$

x je vlastní vektor jestliže existuje λ

$\exists \lambda \in \mathbb{K}$ $(A - \lambda E)x = 0$ má netriviální řešení

$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}$ $\det(A - \lambda E) = 0$

$\iff \lambda \in \mathbb{K}$ je kořenem polynomu

$\det(A - \lambda E) = 0$.

Je-li λ vlastní číslo matice A, pak příslušný vlastní vektor najdeme řešením homogenní soustavy

$$(A-\lambda E)x=0$$

Příklad. $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad \varphi(x)=Ax,\quad A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda E)=\det\left(\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda & -1\\ 4 & -2-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=(3-\lambda)(-2-\lambda)+4=-6-3\lambda+2\lambda+\lambda^2+4=$$

$$=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda+1)\qquad \lambda_1=2,\quad \lambda_2=-1$$

Hledání vlastních čísel a vektorů pro obecné operátory $\varphi : U \to U$

Nechť u je vlastní vektor φ a λ jeho vlastní číslo. Nechť α je nějaká báze prostoru. Potom

$$\varphi(u) = \lambda u$$

lze psát v souřadnicích α takto

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}(u)_\alpha = (\varphi(u))_\alpha = (\lambda u)_\alpha = \lambda(u)_\alpha$$

Tedy $(u)_\alpha \in \mathbb{K}^n$ je vlastní vektor operátoru $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : x \mapsto (\varphi)_{\alpha\alpha} x$ s vlastním číslem λ.

Tedy nalézt vlastní čísla operátoru $\varphi : U \to U$ znamená najít vlastní čísla jeho matice v nějaké bázi α.