Vlastní čísla a vlastní vektory

Opakování: $\varphi : U \longrightarrow U$ lin. operátor

$V \subseteq U$ je invariantní podprostor $\varphi(V) \subseteq V$

Vlastní vektor je vektor $u \in U \setminus \{\vec{o}\}$, ke kterému existuje $\lambda \in \mathbb{K}$ tak, že $\varphi(u) = \lambda u$.

λ vlastní číslo příslušné vl. vektoru u.

Výpočet vl. čísel: jsou to kořeny charakteristického polynomu pro operátor φ.

Charakt. polynom je polynom v proměnné λ, který se značí

x_0 je <u>k-násobným kořenem polynomu $p(x)$</u>, právě když

$$p(x) = (x - x_0)^k \, q(x)$$

kde q je polynom takový, že $q(x_0) \neq 0$.

<u>Základní věta algebry</u> Každý polynom stupně $n \geq 1$ s koeficienty v $\mathbb{C}$ má aspoň jeden kořen v $\mathbb{C}$.

<u>Důsledek</u>: Každý polynom stupně $n \geq 1$ s koeficienty v $\mathbb{C}$ má v $\mathbb{C}$ právě n kořenů, jestliže každý počítáme tolikrát, kolikrát činí jeho násobnost.

Algebraická a geometrická násobnost vlastního čísla

Nechť $\varphi : U \longrightarrow U$ má vlastní číslo λ_0.

Toto vlastní číslo má algebraickou násobnost k, jestliže je k-násobným kořenem charakt. polynomu.

Geometrická násobnost vlastního čísla je rovna

$$\dim \left(\varphi - \lambda_0 id \right)$$

$\varphi, id : U \longrightarrow U$, tedy $\varphi - \lambda_0 id$ je lineární zobrazení $U \to U$

Protože λ_0 je vlastní číslo, existuje k němu vlastní vektor $u \neq \vec{0}$

tak, že $\varphi(u) = \lambda_0 u \Rightarrow \varphi(u) - \lambda_0 u = \vec{0} \Rightarrow (\varphi - \lambda_0 id) u = \vec{0}$

② $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Char polynom je $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)^2$, 2 má alg násobnost 2

$\ker(\varphi - 2\,id) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x = 2x \}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $x_2 = 0$, x_1 libovolné.

$\ker(\varphi - 2\,id) = [e_1]$ $\quad$ $\dim \ker(\varphi - 2\,id) = 1$

geom násobnost vl. čísla 2 je 1.

Dôkaz

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \lambda_0 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_0 \end{pmatrix} & C \\ \hline 0 & B \end{array} \quad \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} k & n-k \end{array}$$

$\varphi(u_i) = \lambda_0 u_i$ pre $1 \le i \le k$.

Spočítame char. polynom

$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) = \det \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 - \lambda & & & \\ & \lambda_0 - \lambda & & C \\ & & \ddots\ \lambda_0 - \lambda & \\ \hline & 0 & & B - \lambda_0 E \end{array} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_0 - \lambda \end{pmatrix} \det\left(B - \lambda_0 E\right) = (\lambda_0 - \lambda)^k \det(B - \lambda_0 E)$$

Odtiaľ plyne, že λ_0 je koreňom char. polynomu s násobnosťou aspoň k.

Důkaz: Nechť v nějaké bázi $\alpha = (u_1, u_2 \ldots u_n)$ je $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Podle definice matice zobrazení pak platí

$$\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1, \quad \varphi(u_2) = \lambda_2 u_2, \ldots \text{ atd}$$

$u_1, u_2 \ldots u_n$ jsou lin nezávislé, a po skupinách tvoří generátory

podprostorů $\ker(\varphi - \lambda_i \, id)$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k \neq \lambda_i$ pro $i \geq k+1$.

$\ker(\varphi - \lambda_1 id) = [u_1, u_2, \ldots u_k]$ dim $= k$

Součet těchto dimenzí je součet geom násobností a rovná se číslu $n = \dim U$

Obráceně Nechť součet ~~...~~ geom násobností je $n = \dim U$.

Důsledek: Jestliže $\varphi: U \to U$ je operátor takový, že existuje báze α tvořená vlastními vektory, pak

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ jsou příslušná vlastní čísla.

Tvrzení: Jsou-li $u_1, u_2, \ldots u_k$ vlastní vektory pro různá vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, pak jsou lin. nezávislé.

Dk indukcí podle k: $k = 1$, $u_1 \neq \vec{o}$ je lin. nezávislý

$$a_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})u_1+\dots+a_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})u_k=\vec{O}$$

Podle ind. předpokladu jsou $u_1, u_2, \dots, u_k$ lin. nezávislé, proto

$$a_1(\underbrace{\lambda_1-\lambda_{k+1}}_{\neq 0})=0 \quad \dots \quad a_k(\underbrace{\lambda_k-\lambda_{k+1}}_{\neq 0})=0$$

$\Rightarrow \quad a_1=a_2=\dots=a_k=0$. Dosadíme do původní rovnice (*)

$$0u_1+\dots+0u_k+a_{k+1}\underbrace{u_{k+1}}_{\neq\vec{O}}=\vec{O} \Rightarrow a_{k+1}=0$$

Tedy $u_1, u_2, \dots, u_{k+1}$ jsou lin. nezávislé.

Báze $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\varphi(u_1) = u_1$

$\varphi(u_2) = 2u_2 = 0u_1 + 2u_2 + 0u_3$

$\varphi(u_3) = 3u_3 = 0u_1 + 0 \cdot u_2 + 3u_3$

Příklad: $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ $\quad \varphi(p) = p'$.

$\alpha = (1, x, x^2)$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\varphi(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$\varphi(x) = x' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$\varphi(x^2) = (x^2)' = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$

ORTOGONÁLNÍ A UNITÁRNÍ OPERÁTORY

Nechť U je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skalárním součinem. Řekneme, že operátor $\varphi : U \to U$ je ortogonální (je-li U nad $\mathbb{R}$) resp. unitární (je-li U nad $\mathbb{C}$), jestliže

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in U \quad : \quad \langle \varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

Této vlastnosti říkáme, že φ zachovává skalární součin.

<u>Vlastnosti:</u> Je-li $\varphi : U \to U$ ortogonální nebo unitární, pak

(1) $\forall u \in U \quad \|\varphi(u)\| = \|u\|$

(2) φ je lin. izomorfismus

Příklady ortogonálních zobrazení

(1) otočení v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku je ortogonální zobrazení, neboť zachovává úhly a vzdálenosti a je lineární

(2) symetrie podle přímky v $\mathbb{R}^2$, přímka prochází počátkem

(3) rotace kolem osy procházející počátkem v $\mathbb{R}^3$

(4) symetrie podle roviny procházející počátkem v $\mathbb{R}^3$

(5) symetrie podle přímky procházející počátkem v $\mathbb{R}^3$