Definice: Čtvercová matice A se nazývá

- unitární, jestliže $A_{ij} \in \mathbb{C}$ a platí $A^{-1} = \overline{A}^{T}$
- ortogonální, jestliže $A_{ij} \in \mathbb{R}$ a platí $A^{-1} = A^{T}$.

Důkaz věty: Jestliže α je ortonormální báze, pak platí

$$\langle u, v \rangle = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(v)_\alpha} = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n} \qquad (u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$(v)_\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

φ je unitární právě když platí

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

$$(\varphi(u))_\alpha^T \cdot \overline{(\varphi(v))_\alpha} = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(v)_\alpha}$$

$$(A(u)_\alpha)^T \cdot \overline{A(v)_\alpha} = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(v)_\alpha}$$

Ortogonální matice 3×3

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Matice A je ortogonální, jestliže její sloupce (řádky) tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^n$.

Matice A je unitární, jestliže její sloupce (řádky) tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{C}^n$.

Věta o vlastních číslech a vektorech unitárního operátoru

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$ a $\varphi: U \to U$ unitární operátor

(1) Všechna vlastní čísla unitárního operátoru mají absolutní hodnotu rovnu 1.

(2) Jsou-li u_1 a u_2 vlastní vektory k různým vlastním číslům λ_1 a λ_2, pak jsou navzájem kolmé.

(3) V U existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory.

V této bázi

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde λ_i jsou vlastní čísla.

$$\boxed{\lambda_j = \cos\alpha_j + i\sin\alpha_j}$$

(3) Indukcí podle dimenze prostoru U. Pro $n=1$ věta platí. Nechť platí pro dimenze $\leq n-1$. Nechť $\dim U = n$.
$\varphi : U \to U$ má alespoň jedno vlastní číslo $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, neboť char. polynom má nad $\mathbb{C}$ aspoň jeden kořen. Nechť u_1 je příslušný vlastní vektor o velikosti 1

$$\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1 \quad a \quad \|u_1\| = 1.$$

Uvažujme podprostor $V = \{u_1\}^\perp = \{ v \in U,\ \langle v, u_1 \rangle = 0 \}$
Dimenze V je $(n-1)$. Ukážeme, že V je invariantní podprostor pro φ.

$v \in V$ $\quad \langle \varphi(v), u_1 \rangle = \langle \varphi(v), \lambda_1 u_1 \rangle = \lambda_1 \langle \varphi(v), \varphi(u_1) \rangle = \lambda_1 \langle v, u_1 \rangle = 0$

$$\lambda_1 \bar{\lambda}_1 = 1 \qquad \text{proto } \varphi(v) \in V.$$

INVARIANTNÍ PODPROSTORY ORTOGONÁLNÍCH OPERÁTORŮ

- pro jednoduchost předpokládejme, že $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- A je reálná matice $n \times n$, určuje lin. operátor $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\varphi(x) = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

ale současně určuje i lin. operátor $\tilde{\varphi} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$$\varphi(z) = Az \qquad z \in \mathbb{C}^n$$

- má-li reálná matice $n \times n$ vlastní číslo $\lambda = a + i \cdot b \in \mathbb{C}$

s vlastním vektorem $u = u_1 + i u_2$, $u_1 \in \mathbb{R}^n$, $u_2 \in \mathbb{R}^n$

$u \in \mathbb{C}^n$

Věta: Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$ je ortogonální zobrazení, tj. A je ortogonální matice. Nechť λ je vlastní číslo matice, které leží v $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Nechť $u = u_1 + i u_2 \in \mathbb{C}^n$ je příslušný vlastní vektor.

Potom platí

(i) $\|u_1\| = \|u_2\|$, $u_1 \perp u_2$

(ii) dvourozměrný podprostor $V = [u_1, u_2]$ je invariantní vůči φ a φ je na V otočením o úhel α od vektoru u_2 k vektoru u_1, kde α je určena tím, že

$$\lambda = \cos\alpha + i \sin\alpha .$$

Tedy $\|u_1\| = \|u_2\|$ a $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$. Tím jsme dokázali (1).

Platí
$$\varphi(u_1 + i u_2) = A(u_1 + i u_2) = (a+ib)(u_1 + i u_2)$$
$$\underline{A u_1} + i\, A u_2 = \underline{a u_1 - b u_2} + i(b u_1 + a u_2)$$

Porovnáním reálné a imaginární složky
$$A u_1 = a u_1 - b u_2 = -b u_2 + a u_1$$
$$A u_2 = b u_1 + a u_2 = a u_2 + b u_1$$

Tedy podprostor $V = [u_1, u_2]$ je invariantní vůči c v bázi $\alpha = (u_2, u_1)$ má $\varphi|V$ matici
$$(\varphi|V)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Věta o inv. podprostorech ortogonálního zobrazení

Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je ortogonální zobrazení. Potom se $\mathbb{R}^n$ rozpadá na direktní součet navzájem kolmých podprostorů dimenze 1 a 2. V podprostorech dimenze 1 je φ násobením číslem 1 nebo -1, v podprostorech dimenze 2 je φ otočením o úhel α.

Dk: $\tilde{\varphi} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ je unitární operátor. ~~Ten má bázi tvořenou~~ $\mathbb{C}^n$ má bázi tvořenou vlastními vektory $\tilde{\varphi}$. Vlastní vektory příslušné reálným vl. číslům 1 nebo -1 leží v $\mathbb{R}^n$. To jsou podprostory dim 1 $(Ax - x = 0)$ v $\mathbb{R}^n$. Kompl. vl. číslům $\lambda = \cos\alpha + i \sin\alpha$, $\sin\alpha \neq 0$, Příklad $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

je ortogonální matice

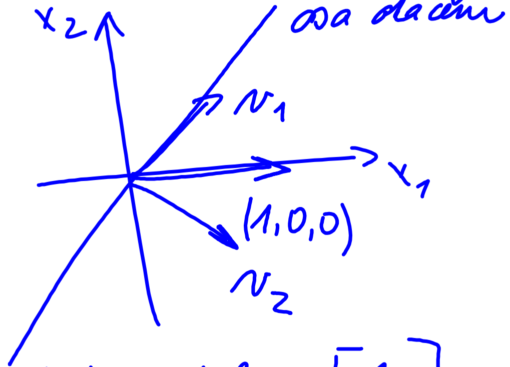
char polynom $= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1)$

Vlastní čísla $\lambda_1 = 1$ vlastní vektor $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

$$\lambda_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad u = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}}_{v_2} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\lambda_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \qquad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} \qquad u_3 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

Příklad: $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je otočení kolem osy $x_1 = x_2,\ x_3 = 0$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ tak, že $\varphi(1,0,0)$ je vektor, jehož všechny složky jsou kladné. Napište matici φ ve stand. bázi



φ je otočení kolem $[v_1]$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ od v_2 k v_3

Napišme si matici φ nejprve v nějaké vhodné ortonormální bázi.

$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$ osa otočení

$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$v_3 = (0, 0, 1)$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$