Kritérium kongruence ~~...~~ sym. matic

B, A jsou kongruentní, jestliže existuje reg. matice P tak že

$$B = P^T A P$$

(modelována maticemi bilin. forem)

Relace kongruence je ekvivalence

Kritérium kongruence sym. matic

Dvě sym. reálné matice A a B jsou kongruentní, právě když příslušné kvadr. formy ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) mají stejnou signaturu.

Důkaz: A a B jsou kongruentní. Pak jsou maticemi téže kvadr. formy v různých bazích. Proto musí mít stejnou signaturu.

Typy kvadr. forem (aplikace v analýze v diferenciálním počtu více proměnných)

$g : U \to \mathbb{R}$

kanonicky: signatura je

! - pozitivně definitní, jestliže $g(u) > 0 \ \forall u \neq \vec{o}$ — $s_+ = n,\ s_- = 0,\ s_0 = 0$

! - negativně definitní, jestliže $g(u) < 0 \ \forall u \neq \vec{o}$ — $s_+ = 0,\ s_- = n,\ s_0 = 0$

- pozitivně semidefinitní, jestliže $\forall u \in U \ \ g(u) \geq 0$ — $s_- = 0$

- negativně semidefinitní, jestliže $\forall u \in U \ \ g(u) \leq 0$ — $s_+ = 0$

! - indefinitní: existuje $u \in U : g(u) > 0$, existuje $v \in U : g(v) < 0$ — $s_+ > 0,\ s_- > 0$

$$u) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - \dots - x_n^2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & 0 & \\ & & -1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$\det A_1 = -1 < 0 \quad \det A_2 = (-1)^2 > 0$

$\det A_3 = (-1)^3 < 0 \quad \det A_4 = (-1)^4 > 0$

Kvadr. forma je negativno definitna, je tedaj, ko za minorje te matrike velja

$$(-1)^i \det A_i > 0 \qquad \det A_{2j+1} < 0$$

$$\det A_{2j} > 0.$$

DN: $g(x) = 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 12x_2x_3$

Po roznásobení $\quad \underline{x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2} = \underline{x_1^2}+\underline{y_1^2}-2x_1y_1+\underline{x_2^2}+\underline{y_2^2}-2x_2y_2$

$$2\underbrace{(x_1y_1+x_2y_2)} = 0$$

$f(x,y) = x_1y_1+x_2y_2$ je bilin. sym. forma

$f(x,x) = x_1^2+x_2^2$ je pozitivně definitní

Obecná definice: Nechť U je reálný vektorový prostor. Skalární součin $\langle\ ,\ \rangle : U\times U \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u,v)\longmapsto\langle u,v\rangle$

je funkce s následujícími vlastnostmi

(1) je lineární: $\langle au+bv, z\rangle = a\langle u,z\rangle + b\langle v,z\rangle$

$$\langle u, av+bz\rangle = a\langle u,v\rangle + b\langle u,z\rangle$$

③ $V = C[a,b]$ spojité funkce na $[a,b]$

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \qquad C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle cf + dh, g\rangle = \int_a^b \big(c f(x) + d h(x)\big)\cdot g(x)\,dx =$$

$$= c\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + d\int_a^b h(x)\,g(x)\,dx$$

$$= c\langle f, g\rangle + d\langle h, g\rangle$$

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0$$

pro f spojitou $f \equiv 0$?

$a = a_1 + i a_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$\bar{a} = a_1 - i a_2$

Příklady: ① $\mathbb{C}^n$ a stand. skal. součin $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad x_i, y_i \in \mathbb{C}$

$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n = x^T \cdot \bar{y}$ → maticový součin

Určitě je lineární v 1. složce

$\langle x, by \rangle = x_1 \cdot \overline{b y_1} + x_2 \overline{b y_2} + \dots = x_1 \bar{b} \bar{y}_1 + x_2 \bar{b} \bar{y}_2 + \dots$

$= \bar{b} (x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n) = \bar{b} \langle x, y \rangle$

$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + \dots$

$\langle y, x \rangle = y_1 \bar{x}_1 + y_2 \bar{x}_2 \quad = \overline{\bar{y}_1 \bar{\bar{x}}_1} + \dots = \overline{x_1 \bar{y}_1 + \dots} = \overline{\langle x, y \rangle}$

$\langle x, x \rangle = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots$ ... pro $x \neq 0$.

Velikost vektoru $u \in U$ je (norma)

Pracujeme nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} \geq 0$$

Vlastnosti

$$\|a u\| = |a| \cdot \|u\| \qquad u \in U,\ a \in K$$

$$\|\vec{0}\| = 0$$

$\|\vec{u}\| = 0$ právě když $u = \vec{0}$

Cauchyova - Schwarzova nerovnost

Pro $u, v \in U$ platí

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Rovnost nastane právě když [illegible]

Důkaz pro reálné vekt. prost.

Pokud $u = v = \vec{o}$ nastane rovnost. Proto můžeme předpokládat, že $\vec{v} \neq \vec{o}$ a spočítat velikost vektoru $u - tv$, kde $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|u - tv\|^2 = \langle u - tv, u - tv \rangle = \langle u, u \rangle - t\langle u, v \rangle - t\langle v, u \rangle + t^2 \langle v, v \rangle$$

$$= t^2 \overset{\neq 0}{\|v\|^2} - 2t\langle u, v \rangle + \|u\|^2$$

Toto je kvadratický polynom ≥ 0, proto jeho diskriminant je ≤ 0

$$0 \geq D = \left(2\langle u, v \rangle\right)^2 - 4\|v\|^2\|u\|^2 = 4\left(\langle u, v \rangle^2 - \|v\|^2\|u\|^2\right)$$

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2 \implies |\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Kdy nastane rovnost? Jedině když existuje t tak, že $\|u - tv\| = 0$
$\iff u - tv = \vec{o} \iff u = tv$

Úhel dvou vektorů (ve vekt. prostoru nad $\mathbb{R}$)

$u, v \in U$, řekneme, že svírají úhel $\alpha \in [0, \pi]$, jestliže

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \, \|v\|}$$

Toto umožňuje C.-S. nerovnost, neboť z ní plyne, že

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1$$

Kolmost dvou vektorů (nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$)

Vektory u a v jsou kolmé (ortogonální), jestliže

$\langle u, v \rangle = 0$ $\qquad$ $u \perp v$.

$$a_1 \langle v_1, v_1 \rangle = 0$$

a protože $\langle v_1, v_1 \rangle = \|v_1\|^2 \neq 0$, musí být $a_1 = 0$

Analogicky dokážeme, že $a_2 = a_3 = \dots = a_k = 0$ Tedy $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou LN