Dodatek k lineárním formám

I) Příklady k procvičení

1. Pro bázi $\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ prostoru $Mat_{2,2}(\mathbb{R})$ určete duální bázi.

2. Pro bázi $\left(x^2 + x + 1, x + 1, 1\right)$ prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ určete duální bázi.

3. Buď dány tři lineární formy f_1, f_2, f_3 vektorového prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ následujícími předpisy:

$$f_1(p) = p(1), \quad f_2(p) = p'(1), \quad f_3(p) = p''(1) \ .$$

Určete bázi prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ ke které je duální báze rovna (f_1, f_2, f_3).

4. Buď dány čtyři lineární formy g_1, g_2, g_3, g_4 vektorového prostoru $Mat_{2,2}(\mathbb{R})$ následujícími předpisy:

$$g_1(A) = (1,0)A(1,0)^T, \quad g_2(A) = (1,0)A(1,1)^T, \quad g_3(A) = (1,1)A(1,0)^T, \quad g_4(A) = (1,1)A(1,1)^T \ .$$

Určete bázi prostoru $Mat_{2,2}(\mathbb{R})$ ke které je duální báze rovna (g_1, g_2, g_3, g_4).

II) Duální zobrzení

5. Popište duální zobrazení k lineárnímu zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ danému vztahem $\varphi(p) = p'$.
Řešení: Označme $U = \mathbb{R}_2[x]$, $V = \mathbb{R}_1[x]$ a uvažujme v nich obvyklé báze $\alpha = (x^2, x, 1)$ resp. $\beta = (x, 1)$.

Protože $\varphi(p) = p'$ máme $\varphi(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$. Tedy matice lineárního zobrazení φ v uvažovaných bazích je

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \ .$$

Skutečně, pro $p = ax^2 + bx + c$ máme

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (p)_\alpha = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a\\ b\end{pmatrix} = (\varphi(p))_\beta \ .$$

Pokud spočítáme duální bázi k α vidíme, že $\alpha^* = (f_1, f_2, f_3)$, kde lineární formy f_1, f_2, f_3 vektorového prostoru $U = \mathbb{R}_2[x]$, (tzn.$f_1, f_2, f_3 \in U^*$) jsou dány následujícími předpisy:

$$f_1(ax^2 + bx + c) = a, \quad f_2(ax^2 + bx + c) = b, \quad f_3(ax^2 + bx + c) = c \ .$$

Podobně duální báze k β je $\beta^* = (g_1, g_2)$, kde lineární formy g_1, g_2 vektorového prostoru $V = \mathbb{R}_1[x]$ jsou dány následujícími předpisy:

$$g_1(ax + b) = a, \quad g_2(ax + b) = b \ .$$

Duální zobrazení $\varphi^* : V^* \to U^*$ (zde pozor na pořadí) je dáno definičním vztahem $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$, kde $\circ$ je skládání (lineárních) zobrazení. Chceme-li zjistit matici tohoto zobrazení v příslušných bazích, tj. β^* a α^* musíme spočítat nejdříve obrazy bazických vektorů, tzn. $\varphi^*(g_1)$ a $\varphi^*(g_2)$. Uvědomme si, že $\varphi^*(g_1), \varphi^*(g_2) \in U^*$ jsou lineární formy vektorového prostoru U a potřebujeme tedy vidět jak se aplikují na vektory z $U = \mathbb{R}_2[x]$. Tudíž

$$\varphi^*(g_1)(ax^2 + bx + c) = (g_1 \circ \varphi)(ax^2 + bx + c) = g_1(\varphi(ax^2 + bx + c)) = g_1(2ax + b) = 2a \ .$$

Tzn. $\varphi^*(g_1) = f$ je linární forma daná předpisem $f(ax^2 + bx + c) = 2a$ a potřebujeme ji vyjádřit jako lineární kombinaci bazických lineárních forem f_1, f_2, f_3. Snadno se vidí, že $f = 2f_1 = 2f_1 + 0f_2 + 0f_3$ a tedy $(f)_{\alpha^*} = (2, 0, 0)^T$. Určili jsme tedy souřadnice obrazu prvního bazického vektoru g_1 (z báze β^* prostoru V^*) v zobrazení φ^* v příslušné bázi (tj. bázi α^* prostoru U^*).

Podobně určíme $(\varphi^*(g_2))_{\alpha^*}$ takto:

$$\varphi^*(g_2)(ax^2 + bx + c) = (g_2 \circ \varphi)(ax^2 + bx + c) = g_2(\varphi(ax^2 + bx + c)) = g_2(2ax + b) = b\ .$$

Tudíž $\varphi^*(g_2) = f_2$ a máme $(\varphi^*(g_2))_{\alpha^*} = (0, 1, 0)^T$. Pokud tedy získané sou5adnice dáme do sloupců, dostaneme matici duálního zobrazení φ^* v příslušných bázích:

$$(\varphi^*)_{\alpha^*,\beta^*} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Na závěr si všimněme, že

$$(\varphi^*)_{\alpha^*,\beta^*} = (\varphi)^T_{\beta,\alpha}\ .$$

To samozřejmě platí obecně a cílem tohoto příkladu bylo pouze demonstrovat tento vztah.