1. domácí úloha ze semináře z matematiky II, březen 2012

1. Mějme prosté lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ a vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$. Dokažte: Jsou-li vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$ lineárně nezávislé v prostoru U, jsou lineárně nezávislé také vektory $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\ldots$,$\varphi(u_k)$ v prostoru V.

2. Nechť U a V jsou vektorové podprostory v prostoru W. Dokažte, že jejich součet $U+V$ je direktní, právě když platí

$$(\forall w \in U+V)(\exists! u \in U)(\exists! v \in V)(w = u + v).$$

3. Nechť U a V jsou vektorové podprostory v prostoru W. Nechť $w_1, w_2, \ldots, w_k$ je báze podprostoru $U \cap V$, nechť $w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_n$ je báze podprostoru U a konečně nechť $w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_m$ je báze podprostoru V. Dokažte, že $w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_m$ je báze podrostoru $U + V$.

4. Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení a $W \subset V$ vektorový podprostor. Dokažte, že $\varphi^{-1}(W) = \{u \in U; \varphi(u) \in W\}$ je vektorový podprostor v U.

5. Dokažte z definice limity, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x) = x$ pro x racionální a $f(x) = 0$ pro x iracionální
a) má limitu v bodě 0,
b) nemá limitu v bodě $a \neq 0$.

6. Pomocí "axiomu o infimu" dokažte: Každá klesající posloupnost kladných reálných čísel má limitu.

7. Dokažte z definice limity:
a) Jestliže

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad , \quad \lim_{x \to a} g(x) = K \in \mathbb{R},$$

pak

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = KL.$$

b) Jestliže

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \to a} g(x) = K > 0,$$

pak

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \infty.$$

8. Dokažte z definice spojitosti. Je-li funkce f spojitá v bodě a a $f(a) \neq 0$, pak je v bodě a spojitá i funkce $\frac{1}{f}$.