2. domácí úloha ze semináře z matematiky II, březen 2012

1. Nechť U a V jsou vektorové podprostory v prostoru W. Dokažte, že jejich součet $U+V$ je rovněž vektorový podprostor.

2. Nechť
$$[u_1, u_2, \ldots, u_k] = [u_2, u_3, \ldots, u_k].$$
Potom jsou vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$ lineárně závislé. Dokažte.

3. Nechť $f : U \to \mathbb{R}$ je lineární forma. Dokažte:
a) $\dim \ker f \geq n-1$.
b) $\dim \ker f = n$ právě když $f = 0$.

4*. (Pro pokročilé.) Mějme vektorový prostor U nad $\mathbb{R}$ dimenze n a dvě lineární formy $f, g : U \to \mathbb{R}$. Dokažte:
a) $\dim(\ker f \cap \ker g) \geq n-2$.
b) $\dim(\ker f \cap \ker g) = n-2$ právě když jsou f a g lineárně nezávislé.
c) Zformulujte a dokažte analogická tvrzení pro k lineárních forem $f_1, f_2, \ldots, f_k$, kde $1 \leq k \leq n$.

5. Dokažte z definice spojitosti: Je-li funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a $f(a) < 0$, pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a-\delta, a+\delta)$ je $f(x) < 0$.

6. Dokažte z definice limity, že funkce definovaná předpisem $f(x) = x^2$ pro $x \neq 2$ a $f(2) = 8$ nemá v bodě $a = 2$ limitu rovnu 6.

7. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, $f(a) > 0$ a $f(b) < 0$. Definujme m jako infimum množiny
$$\{x \in [a,b], f(x) < 0\}.$$
Dokažte, že $f(m) = 0$.