3. domácí úloha ze semináře z matematiky II, květen 2012

1. Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární operátor. Nechť $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou vlastní vektory k různým vlastním číslům. Dokažte, že jsou lineárně nezávislé. (Návod: Postupujte indukcí podle k. Viz přednáška z lineární algebry II.)

2. Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární operátor s vlastností

$$\varphi(\varphi(u)) = \varphi(u)$$

pro všechna $u \in U$. Dokažte, že potom

$$U = \ker \varphi \oplus \operatorname{im} \varphi.$$

(Návod: Prvně musíte dokázat, že každý vektor $u \in U$ je součtem vektoru z $\operatorname{im} \varphi$ a vektoru z $\ker \varphi$. Dále musíte dokázat, že každý prvek z průniku $\operatorname{im} \varphi \cap \ker \varphi$ je nulový.)

3. Nechť U, V jsou podprostory vektorového prostoru W konečné dimenze se skalárním součinem. Nechť $U^\perp$ značí ortogonální doplněk.
(a) Dokažte, že $U^\perp$ je vektorový podprostor.
(b) Dokažte, že $U \subseteq V$ implikuje $V^\perp \subseteq U^\perp$.
(c) Dokažte, že $U \subseteq (U^\perp)^\perp$.
(d) Vyjádřete $\dim U^\perp$ pomocí $\dim W$ a $\dim U$.
(e) Pomocí (c) a (d) dokažte, že $U = (U^\perp)^\perp$.
(f) Dokažte, že $U^\perp + V^\perp \subseteq (U \cap V)^\perp$.
(g^*) Pomocí (d), (a), (e) dokažte, že $(U \cap V)^\perp \subseteq U^\perp + V^\perp$.

4. Nechť W je vektorový prostor konečné dimenze a W^* jeho duální prostor. Pro vektorové podprostory $U \subseteq W$ a $F \subseteq W^*$ definujme

$$U^0 = \{f \in W^*; f(u) = 0 \text{ for all } u \in U\},$$
$$F^0 = \{u \in V; f(u) = 0 \text{ for all } f \in F\}.$$

Udělejte úkoly (a) – (g) z předchozího příkladu, kde symboly $^\perp$ nahradíte symboly ^{0}.

5. Dokažte z definice spojitosti: Jsou-li funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak jsou v tomto bodě spojité i funkce $f + g$, $f - g$ a $f \cdot g$.

6. Dokažte z definice limity, že funkce definovaná předpisem $f(x) = x^3$ pro $x \neq 5$ a $f(5) = 100$ nemá v bodě $a = 5$ limitu rovnu 6.

7. Napište definici derivace funkce $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ v bodě $x_0 \in (a, b)$.
Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce taková, že $f(a) = f(b) < f(c)$ pro nějaké $c \in (a, b)$. Jestliže má f derivaci v každém vnitřním bodě intervalu (a, b), pak existuje bod $x_0 \in (a, b)$ takový, že $f'(x_0) = 0$. Dokažte. (Návod: Vezměte za x_0 bod, kde f nabývá svého maxima. Již víme, že takový bod existuje. Dokažte, že v tomto bodě nemůže být derivace kladná ani záporná.)

8. Z definice limity dokažte, že

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{|x - 1|}$$

neexistuje.