**Jméno:**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Celkem |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

**1. test ze semináře z matematiky II, březen 2012**

*Max. počet bodů 24*

**1a.** Napište definici lineární nezávislosti vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ve vektorovém prostoru $V$. (*1 bod – -2 body*)

**1b.** Bez pomoci jiné definice napište, co znamená, že vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$ generují vektorový prostor $U$. (*1 bod – -2 body*)

**2.** Mějme lineární zobrazení $\varphi : U \to V$. Nechť vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$ tvoří bázi $\ker \varphi$ a nechť vektory $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$ tvoří bázi prostoru $U$. Dokažte:

**2a.** Vektory $\varphi(u_{k+1})$, $\varphi(u_{k+2})$, $\ldots$,$\varphi(u_n)$ generují $\operatorname{im} \varphi$. (*3 body*)

**2b.** Vektory $\varphi(u_{k+1})$, $\varphi(u_{k+2})$, $\ldots$,$\varphi(u_n)$ jsou lineárně nezávislé ve $V$. (*3 body*)

**3a.** Nechť $U$, $V$ a $W$ jsou tři podprostory ve vektorovém prostoru $Z$. Podobně jako se definuje součet dvou podprostorů definujte součet tří podprostorů množinovým předpisem

$$U + V + W = \{\ldots \quad\}.$$

(*1 bod*)

**3b.** Nechť platí:

$$(\forall z \in U + V + W)(\exists! u \in U)(\exists! v \in V)(\exists! w \in W)(z = u + v + w).$$

Dokažte, že potom

$$(U + V) \cap W = \{0\}.$$

(*3 body*)

**4a.** Napište definici infima množiny $M \subseteq \mathbb{R}$. (*1 bod – -2 body* )

**4b.** Pomocí "axiomu o infimu"detailně dokažte: Každá klesající posloupnost kladných reálných čísel má limitu. (*3 body*)

**5a.** Napište definici spojitosti reálné funkce $f$ v bodě $a \in \mathbb{R}$. (*1 bod – -2 body*)

**5b.** Pomocí kvantifikátorů napište, co znamená, že reálná funkce $f$ nemá v bodě $a \in \mathbb{R}$ reálnou limitu. (*1 bod – -2 body*)

**6.** Dokažte z definice spojitosti a limity, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x) = 2 - x$ pro $x$ racionální a $f(x) = 1$ pro $x$ iracionální

**a)** je spojitá v bodě 1, (*3 body*)

**b)** nemá limitu v bodě $a \neq 1$. (*3 body*)