Jméno:

1	2	3	4	5	6	Celkem

Oprava 1. testu ze semináře z matematiky II, duben 2012

Max. počet bodů 24

1a. Napište definici lineárního obalu vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ve vektorovém prostoru V. (*1 bod – -2 body*)

1b. Nechť

$$[u_1, u_2, \ldots, u_k] = [u_2, u_3, \ldots, u_k].$$

Potom jsou vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$ lineárně závislé. Dokažte. (*3 body*)

2a. Napište definici lineárního zobrazení $\varphi : U \to V$. (*1 bod – -2 body*)

2b. Nechť $\varphi : U \to V$ je prosté lineární zobrazení. Nechť U_1 a U_2 jsou podprostory v U, jejichž součet je direktní. Dokažte, že rovněž součet $\varphi(U_1) + \varphi(U_2)$ je direktní. (*3 body*)

3a. Napište definici lineární nezávislosti vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ve vektorovém prostoru V. (*1 bod – -2 body*)

3b. Mějme lineární zobrazení $\varphi : U \to U$ a vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$. Dokažte: Jsou-li vektory $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\ldots$,$\varphi(u_k)$ lineárně nezávislé, jsou lineárně nezávislé i vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$. (*3 body*)

4a. Napište definici

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}.$$

(*1 bod – -2 body*)

4b. Dokažte z definice limity: Je-li

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad L > 0,$$

pak existuje $K > 0$ tak, že pro všechna $x > K$ je $f(x) > 0$. (*3 body*)

5b. Dokažte z definice limity, že funkce definovaná předpisem $f(x) = x^2$ pro $x \neq 1$ a $f(1) = 7$ nemá v bodě $a = 1$ limitu rovnu 5. (*4 body*)

6a. Napište definici infima množiny $M \subset \mathbb{R}$. (*1 bod – -2 body*)

6b. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, $f(a) > 0$ a $f(b) < 0$. Definujme m jako infimum množiny

$$\{x \in [a, b], f(x) < 0\}.$$

Dokažte, že $f(m) = 0$. (*3 body*)