**A. Písemka pro pokročilé ze SM II, duben 2012**

*Každá úloha po 4 bodech.*

**1.** Nechť $f : U \to \mathbb{R}$ je lineární forma. Dokažte:
**a)** $\dim \ker f \geq n - 1$.
**b)** $\dim \ker f = n$ právě když $f = 0$.

**2.** (Pro pokročilé.) Mějme vektorový prostor $U$ nad $\mathbb{R}$ dimenze $n$ a dvě lineární formy $f, g : U \to \mathbb{R}$. Dokažte:
**a)** $\dim(\ker f \cap \ker g) \geq n - 2$.
**b)** $\dim(\ker f \cap \ker g) = n - 2$ právě když jsou $f$ a $g$ lineárně nezávislé.

**3)** Zformulujte a dokažte analogická tvrzení pro $k$ lineárních forem $f_1, f_2, \ldots, f_k$, kde $1 \leq k \leq n$.

**4.** Dokažte z definice spojitosti: Je-li funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a $f(a) > 0$, pak existuje $c > 0$ a $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a - \delta, a + \delta)$ je $f(x) > c$.

**5.** Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, $f(a) > 0$ a $f(b) < 0$. Definujme $m$ jako infimum množiny

$$\{x \in [a, b], f(x) < 0\}.$$

Dokažte, že $f(m) = 0$.

**6.** Dokažte z definice spojitosti. Je-li funkce $f$ spojitá v bodě $a$ a $f(a) \neq 0$, pak je v bodě $a$ spojitá i funkce $\frac{1}{f}$.