

Jméno:

1	2	3	4	5	6	Celkem

2. písemka ze semináře z matematiky II, květen 2012

Max. počet bodů 24

1. Dokažte: Lineárního zobrazení $\varphi : U \rightarrow V$ je prosté, právě když jeho jádro $\ker \varphi$ obsahuje pouze nulový vektor. (4 body)
2. Napište, jak vypadají všechna lineární zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^1 a své tvrzení dokažte. (4 body)
3. Necht' $\varphi : U \rightarrow U$ je lineární operátor. Necht' u_1, u_2, \dots, u_k jsou vlastní vektory k různým vlastním číslům. Dokažte, že jsou lineárně nezávislé. (Návod: Postupujte indukcí podle k .) (4 body)
4. Dokažte z definice spojitosti: Jsou-li funkce $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak je v tomto bodě spojitá i funkce $f - g$. (4 body)
5. Napište definici derivace funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $a \in \mathbb{R}$. Z této definice dokažte: Jestliže $f'(a) > 0$, pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a, a + \delta)$ je

$$f(x) > f(a).$$

(4 body)

6. Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá funkce s konečnou variací, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ platí

$$s_D = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < K.$$

V tomto případě nazveme variací funkce f na intervalu $[a, b]$ číslo

$$Vf[a, b] = \sup\{s_D; D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}.$$

- Dokažte, že nerostoucí funkce je funkce s konečnou variací, a tuto variaci na intervalu $[a, b]$ spočtete. (4 body)