

Jméno:

1	2	3	4	5	6	Celkem

**P 2. písemka pro pokročilé ze semináře z matematiky II, květen 2012**

Max. počet bodů 24

1. Nechť  $\varphi : U \rightarrow U$  je lineární operátor s vlastností

$$\varphi(\varphi(u)) = \varphi(u)$$

pro všechna  $u \in U$ . Dokažte, že potom

$$U = \ker \varphi \oplus \operatorname{im} \varphi.$$

(4 body)

2. Napište, jak vypadají všechna lineární zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^1$  a své tvrzení dokažte. (2 body)

3. Nechť  $U, V$  jsou podprostory vektorového prostoru  $W$  konečné dimenze se skalárním součinem. Nechť  $U^\perp$  značí ortogonální doplněk.

(a) Dokažte, že  $U \subseteq V$  implikuje  $V^\perp \subseteq U^\perp$ .

(b) Dokažte, že  $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ .

(c) Vyjádřete  $\dim U^\perp$  pomocí  $\dim W$  a  $\dim U$ .

(d) Pomocí (b) a (c) dokažte, že  $U = (U^\perp)^\perp$ .

(e) Dokažte, že  $U^\perp + V^\perp \subseteq (U \cap V)^\perp$ .

(f\*) Pomocí (c) a (d) dokažte, že  $(U \cap V)^\perp \subseteq U^\perp + V^\perp$ . (6 bodů)

4. Napište definici derivace funkce  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  v bodě  $x_0 \in (a, b)$ .

Nechť  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá funkce taková, že  $f(a) = f(b) < f(c)$  pro nějaké  $c \in (a, b)$ . Jestliže má  $f$  derivaci v každém vnitřním bodě intervalu  $(a, b)$ , pak existuje bod  $x_0 \in (a, b)$  takový, že  $f'(x_0) = 0$ . Dokažte. (4 body)

5. Funkce  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se nazývá funkce s konečnou variací, jestliže existuje  $K \in \mathbb{R}$  tak, že pro všechna dělení  $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  platí

$$s_D = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < K.$$

V tomto případě nazveme variací funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$  číslo

$$Vf[a, b] = \sup\{s_D; D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}.$$

(a) Dokažte, že nerostoucí funkce je funkce s konečnou variací, a tuto variaci na intervalu  $[a, b]$  spočítejte.

(b) Napište příklad funkce na  $[0, 1]$ , která nemá konečnou variaci.

(c) Dokažte, že pro každou funkci  $f$  s konečnou variací je funkce

$$F(x) = Vf[a, x]$$

dobře definovaná a neklesající na intervalu  $[a, b]$ .

(4 body)