Lineární programování – jaro 2011 – 4. termín

1. **(15 bodů)** Uvažujme lineární izomorfismus $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definovaný předpisem $\varphi(x) = A \cdot x$, kde A je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$. Nechť $P = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid Bx \le c \,\}$ je polyedr. Formulujte variantu Farkasova lemmatu udávající nutnou a postačující podmínku pro to, aby izomorfismus φ zobrazil některý bod polyedru P do polyedru P.

2. **(20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z, matici F a vektor h takové, že úloha lineárního programování

$$\max \{\, f \mid zF \ge h,\ z \le \mathbf{1} \,\}$$

   je duální k úloze

$$\min \{\, cx \mid Ax \le b,\ x^{\mathrm{T}} B \ge d \,\}.$$

   Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.
   ($\mathbf{1}$ značí vektor $(1, \dots, 1)^{\mathrm{T}}$.)

3. **(25 bodů)** Definujte polyedry a jejich stěny. Charakterizujte stěny polyedrů algebraicky pomocí systémů nerovnic a tuto charakterizaci dokažte. Vypište všechny stěny polyedru

$$\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \ge 1 \,\}.$$

4. **(30 bodů)** Mějme dvě úlohy lineárního programování:

$$\begin{array}{lr} \text{minimalizovat} & 3x + 2y + z \\ \text{maximalizovat} & -x + 2y - 2z \end{array}$$

   při stejných omezeních $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ a

$$\begin{aligned} 2x \qquad - z &\ge -2, \\ x - y + z &\ge 3, \\ x - 2y + z &\le 0. \end{aligned}$$

   Vyřešte jednu z těchto úloh duální simplexovou metodou a poté využijte získanou simplexovou tabulku k dořešení druhé úlohy primární simplexovou metodou.