

## Lineární programování – jaro 2011 – 5. termín

1. (15 bodů) Formulujte variantu Farkasova lemmatu udávající nutnou a postačující podmínku k tomu, aby afinní podprostor

$$\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot (x_1, \dots, x_n)^T = b \}$$

obsahoval bod  $(x_1, \dots, x_n)$  takový, že pro všechna  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  se  $x_{i+1}$  liší od  $x_i$  nejvýše o danou hodnotu  $a_i > 0$ .

2. (20 bodů) Určete funkci  $f$  vektoru proměnných  $y$ , matici  $G$  a vektor  $h$  takové, že úloha lineárního programování

$$\max \{ f \mid yG \leq h, y \leq 0 \}$$

je duální k úloze

$$\min \{ cXd \mid AX \leq B, X \geq 0 \},$$

kde  $A$  je daná matice typu  $m \times n$  a  $X$  je matice proměnných typu  $n \times k$ . Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. (25 bodů) Definujte polyedr a jeho dimenzi. Definujte maximální stěny polyedru, charakterizujte je algebraicky pomocí systémů nerovnic a tuto charakterizaci dokažte. Určete, kolik maximálních stěn mají polyedry, jejichž všechny maximální stěny mají dimenzi 0.
4. (30 bodů) Duální simplexovou metodou nalezněte nějakou přípustnou simplexovou tabulku pro úlohu lineárního programování

$$\text{maximalizovat} \quad 2x - y - 5z$$

při omezeních  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  a

$$2x - y + 3z \geq 2,$$

$$2x - 3y - 8z \leq -9,$$

$$2x - 2y + 3z \leq -2,$$

$$4x - 3y - z \leq -1$$

a úlohu poté dořešte primární simplexovou metodou.