...e jistá racionální funkce. Tedy $S(z)$ má uvnitř Γ pouze konečný počet singularit, a to pólů, takže podle věty o residuích platí:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \int_\Gamma S(z)dz = 2\pi i \sum R_k ,$$ kde R_k probíhá residua funkce $S(z)$ v singulárních bodech uvnitř Γ.

(1) Vypočtěte $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2p\cos x+p^2}$, kde $0<p<1$.

$e^{ix} = z$, $dx = \frac{dz}{iz}$, $\cos x = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$

$$I = \frac{1}{i}\int_\Gamma \frac{dz}{\left[1-p(z+\frac{1}{z})+p^2\right] z} = \frac{1}{i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-pz^2-p+p^2z} = -\frac{1}{i}\int_\Gamma \frac{dz}{pz^2-(p^2+1)z+p}$$

Zde je $S(z) = \frac{1}{pz^2-(p^2+1)z+p}$; najdeme její póly.

$$pz^2-(p^2+1)z+p = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{p^2+1\pm\sqrt{p^4+2p^2+1-4p^2}}{2p} = \frac{p^2+1\pm(p^2-1)}{2p} = \begin{cases} p \\ \frac{1}{p} \end{cases}$$

Vzhledem k předpokladu $0<p<1$ leží uvnitř Γ pouze bod $z=p$ a je to pól 1.řádu.

$$\operatorname*{Res}_{z=p} S(z) = \lim_{z\to p}(z-p)\frac{1}{p(z-p)(z-\frac{1}{p})} = \lim_{z\to p}\frac{1}{p(z-\frac{1}{p})} = \frac{1}{p(p-\frac{1}{p})} = \frac{1}{p^2-1}$$

Tedy $I = -\frac{1}{i}\cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{p^2-1} = \frac{2\pi}{1-p^2}$

(2) Vypočtěte $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\dots}$, kde $a>b>0$

$$\int_0 \qquad (a+b\cos x)^2$$

$e^{ix} = z$, $dx = \frac{dz}{iz}$, $\cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$$I = \frac{1}{i}\int_\Gamma \frac{dz}{z\left[a+\frac{b}{2}(z+\frac{1}{z})\right]^2} = \frac{1}{i}\int_\Gamma \frac{dz}{z\left[a^2+ab(z+\frac{1}{z}) + \frac{b^2}{4}(z^2+2+\frac{1}{z^2})\right]} =$$

$$= \frac{1}{i}\int_\Gamma \frac{dz}{\frac{b^2}{4}z^3+abz^2+(a^2+\frac{b^2}{2})z+ab+\frac{b^2}{4z}} = \frac{4}{i}\int_\Gamma \frac{z\,dz}{b^2z^4+4abz^3+(4a^2+2b^2)z^2+4abz+b^2}$$

Nyní určíme póly funkce $S(z)$, t.j. kořeny rovnice $b^2z^4+4abz^3+(4a^2+2b^2)z^2 + 4abz + b^2 = 0$. To je t.zv. reciproká rovnice (algebraická rovnice $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ se nazývá reciproká, platí-li $a_i = a_{n-i}$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, n$). Její kořeny určíme takto: celou rovnici vydělíme z^2. Obdržíme tak: $b^2(z^2 + \frac{1}{z^2}) + 4ab(z + \frac{1}{z}) + 4a^2 + 2b^2 = 0$.

Nyní položíme $z + \frac{1}{z} = t$; odtud plyne (povýšením na druhou)

$z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} = t^2$, t.j. $z^2 + \frac{1}{z^2} = t^2 - 2$. Dosadíme-li, obdržíme kvadratickou rovnici

$$b^2(t^2-2) + 4abt + 4a^2 + 2b^2 = 0 \qquad \text{neboli}$$

$$b^2 t^2 + 4abt + 4a^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2ab \pm \sqrt{4a^2b^2-4a^2b^2}}{b^2} = -\frac{2a}{b} \quad \text{je dvojnásobný kořen}$$

$$I = \frac{1}{i} \int_{\Gamma} \frac{\cdots}{1-a\left(z+\frac{1}{z}\right)+a^2} \cdot \frac{dz}{z} = -\frac{1}{4i} \int_{\Gamma} \frac{(z^2+1)^2\, dz}{z^2\left[az^2-(a^2+1)z+a\right]}$$

Póly: $z^2\left[az^2-(a^2+1)z+a\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0$ pól 2. řádu

$z = a, \quad z = \frac{1}{a}$ póly 1. řádu

Uvnitř Γ leží póly $z = 0$, $z = a$.

$$\operatorname*{Res}_{z=a} S(z) = \lim_{z\to a} (z-a) \frac{(z^2+1)^2}{z^2 . a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)} = \lim_{z\to a} \frac{(z^2+1)^2}{z^2 . a . \left(z-\frac{1}{a}\right)} = \frac{(a^2+1)^2}{a^3\left(a-\frac{1}{a}\right)} = \frac{(a^2+1)^2}{a^2(a^2-1)}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} S(z) = \lim_{z\to 0} \left[z^2 . \frac{(z^2+1)^2}{z^2\left\{az^2-(a^2+1)z+a\right\}}\right]' =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{4z(z^2+1)\left[az^2-(a^2+1)z+a\right]-(z^2+1)^2(2az-a^2-1)}{\left[az^2-(a^2+1)z+a\right]^2} = \frac{a^2+1}{a^2}$$

$$I = -\frac{1}{4i} . 2\pi i \left[\frac{(a^2+1)^2}{a^2(a^2-1)} + \frac{a^2+1}{a^2}\right] = -\frac{\pi}{2} . \frac{(a^2+1)^2+(a^2+1)(a^2-1)}{a^2(a^2-1)} = \pi \frac{1+a^2}{1-a^2}$$

Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)\, dx$, kde Q je racionální funkce.

počet těchto integrálů je popsán následující větou:

chť $Q(z)$ je funkce komplexní proměnné z, která má vlastnosti:

je analytická a jednoznačná pro všechna z, pro něž $\operatorname{Im} z \geq 0$ s výjimkou konečného počtu singulárních bodů

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} Q(z) = \lim_{z \to z_1} (z-z_1) \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} \,.\, \sqrt{2} i \,.\, \sqrt{2}(1+i)} = \frac{1}{2\sqrt{2}(i-1)}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} Q(z) = \lim_{z \to z_2} (z-z_2) \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{1}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} =$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{2} \,.\, \sqrt{2}(-1+i)\sqrt{2} i} = \frac{1}{2\sqrt{2}(i+1)}$$

$$I = \frac{1}{2} \,.\, 2\pi i \left[\frac{1}{2\sqrt{2}(i-1)} + \frac{1}{2\sqrt{2}(i+1)} \right] = \pi i \,.\, \frac{i+1+i-1}{-4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

) Vypočtěte $I = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\, dx$

$Q(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$ a má tytéž singularity.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} Q(z) = \lim_{z \to z_1} (z-z_1) \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{z_1^2}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \,.\, 2i}{2\sqrt{2}(i-1)} = \frac{i}{2\sqrt{2}(i-1)}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} Q(z) = \lim_{z \to z_2} (z-z_2) \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{z_2^2}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} =$$

Vypočtěte $I = \int_0 \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$ $(a > 0)$

$Q(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$; v bodech $z_{1,2} = \pm ai$ jsou póly 2.řádu , z nich nad reálnou osou leží pouze $z_1 = ai$

$$\operatorname*{Res}_{z=ai} Q(z) = \lim_{z \to ai} \left[(z-ai)^2 \frac{z^2}{(z-ai)^2(z+ai)^2}\right]' = \lim_{z \to ai} 2 . \frac{z}{z+ai} . \frac{z+ai-z}{(z+ai)^2} =$$

$$= 2 . \frac{ai}{2ai} . \frac{ai}{-4a^2} = - \frac{1}{4a}$$

$$I = \frac{1}{2} . 2\pi i . \left(- \frac{1}{4a} \right) = \frac{\pi}{4a}$$

Vypočtěte $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a > 0, \ b > 0)$

$Q(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$; v bodech $z_{1,2} = \pm ai$, $z_{3,4} = \pm bi$ jsou póly 1.řádu. Nad reálnou osou leží $z_1 = ai$, $z_3 = bi$

$$\operatorname*{Res}_{z=ai} Q(z) = \lim_{z \to ai} (z-ai) \frac{1}{(z-ai)(z+ai)(z^2+b^2)} = \lim_{z \to ai} \frac{1}{(z+ai)(z^2+b^2)} = \frac{1}{2ai(b^2-a^2)}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=bi} Q(z) = \lim_{z \to bi} (z-bi) \frac{1}{(z^2+a^2)(z-bi)(z+bi)} = \lim_{z \to bi} \frac{1}{(z+bi)(z^2+a^2)} =$$

$$= \frac{1}{2bi(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{1}{6b^4} \lim_{z \to z_1} \left[4\left(\frac{z}{z-z_2}\right)^3 \cdot \frac{z-z_2-z}{(z-z_2)^2} \right]'' = -\frac{2z_2}{3b^4} \lim_{z \to z_1} \left[\frac{z^3}{(z-z_2)^5} \right]'' =$$

$$= -\frac{2z_2}{3b^4} \lim_{z \to z_1} \left[\frac{3z^2(z-z_2)^5 - z^3 . 5(z-z_2)^4}{(z-z_2)^{10}} \right]' = -\frac{2z_2}{3b^4} \lim_{z \to z_1} \left[\frac{3z^2(z-z_2) - 5z^3}{(z-z_2)^6} \right]' =$$

$$= \frac{2z_2}{3b^4} \lim_{z \to z_1} \left[\frac{2z^3+3z_2z^2}{(z-z_2)^6} \right]' = \frac{2z_2}{3b^4} \lim_{z \to z_1} \frac{(6z^2+6z_2z)(z-z_2)^6 - (2z^3+3z_2z^2).6(z-z_2)^5}{(z-z_2)^{12}} =$$

$$= \frac{2z_2}{3b^4} \lim_{z \to z_1} \frac{6(z^2+z_2z)(z-z_2) - 6(2z^3+3z_2z^2)}{(z-z_2)^7} = \frac{4z_2}{b^4} \lim_{z \to z_1} \frac{-z^3-3z_2z^2-z_2^2 z}{(z-z_2)^7} =$$

$$= -\frac{4z_2}{b^4} \lim_{z \to z_1} \frac{z(z^2+3z_2z+z_2^2)}{(z-z_2)^7} = -\frac{4z_2}{b^4} \frac{z_1(z_1^2+3z_1z_2+z_2^2)}{(z_1-z_2)^7} =$$

$$= \frac{4i\sqrt{\frac{a}{b}}}{b^4} \cdot \frac{i\sqrt{\frac{a}{b}}\left(-\frac{a}{b}+3\frac{a}{b}-\frac{a}{b}\right)}{\left(2i\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^7} = \frac{-4\frac{a^2}{b^2}}{-b^4 . 128i . \frac{a^3}{b^3} . \sqrt{\frac{a}{b}}} = \frac{1}{32i . a^{\frac{3}{2}} . b^{\frac{5}{2}}}$$

$$I = 2\pi i . \frac{1}{32i . a^{\frac{3}{2}} . b^{\frac{5}{2}}} = \frac{\pi}{16a^{\frac{3}{2}} . b^{\frac{5}{2}}}$$

3) Integrály typu $\int_0^\infty Q(x) \cos mx \, dx$, $\int_0^\infty Q(x) \sin mx \, dx$.

echť $Q(z)$ je funkce komplexní proměnné z mající vlastnosti 1°–4° předchozího

$$= \lim_{z \to ia} \frac{ime^{imz}(z+ia)^2 - 2e^{imz}(z+ia)}{(z+ia)^4} = \lim_{z \to ia} \frac{ime^{imz}(z+ia) - 2e^{imz}}{(z+ia)^3} = \frac{e^{-ma}(-2ma-2)}{-8ia^3} =$$

$$= e^{-ma}\,\frac{1+ma}{4\,ia^3}$$

$$I = \pi i \,.\, \frac{e^{-ma}(1+ma)}{4ia^3} = \frac{\pi(1+ma)}{4a^3\,e^{ma}}$$

Vypočtěte $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+k^2}\,dx \qquad (k > 0)$

$Q(z) = \dfrac{1}{z^2+k^2}$, v bodech $z_{1,2} = \pm ik$ jsou póly 1.řádu.

$$\operatorname*{Res}_{z=ik} Q(z)e^{iz} = \lim_{z \to ik} (z-ik)\frac{e^{iz}}{z^2+k^2} = \lim_{z \to ik} \frac{e^{iz}}{z+ik} = \frac{e^{-k}}{2ik}$$

$$I = \pi i \,.\, \frac{e^{-k}}{2ik} = \frac{\pi}{2ke^{k}}$$

Vypočtěte $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx \qquad (a > 0,\ b > 0)$

$Q(z) = \dfrac{z}{(z^2+b^2)^2}$, $z_{1,2} = \pm ib$ jsou póly 2.řádu.

$$\operatorname*{Res}_{z=ib} Q(z)\,e^{iaz} = \lim_{z \to ib} \left[(z-ib)^2 \frac{ze^{iaz}}{(z^2+b^2)^2}\right]' = \lim_{z \to ib} \left[\frac{ze^{iaz}}{(z+ib)^2}\right]' =$$

$$= \lim \frac{(e^{iaz}+iaze^{iaz})(z+ib)^2 - 2ze^{iaz}(z+ib)}{(z+ib)^4} = \lim \frac{e^{iaz}(1+iaz)(z+ib) - 2ze^{iaz}}{(z+ib)^3} =$$

$$\operatorname*{Res}_{z=ia} Q(z)\, e^{imz} = \lim_{z\to ia} (z-ia) \frac{z^2 e^{imz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} = \lim_{z\to ia} \frac{z^2 e^{imz}}{(z+ia)(z^2+b^2)} =$$

$$= \frac{-a^2 e^{-ma}}{2ia(b^2-a^2)}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=ib} Q(z)\, e^{imz} = \lim_{z\to ib} (z-ib) \frac{z^2 e^{imz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} = \lim_{z\to ib} \frac{z^2 e^{imz}}{(z^2+a^2)(z+ib)} =$$

$$= \frac{-b^2 e^{-mb}}{2ib(a^2-b^2)}$$

$$I = \pi i \left[\frac{-a^2 e^{-ma}}{2ia(b^2-a^2)} - \frac{b^2 e^{-mb}}{2ib(a^2-b^2)} \right] = \pi \frac{a^2 b\, e^{-ma} - ab^2 e^{-mb}}{2ab(a^2-b^2)} =$$

$$= \pi \frac{ae^{-ma} - be^{-mb}}{2(a^2-b^2)}$$

Vypočtěte $\quad I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^4 + 1}\, dx$

$Q(z) = \dfrac{z}{z^4+1}$, singularity: $z_1 = \dfrac{\sqrt2}{2} + \dfrac{\sqrt2}{2} i$

$z_2 = -\dfrac{\sqrt2}{2} + \dfrac{\sqrt2}{2} i$ a jsou to póly 1.řádu,

$z_3 = \dfrac{\sqrt2}{2} - \dfrac{\sqrt2}{2} i$ nad reálnou osou leží z_1, z_2.

nemá póly pro $z = x \geq 0$

$z^a Q(z)$ konverguje stejnoměrně k nule pro $z \to 0$ i pro $z \to \infty$.

Pak platí : $$\int_0^\infty x^{a-1} Q(x)\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \sum R_k ,$$

kde R_k probíhá residua funkce $(-z)^{a-1} Q(z)$ v jejích pólech.

3) Vypočtěte $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$, kde $0 < a < 1$

$Q(z) = \dfrac{1}{1+z}$ má jediný pól 1.řádu v bodě $z = -1$

Předpoklady 1° a 2° jsou zřejmě splněny.

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} (-z)^{a-1} Q(z) = \lim_{z\to -1} (z+1)\frac{(-z)^{a-1}}{z+1} = \lim_{z\to -1} (-z)^{a-1} = 1$$

Tedy $$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

4) Vypočtěte $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x^2)^2}\,dx$, kde $-1 < a < 3$

$Q(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ má póly 2.řádu v bodech $i, -i$.

$$\operatorname{Res} (-z)^a Q(z) = \lim \left[(z-i)^2 \frac{(-z)^a}{(1+z^2)^2}\right]' = \lim \left[\frac{(-z)^a}{(z+i)^2}\right]' =$$

$2 \qquad -\sin a\pi \qquad 2 \qquad 2\sin a\frac{\pi}{2}\cos a\frac{\pi}{2} \qquad 4\cos a\frac{\pi}{2}$

0 Vypočtěte $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{-p}}{1+2x\cos\lambda+x^2}$, kde $-1<p<1$, $\;-\pi<\lambda<\pi$

$$Q(z)=\frac{1}{1+2z\cos\lambda+z^2}, \quad \text{póly:} \quad z^2+2z\cos\lambda+1=0$$

$$z_{1,2}=-\cos\lambda\pm\sqrt{\cos^2\lambda-1}=-\cos\lambda\pm i\sin\lambda$$

Jsou to póly 1.řádu.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1}(-z)^{-p}Q(z)=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{(-z)^{-p}}{(z-z_1)(z-z_2)}=\frac{(-z_1)^{-p}}{z_1-z_2}=\frac{(\cos\lambda-i\sin\lambda)^{-p}}{2i\sin\lambda}=$$

$$=\frac{(e^{-i\lambda})^{-p}}{2i\sin\lambda}=\frac{e^{i\lambda p}}{2i\sin\lambda}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2}(-z)^{-p}Q(z)=\lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{(-z)^{-p}}{(z-z_1)(z-z_2)}=\frac{(-z_2)^{-p}}{z_2-z_1}=\frac{(\cos\lambda+i\sin\lambda)^{-p}}{-2i\sin\lambda}=$$

$$=\frac{(e^{i\lambda})^{-p}}{-2i\sin\lambda}=\frac{e^{-i\lambda p}}{-2i\sin\lambda}$$

$$\int_0^\infty\frac{x^{-p}}{1+2x\cos\lambda+x^2}\,dx=\frac{\pi}{\sin(-p+1)\pi}\left[\frac{e^{i\lambda p}}{2i\sin\lambda}-\frac{e^{-i\lambda p}}{2i\sin\lambda}\right]=$$

e) $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{i\frac{11\pi}{6}}$]

2) Vypočtěte: a) $\frac{6+4i}{1-i}$, b) $\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{4\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}$, c) $\frac{2-i\sqrt{3}}{4\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}$,

d) $\frac{z-i}{z+i}$

[a) $1+5i$, b) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$, c) $\frac{2+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{2-\sqrt{3}}{2}$,

d) $\frac{\mathrm{Re}^2 z + \mathrm{Im}^2 z - 1}{\mathrm{Re}^2 z + \mathrm{Im}^2 z + 2\,\mathrm{Im}\, z + 1} - i\,\frac{2\,\mathrm{Re}\, z}{\mathrm{Re}^2 z + \mathrm{Im}^2 z + 2\,\mathrm{Im}\, z + 1}$]

3) Určete všechny hodnoty odmocnin: a) $\sqrt[4]{-16}$, b) $\sqrt[3]{-1+i}$, c) $\sqrt[5]{1+i}$

[a) $\pm\sqrt{2}(1+i)$, $\pm\sqrt{2}(1-i)$, b) $\sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} + \frac{i}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$,

$\sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} - \frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$,

c) $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}\right)$, $\sqrt[10]{2}\left(\sin\frac{\pi}{20} + i\cos\frac{\pi}{20}\right)$,

$\sqrt[10]{2}\left(-\cos\frac{3\pi}{20} + i\sin\frac{3\pi}{20}\right)$, $\sqrt[10]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\right)$, $\sqrt[10]{2}\left(\sin\frac{3\pi}{20} - i\cos\frac{3\pi}{20}\right)$]

4) Určete geometrické místo bodů, pro něž platí:

$- x\sin x \sinh y$, g) $v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-1}$, h) $u = (x^2-y^2)\sin x \cosh y - 2xy\cos x \sinh y$

[a) $f(z) = ie^{-iz}$, b) $f(z) = -\dfrac{3}{z-2}$, c) $f(z) = -ie^z$, d) $f(z) = \sin z - i\sinh z$, e) $f(z) = z^4$, f) $f(z) = z\cos z$, g) $f(z) = \ln(z-1)$, h) $f(z) = z^2 \sin z$]

Zjistěte, zda existuje analytická funkce $f(z) = u + iv$, pro niž platí:

a) $u = \sin 2x \cosh 2y$, b) $v = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, c) $u = e^x \cosh y$, d) $v = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$

[a) ano, b) ano, c) ne, d) ano]

Rozhodněte o konvergenci či divergenci řad: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{i^n}{(1+i)^{n-1}}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cosh in}{n^2}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sinh in}{n}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{i}{n}}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(5+i)^n}{n!}$,

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin in}{e^n}$

[a) konverguje absolutně, b) konverguje absolutně, c) konverguje, d) diverguje, e) konverguje absolutně, f) diverguje]

Najděte poloměr konvergence následujících potenčních řad:

15) Vypočtěte $\int_\Gamma z\,dz$, kde Γ jest: a) úsečka spojující body 0, 2i,
b) lomená čára spojující body 0, 1+i, 2i [a) 2, b) 2 + 2i]

16) Vypočtěte $\int_\Gamma z^3\,dz$, kde Γ je oblouk hyperboly $xy = 4$ od bodu [1,4] do bodu [2,2] $\left[\frac{1}{4}(-225 + \underline{481}) \right]$?

17) Vypočtěte $\int_\Gamma \frac{2z-1}{z(z-1)}\,dz$, kde Γ je kružnice $|z| = 2$ $[4\pi i]$

18) Vypočtěte $\int_\Gamma \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, kde Γ je kružnice $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

$\left[-\frac{1}{2}\pi i\right]$

19) Vypočtěte $\int_\Gamma z\cosh z\,dz$, kde Γ spojuje body 0, 1+i

[sinh 1 cos1 − cosh 1 sin 1 − cosh 1 cos 1 − 1 + i(sinh 1 cos 1 +
+ cosh 1 sin 1 − sinh 1 sin 1)]

20) Vypočtěte $\int_\Gamma \sin^2 z\,dz$, kde Γ spojuje body 0, πi $\left[\frac{1}{2}(\pi - \sinh\pi \cosh\pi)\right]$

21) Vypočtěte $\int_\Gamma \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,dz$, kde Γ je kružnice $|z-1| = 1$ $\left[\frac{\pi i}{\sqrt{2}}\right]$

22) Vypočtěte $\int_\Gamma \frac{e^z}{z^3-1}\,dz$, kde Γ je kružnice $|z| = 2$ $\left[\frac{2\pi i}{3}\left(e - e^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right]$

28. Najděte singularity funkce $f(z) = \dfrac{1}{(e^z-1)(z^2+4)^2}$

$\left[\ z = 1 \text{ je pól 1.řádu, } z = \pm 2i \text{ jsou póly 2.řádu}\ \right]$

29. Stanovte residua funkce $f(z) = \dfrac{z^3}{(z-i)(z^2-5z+6)}$ v singulárních bodech

$\left[\ \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \dfrac{1-i}{10},\ \operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = -\dfrac{8}{5}(2+i),\ \operatorname*{Res}_{z=3} f(z) = \dfrac{27}{10}(3+i)\ \right]$

30. Stanovte residua funkce $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z^2+1)^2}$ v singulárních bodech

$\left[\ \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1,\ \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = -\dfrac{e^i}{4}(2-i),\ \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = -\dfrac{e^{-i}}{16}(2+i)\ \right]$

31. Vypočtěte $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + a}$ $(a > 1)$ $\left[\ \dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\ \right]$

32. Vypočtěte $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{1-2a\cos x+a^2}\,dx$ $(0 < a < 1)$ $\left[\ -\dfrac{\pi}{2a}\left[\dfrac{(a^6+1)^2}{a^5(a^2-1)} + \left(\dfrac{a^2+1}{a}\right)^5 - 4\left(\dfrac{a^2+1}{a}\right)^3 + 3\,\dfrac{a^2+1}{a}\right]\ \right]$

33. Vypočtěte $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$ $\left[\ \pi\sqrt{2}\ \right]$