**Písemka z Diferenciální geometrie křivek a ploch**
**Termín C, 20.6.2011**

**Jméno a příjmení:**
**UČO:**

1. Je dána parametrizace

$$f(u,v) = (u^2+v, u+v^2, uv), \quad u,v \in \mathbb{R}.$$

Obraz $f$ v $\mathbb{E}^3 \cong \mathbb{R}^3$ označíme jako $M = f(\mathbb{R}^2)$.

(a) [1b] Načrtněte průnik množiny $M$ s rovinou $z = 0$.
(b) [2b] Rozhodněte, zda $f$ parametrizuje plochu v $\mathbb{E}^3$ na dostatečně malých okolích bodů $A = f(0,0) \in M$ a $B = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in M$.
(c) [2b] Ukažte, že $f$ parametrizuje plochu v $\mathbb{E}^3$ na dostatečně malém okolí bodu $C = f(1,1) \in M$.

2. Označme plochu s parametrizací $f$ na okolí $D \subseteq \mathbb{R}^2$ bodu $(1,1) \in D$ jako $S$.
(a) [2b] Určete asymptotické směry v bodě $f(1,1)$ a normálovou křivost ve směru $(du, dv) = (1,0)$.
(b) [2b] Určete hlavní směry a hlavní křivosti v bodě $f(1,1)$.
(c) [1b] Spočítejte střední a Gaussovu křivost v bodě $f(1,1)$ a typ tohoto bodu (eliptický, hyperbolický nebo parabolický).
(d) [3b] Uvažme křivku na ploše $S$ procházející bodem $f(1,1)$, která je v oblasti parametrů daná parametrizací $(u(t), v(t)) = (1+t, 1)$. Její tečné pole označíme $U(t)$. Spočtěte kovariantní derivaci $\frac{\nabla U(t)}{dt}$ podél této křivky v bodě $t = 0$.
(e) [1b] Najděte nějakou izometrii plochy $S$ pro oblast parametrů $D = (1-\epsilon, 1+\epsilon) \times (1-\epsilon, 1+\epsilon) \subseteq \mathbb{R}^2$ pro dostatečně malé $\epsilon > 0$.

3. Nechť $T$ je válec o poloměru 1.
(a) [1b] Rozhodněte, zda na $T$ existuje šroubovice, jejíž křivost je ve všech bodech větší než 1.
(b) [1b] Rozhodněte, zda na $T$ existuje křivka, jejíž křivost je ve všech bodech větší než 1.
Všechny svoje odpovědi zdůvodněte.

4. Dokažte, nebo najděte protipříklad:
(a) [1b] Jestliže jsou plochy $S$ a $\overline{S}$ izometrické, pak existuje shodnost $\varphi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ taková, že $\varphi(S) = \overline{S}$.
(b) [1b] Existuje plocha $S$ která má právě jeden hyperbolický bod.
(c) [1b] Nechť $S$ je plocha, $p \in S$ eliptický bod a $C = S \cap \rho$ řez rovinou $\rho$, která prochází bodem $p$. Pak křivost křivky $C$ v bodě $p$ je kladná. (Připomeňme, že křivost křivky je vždy nezáporná.)
Všechny svoje odpovědi zdůvodněte.

5. [2b] Nechť $f(s)$ je křivka parametrizovaná obloukem s nenulovou křivostí ve všech bodech. Předpokládejme, že hlavní normály ve všech bodech $f(s)$ se procházejí počátkem. Co můžete říci o křivce $f(s)$ ? Svoji odpověď zdůvodněte.