

# Globální vlastnosti rovinných křivek: rotační index

**Definice.** Množina  $C \subseteq E_2$  se nazývá *vložená křivka třídy  $C^r$* ,  $r \geq 1$ , jestliže existuje regulární pohyb  $f : I \rightarrow E_2$  třídy  $C^r$  takový, že  $C = f(I)$  pro nějaký otevřený interval  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

Vložená křivka  $C \subseteq E_2$  se nazývá *uzavřená vložená křivka třídy  $C^r$* , jestliže existuje parametrizace  $f : [a, b] \rightarrow E_2$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  taková, že  $f([a, b]) = C$ ,  $f(a) = f(b)$  a dále  $f|_{(a,b)} \rightarrow E_2$  je regulární pohyb třídy  $C^r$  a platí  $f_+^{(i)}(a) = f_-^{(i)}(b)$ .

Jestliže jsou navíc zobrazení  $f|_{[a,b)}$  a  $f|_{(a,b]}$  injektivní,  $C$  se nazývá *jednoduchá uzavřená vložená křivka*.

Pro jednoduchost budeme v této mluvit jen o *uzavřených a jednoduchých uzavřených* křivkách (které budeme implicitně uvažovat jako vložené). V tomto kontextu budeme použít novou definici křivosti, pro kterou budeme uvažovat  $E_2$  jako **orientovaný** Euklidovský prostor:

**Definice.** V každém bodě křivky  $f(t)$  definujeme *orientovaný Frenetův repér*  $(f(t); e_1(t), \bar{e}_2(t))$  tak, že  $e_1(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$  a  $(e_1(t), \bar{e}_2(t))$  je kladná ortonormální báze. Číslo  $\bar{\kappa}(t) \in \mathbb{R}$  splňující  $e_1'(t) = \bar{\kappa}(t)\bar{e}_2(t)$  budeme nazývat *orientovaná křivost* v bodě  $f(t)$ .

Frenetovy vzorce jsou stejné jako v neorientované verzi:  $e_1'(t) = \bar{\kappa}(t)\bar{e}_2(t)$  a  $e_2'(t) = -\bar{\kappa}(t)\bar{e}_1(t)$ . Uvědomte si ale, že křivost může být i záporná. Rozmyslete si konkrétní příklady !

**Tvrzení.** Nechť  $f : [a, b] \rightarrow E_2$  je uzavřená křivka  $C$  třídy  $C^r$ . Pak existuje diferenciální funkce  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  třídy  $C^r$  taková, že  $e_1(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ , a platí  $\theta'(t) = \bar{\kappa}(t)\|f'(t)\|$ . Navíc rozdíl  $\theta(a) - \theta(b)$  nezávisí na volbě funkce  $\theta$ .

*Důkaz.* Existence funkce  $\theta$  je evidentní: zvolíme  $\theta(a)$  tak, že  $e_1(a) = (\cos \theta(a), \sin \theta(a))$  a pak rozšíříme  $\theta$  spojitě na interval  $[a, b]$ . Při parametrizaci obloukem dostaneme Tedy  $\cos \theta(s) = (e_1(s), \varepsilon_1)$  a  $\sin \theta(s) = -(e_2(s), \varepsilon_1)$ , kde  $\varepsilon_1$  je první bázový vektor standardní báze. Tedy  $\theta(s)$  je třídy  $C^r$ . (Potřebujeme k tomu oba předchozí vztahy ? Rozmyslete si detaily !) Derivací pak dostaneme, že  $\theta'(s) = \bar{\kappa}(s)$ .

Abychom ukázali nezávislost rozdílu  $\theta(a) - \theta(b)$  na volbě funkce  $\theta$ , předpokládejme, že  $\varphi(t)$  je jiná funkce splňující Tvrzení. Pak  $\theta(t) - \varphi(t) = 2k(t)\pi$  pro nějakou spojitou funkci  $k(t) \in \mathbb{Z}$ . Tedy  $k(t)$  je konstanta.  $\square$

Tedy rozdíl  $\theta(a) - \theta(b)$  je určen parametrizací  $f : [a, b] \rightarrow E_2$  uzavřené křivky. Rozmyslete, si že pro různé parametrizace může být tento rozdíl různý !

**Důsledek.** Je-li  $C$  uzavřená křivka a  $P \in C$  bod na křivce, pak existuje bod  $Q \in C$  takový, že  $e_1(P) = -e_1(Q)$ .

*Důkaz.* Nechť  $e_1(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ , kde  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce z Tvrzení při parametrizaci obloukem, a nechť  $P = f(s_0)$  a  $\theta_0 = \theta(s_0)$ . Pak existuje  $s_1 \in [a, b]$  takové, že  $\theta(s_1) = \theta_0 + \pi$  nebo  $\theta(s_1) = \theta_0 - \pi$ . (Jinak by platilo,  $\theta(a), \theta(b) \in (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$ , což není možné vzhledem k  $\theta(b) - \theta(a) = 2k\pi$  pro nějaké  $\mathbb{Z} \ni k \neq 0$ .)  $\square$

Rozmyslete si význam důsledku na obrázku !

**Definice.** Číslo  $n_C := \frac{1}{2\pi} [\theta(a) - \theta(b)]$  se nazývá *rotační index* uzavřené křivky  $C$  z předchozího Tvzení.

**Příklad.** Křivka  $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  pro  $t \in [0, m]$ ,  $m \in \mathbb{N}$  má rotační index  $m$ . Jedná se samozřejmě o kružnici. Rozmyslete si příklady uzavřených křivek, jejichž rotační index je  $\leq 0$ !

**Věta.** Platí  $n_C = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \bar{\kappa}(t) \|f'(t)\| dt$ .

Navíc  $n_C$  nezávisí na reparametrizaci zachovávající orientaci. Reparametrizace měnící orientaci převrací znaménko  $n_C$ .

*Důkaz.* První část plyne ze vztahu  $\theta'(t) = \bar{\kappa}(t) \|f'(t)\|$ . Závislost na reparametrizaci  $t = t(\tau)$  se plyne z tvaru integrálu na pravé straně po substituci  $t = t(\tau)$ .  $\square$

Připomeňme, že konvexní podmnožina  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  splňuje, že je-li  $x_1, x_2 \in T$  pak také  $\overline{x_1 x_2} \subseteq T$ , kde  $\overline{x_1 x_2}$  označuje úsečku s krajními body  $x_1$  a  $x_2$ .

**Lemma.** Necht  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  je konvexní podmnožina a  $e : T \rightarrow S^1$  funkce třídy  $C^r$ . Pak existuje funkce  $\theta : T \rightarrow \mathbb{R}$  třídy  $C^r$  splňující  $e(x) = (\cos \theta(x), \sin \theta(x))$  pro  $x \in T$ . Navíc, jsou-li  $\theta(x)$  a  $\varphi(x)$  dvě takové funkce, pak se liší o  $2k\pi$  pro nějaké  $k \in \mathbb{Z}$ .

Symbolem  $S^1$  označujeme kružnici. Uvědomte si, že toto technické Lemma je dvourozměrná verze předchozího Tvzení! (Důkaz jsme si neuváděli.)

Následující Věta je hlavním výsledkem této kapitoly:

**Věta (Hopf's Umlaufsatz).** Je-li  $f : [a, b] \rightarrow E_2$  jednoduchá křivka  $C$ , pak  $n_C = \pm 1$ .

Opačná implikace neplatí. Rozmyslete si příklady!

*Důkaz.* Můžeme předpokládat  $a = 0$  a že  $f$  je parametrována obloukem. Položme  $\Delta = \{(s, t) \mid 0 \leq s \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^2$  a definujeme funkci  $h : \Delta \rightarrow S^1$  předpisem

$$h(s, t) = \begin{cases} e_1(s) & s = t \\ -e_1(0) & (s, t) = (0, b) \\ \frac{f(t) - f(s)}{\|f(t) - f(s)\|} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Množina  $\Delta$  je konvexní a funkce  $h(s, t)$  je spojitá. Dále můžeme předpokládat, že  $f(0) = (0, 0)$  a že toto je "nejnižší" bod na křivce, tj. že tento bod má nejmenší  $y$ -novou souřadnici. Pak  $e_1(0)$  je až na znaménko první bázový vektor standardní báze, tj.  $e_1(0) = \pm \varepsilon_1$  a dále budeme předpokládat  $e_1(0) = \varepsilon_1$  (tím se může změnit orientace!).

Podle Lemmatu platí  $h(s, t) = (\cos \tilde{\theta}(s, t), \sin \tilde{\theta}(s, t))$  pro spojitou funkci  $\tilde{\theta} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ . Je-li  $\theta(s)$  funkce z Tvzení, pak podle předchozí Věty platí

$$\begin{aligned} n_C &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \bar{\kappa}(s) ds = \frac{1}{2\pi} (\theta(b) - \theta(0)) = \frac{1}{2\pi} (\tilde{\theta}(b, b) - \tilde{\theta}(0, 0)) = \\ &= \frac{1}{2\pi} [(\tilde{\theta}(0, b) - \tilde{\theta}(0, 0)) + (\tilde{\theta}(b, b) - \tilde{\theta}(0, b))]. \end{aligned}$$

Zde  $N_1 := \tilde{\theta}(0, b) - \tilde{\theta}(0, 0)$  je úhel, o který se mění vektor průvodiče. Tedy  $N_1 = \pi$ , neboť křivka je v horní polorovině. Podobně  $N_2 = \tilde{\theta}(b, b) - \tilde{\theta}(0, b)$  je úhel, o který se mění vektor opačný k průvodiči, tj.  $N_2 = \pi$ . Tedy  $n_C = 1$ .  $\square$