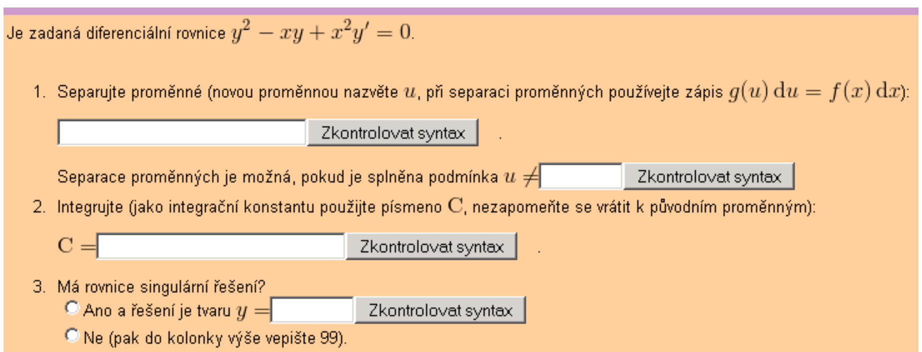
1 Homogenní diferenciální rovnice

Příklad 1.

Najděte řešení diferenciální rovnice

$$y^2 - xy + x^2y' = 0.$$

Použijte příslušnou substituci (zaveďte novou proměnnou u), separujte proměnné (při separaci proměnných používejte zápis $g(u)\,\mathrm{d}u = f(x)\,\mathrm{d}x$), integrujte a vyjádřete obecné, případně také singulární, řešení diferenciální rovnice v původních proměnných.


Je zadaná diferenciální rovnice $y^2 - xy + x^2y' = 0$.

1. Separujte proměnné (novou proměnnou nazvěte u, při separaci proměnných používejte zápis $g(u)\,\mathrm{d}u = f(x)\,\mathrm{d}x$):

   [ ] Zkontrolovat syntax .

   Separace proměnných je možná, pokud je splněna podmínka $u \neq$ [ ] Zkontrolovat syntax
2. Integrujte (jako integrační konstantu použijte písmeno C, nezapomeňte se vrátit k původním proměnným):

   C = [ ] Zkontrolovat syntax .
3. Má rovnice singulární řešení?

   ○ Ano a řešení je tvaru $y =$ [ ] Zkontrolovat syntax

   ○ Ne (pak do kolonky výše vepište 99).

Obrázek 1: Zadání příkladu v elektronickém odpovědníku IS MU.

Řešení:

1. Vyjádříme y':

$$\begin{aligned} y^2 - xy + x^2y' &= 0 \\ x^2y' &= xy - y^2 \quad / : x^2, \quad x \neq 0 \\ y' &= \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Jedná se o homogenní rovnici tvaru $y' = f(\frac{y}{x})$, kterou vyřešíme substitucí $u = \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad y' = u'x + u$:

$$\begin{aligned} u'x + u &= u \ - u^2 \\ u'x &= -u^2 \quad / : u^2, \quad u^2 \neq 0 \Longrightarrow u \ \neq 0 \\ \frac{\mathrm{d}u}{u^2} &= -\frac{\mathrm{d}x}{x}. \end{aligned}$$

Požadovaný zápis separace proměnných $g(u)\,\mathrm{d}u = f(x)\,\mathrm{d}x$ bude v odpovědníku IS MU ve tvaru: `du/u^2=-dx/x`.

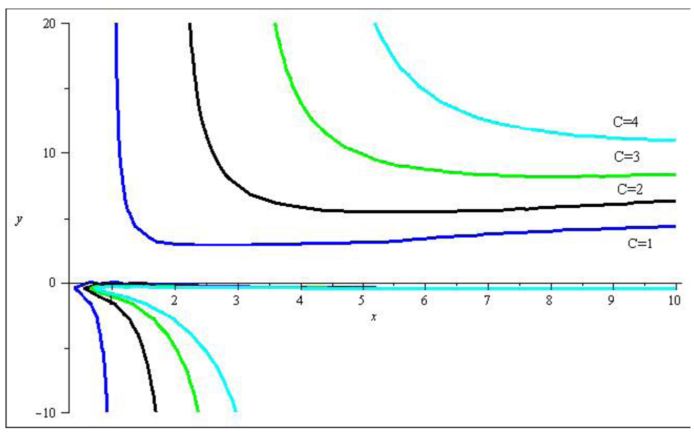
2. Integrujeme:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
-\frac{1}{u} &= -(\ln|x| + \ln \mathrm{C}) \\
\mathrm{e}^{\frac{1}{u}} &= \mathrm{C}x,
\end{aligned}
$$

vrátíme se k původním proměnným a získáváme obecné řešení v implicitním tvaru:

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} = \mathrm{C}x.$$

Výsledek v testu IS MU zapíšeme jako C = `exp(x/y)/x`.



Obrázek 2: Všeobecné řešení $\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} = \mathrm{C}x$ diferenciální rovnice $y^2 - xy + x^2y' = 0$.

3. Singulární řešení
Při výpočtu v prvním kroku, jsme vyloučili případ, kdy $u \neq 0$, což v původních proměnných znamená:

$$\frac{y}{x} = 0 \Longleftrightarrow y = 0.$$

Řešení $y \equiv 0$ vyhovuje dané diferenciální rovnici $(0^2 - x \cdot 0 + x^2 = 0)$ a je to její konstantní řešení, které však není pro žádnou volbou C obsaženo v námi spočítaném obecném řešení. Diferenciální rovnice $y^2 - xy + x^2y' = 0$ má tedy singulární řešení, kterým je přímka zadaná rovnicí $y = 0$.

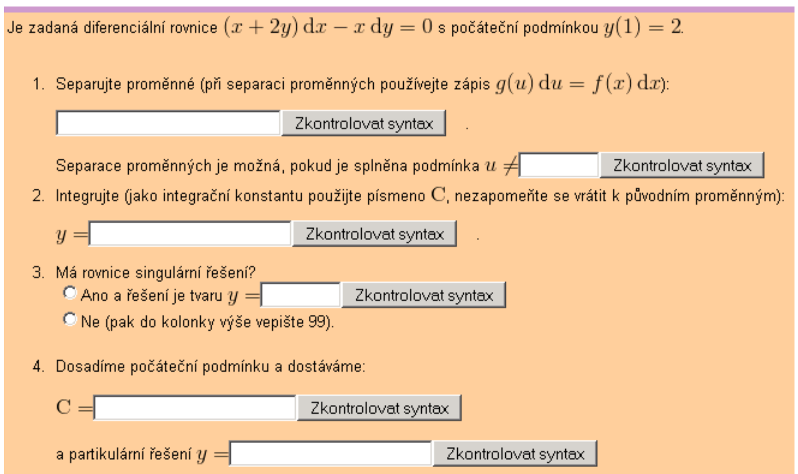
V testu IS MU zaškrtneme odpověď „Ano“ a do odpovědního políčka zapíšeme `y=0`.

Příklad 2.

Řešte počáteční problém

$$(x + 2y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0, \quad y(1) = 2.$$

Použijte příslušnou substituci (zaveďte novou proměnnou u), separujte proměnné (při separaci proměnných používejte zápis $g(u)\,\mathrm{d}u = f(x)\,\mathrm{d}x$), integrujte a rozhodněte, zda má diferenciální rovnice singulární řešení. Na základě počáteční podmínky spočtěte partikulární řešení.



Je zadaná diferenciální rovnice $(x+2y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$ s počáteční podmínkou $y(1) = 2$.

1. Separujte proměnné (při separaci proměnných používejte zápis $g(u)\,\mathrm{d}u = f(x)\,\mathrm{d}x$):

   [ ] Zkontrolovat syntax .

   Separace proměnných je možná, pokud je splněna podmínka $u \neq$ [ ] Zkontrolovat syntax
2. Integrujte (jako integrační konstantu použijte písmeno C, nezapomeňte se vrátit k původním proměnným):

   $y =$ [ ] Zkontrolovat syntax .
3. Má rovnice singulární řešení?
   - Ano a řešení je tvaru $y =$ [ ] Zkontrolovat syntax
   - Ne (pak do kolonky výše vepište 99).
4. Dosadíme počáteční podmínku a dostáváme:

   C = [ ] Zkontrolovat syntax

   a partikulární řešení $y =$ [ ] Zkontrolovat syntax

Obrázek 3: Zadání příkladu v elektronickém odpovědníku IS MU.

Řešení:

1. Jedná se o homogenní rovnici tvaru $M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0$, kterou upravíme:

$$(x + 2y)\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y \quad / : x^2, \quad x \neq 0$$
$$1 + 2\frac{y}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$
$$y' = 1 + 2\frac{y}{x}$$

a vyřešíme substitucí $u = \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad y' = u'x + u$:

$$u'x + u = 1 + 2u$$
$$u'x = 1 + u \quad / : (1 + u), \quad u \neq -1$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{1 + u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Požadovaný zápis separace proměnných $g(u)\,\mathrm{d}u = f(x)\,\mathrm{d}x$ bude v odpovědníku IS MU ve tvaru: `du/(1+u)=dx/x`.

2. Integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$\ln|1+u| = \ln|x| + \ln|\mathrm{C}|$$
$$u = \mathrm{C}x - 1,$$

vrátíme se k původním proměnným a získáváme obecné řešení:

$$y = \mathrm{C}x^2 - x.$$

Výsledek v testu IS MU zapíšeme jako $y =$ `C*x^2-x`.

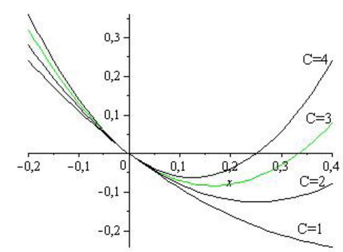
3. Singulární řešení: Vyloučili jsme případ, kdy $u \neq -1$ a protože $0\cdot x = 1-1$, má rovnice konstantní řešení $u = -1$. Původní rovnice má tedy řešení $y = -x$, jež je zahrnuté v řešení obecném pro volbu konstanty $\mathrm{C} = 0$.

   V testu IS MU zaškrtneme odpověď „Ne“ a do odpovědního políčka zapíšeme `99`.

4. Dosadíme počáteční podmínku, tj. $y = 2, x = 1$:

$$2 = \mathrm{C}\cdot 1 - 1$$
$$\mathrm{C} = 3.$$

Partikulární řešení je tvaru $y = x(3x-1)$, což v odpovědi IS MU zapíšeme jako $y =$ `x*(3*x-1)`.



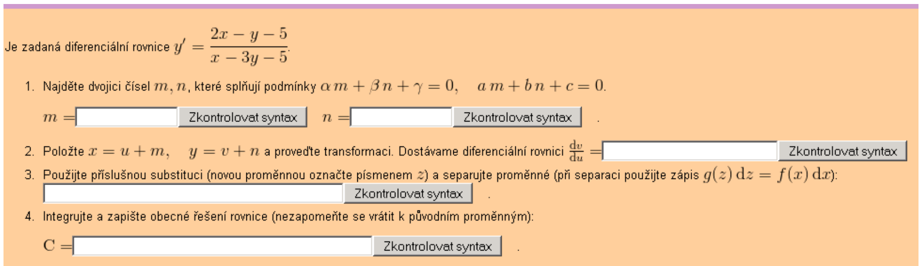
Obrázek 4: Všeobecné řešení $y = \mathrm{C}x^2 - x$ diferenciální rovnice $(x+2y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$.

Příklad 3.

Najděte řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{2x - y - 5}{x - 3y - 5}.$$

Použijte příslušnou transformaci, separujte proměnné, integrujte a rozhodněte, zda má diferenciální rovnice singulární řešení.



Obrázek 5: Zadání příkladu v elektronickém odpovědníku IS MU.

Řešení:

Jedná se o diferenciální rovnici typu $y' = \frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}$. Protože

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) = -5 \neq 0,$$

převedeme ji na homogenní rovnici $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = F\left(\frac{v}{u}\right)$, kterou vyřešíme.

1. Řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x - y - 5 &= 0 \\ x - 3y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ -2 & 6 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{array}\right)$$

   Tedy $n = -1$ a $2m - 1 = 5 \Longrightarrow m = 2$.

2. Položíme $x = u + m$, $y = v + n$:

$$\begin{aligned} x &= u \ + 2 \quad \Longrightarrow \quad u \ = x - 2 \\ y &= v \ - 1 \quad \Longrightarrow \quad v \ = y + 1 \end{aligned}$$

   a dosadíme do zadané diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} &= \frac{2u + 4 - v + 1 - 5}{u + 2 - 3v + 3 - 5} \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} &= \frac{2u - v}{u - 3v} \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} &= \frac{u}{u} \cdot \frac{2 - \frac{v}{u}}{1 - 3\frac{v}{u}} \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} &= \frac{2 - \frac{v}{u}}{1 - 3\frac{v}{u}} \end{aligned}$$

   Získáváme homogenní diferenciální rovnici $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = F\left(\frac{v}{u}\right)$, kterou v odpovědníku IS MU zapíšeme jako `dv/du=(2*u-v)/(u-3*v)` nebo v upravené podobě jako `dv/du=(2-v/u)/(-3*v/u)`.

3. Rovnici dále řešíme, použijeme substituci $z = \frac{v}{u} \quad \Longrightarrow \quad v' = z + uz'$:

$$\begin{aligned}
z + uz' &= \frac{2-z}{1-3z} \quad / - z \\
uz' &= \frac{2-z}{1-3z} - z \cdot \frac{1-3z}{1-3z} \\
uz' &= \frac{3z^2 - 2z + 2}{1-3z}
\end{aligned}$$

a za podmínek $u \neq 0$, $3z^2 - 2z + 2 \neq 0$ separujeme proměnné

$$\frac{1-3z}{3z^2-2z+2}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Požadovaný tvar separace proměnných $g(z)\,\mathrm{d}z = f(x)\,\mathrm{d}x$ zapíšeme v odpovědníku IS MU jako `(1-3*z)/(3*z^2-2*z+2)*dz=du/u`.

4. Integrujeme

$$\begin{aligned}
\frac{-\frac{1}{2}(6z-2)}{3z^2-2z+2}\,\mathrm{d}z &= \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
\int \frac{6z-2}{3z^2-2z+2}\,\mathrm{d}z &= -2\int \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
\ln|3z^2 - 2z + 2| &= -2\ln|u| + \ln \mathrm{C} \\
\ln|3z^2 - 2z + 2| + 2\ln|u| = \ln \mathrm{C}.
\end{aligned}$$

Po odlogaritmování

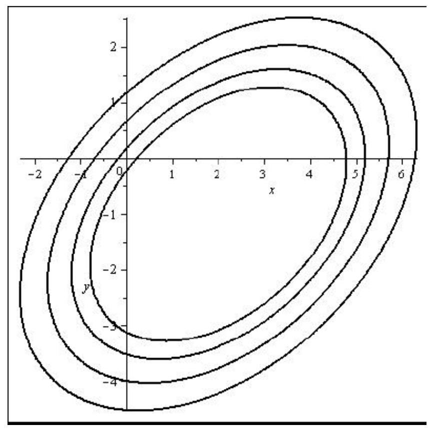
$$u^2(z^2 - 2z + 2) = \mathrm{C}.$$

Vrátíme se k původním proměnným

$$\begin{aligned}
u^2(3\frac{v^2}{u^2} - 2\frac{v}{u} + 2) &= \mathrm{C} \\
3v^2 - 2uv + 2u^2 &= \mathrm{C} \\
3(y+1)^2 - 2(x-2)(y+1) + 2(x-2)^2 &= \mathrm{C} \\
3y^2 + 2x^2 - 2xy + 10y - 10x + 15 &= \mathrm{C} \\
3y^2 + 2x^2 - 2xy + 10y - 10x &= \mathrm{C}.
\end{aligned}$$

Získáváme obecné řešení dané rovnice v implicitním tvaru, v testu IS MU zapíšeme výsledek jako C = `3*y^2+2*x^2-2*x*y+10*y-10*x`.

Vrátíme se k podmínce $3z^2-2z+2 \neq 0$, zda nám neumožní určit singulární řešení. Daná rovnice nemá v $\mathbb{R}$ řešení tj., pro žádné reálné číslo z se nebude daný výraz rovnat nule.



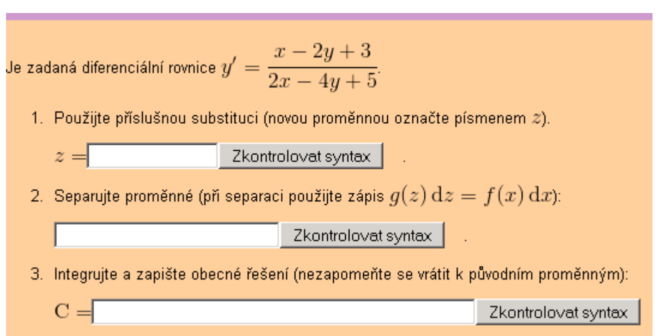
Obrázek 6: Obecné řešení $3y^2 + 2x^2 - 2xy + 10y - 10x = \mathrm{C}$ diferenciální rovnice $y' = \frac{2x-y-5}{x-3y-5}$.

Příklad 4.

Najděte řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{x - 2y + 3}{2x - 4y + 5}.$$

Použijte příslušnou transformaci, separujte proměnné a integrujte.



Je zadaná diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x - 2y + 3}{2x - 4y + 5}$.

1. Použijte příslušnou substituci (novou proměnnou označte písmenem z).

   $z =$ Zkontrolovat syntax .

2. Separujte proměnné (při separaci použijte zápis $g(z)\,\mathrm{d}z = f(x)\,\mathrm{d}x$):

   Zkontrolovat syntax .

3. Integrujte a zapište obecné řešení (nezapomeňte se vrátit k původním proměnným):

   $\mathrm{C} =$ Zkontrolovat syntax

Obrázek 7: Zadání příkladu v elektronickém odpovědníku IS MU.

Řešení:

Jedná se o diferenciální rovnici typu $y' = \frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}$.

1. Protože
$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
provedeme substituci $z = x - 2y$, $z' = 1 - 2y' \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{1-z'}{2}$.
Do odpovědního políčka testu IS MU zapíšeme $z =$ `x-2y`.

2. Separujeme proměnné
$$\begin{aligned} \frac{1-z'}{2} &= \frac{z\ +3}{2z+5} \\ 1-z' &= \frac{2z+6}{2z+5} \\ -z' &= \frac{2z+6-2z-5}{2z+5} \\ z' &= -\frac{1}{2z+5}. \end{aligned}$$
Požadovaný tvar separace proměnných $g(z)\,\mathrm{d}z = f(x)\,\mathrm{d}x$ zapíšeme v odpovědníku IS MU jako `(2z+5)*dz=-1/dx`.

3. Integrujeme
$$\begin{aligned} \int (2z+5)\,\mathrm{d}z \ &= -\int \,\mathrm{d}x \\ z^2+5z &= -x+\mathrm{C} \end{aligned}$$
a vrátíme se k původním proměnným
$$\begin{aligned} (x-2y)^2+5(x-2y)+x &= \mathrm{C} \\ (x-2y)^2+6x-10y &= \mathrm{C}. \end{aligned}$$
Výsledek v testu IS MU zapíšeme jako $\mathrm{C} =$ `(x-2*y)^2+6*x-10*y`.