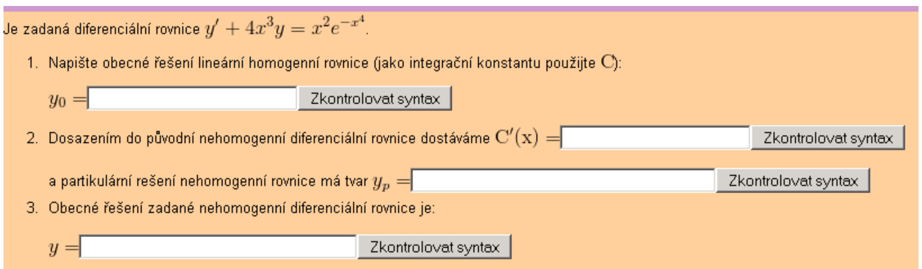
1 Lineární rovnice 1. řádu

Příklad 1.

Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' + 4x^3y = x^2\mathrm{e}^{-x^4}.$$



Je zadaná diferenciální rovnice $y' + 4x^3y = x^2e^{-x^4}$.

1. Napište obecné řešení lineární homogenní rovnice (jako integrační konstantu použijte C):

   $y_0 =$ Zkontrolovat syntax

2. Dosazením do původní nehomogenní diferenciální rovnice dostáváme $C'(x) =$ Zkontrolovat syntax

   a partikulární rešení nehomogenní rovnice má tvar $y_p =$ Zkontrolovat syntax

3. Obecné řešení zadané nehomogenní diferenciální rovnice je:

   $y =$ Zkontrolovat syntax

Obrázek 1: Zadání příkladu v elektronickém odpovědníku IS MU.

Řešení:

Jedná se o lineární diferenciální rovnici 1. řádu $y' = a(x)y + b(x)$, kde $a(x) = -4x^3, b(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^4}$.

1. Nejprve vyřešíme příslušnou homogenní lineární rovnici $y' = -4x^3y$, separujeme proměnné

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -4x^3\,\mathrm{d}x, \quad y \neq 0 \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int 4x^3\,\mathrm{d}x \\ \ln|y| &= -x^4 + \ln(\mathrm{C}), \quad \mathrm{C} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   po odlogaritmování dostáváme obecné řešení homogenní lineární rovnice

$$y_0 = \mathrm{C}\mathrm{e}^{-x^4},$$

   které v odpovědníku IS MU zapíšeme jako $y_0 =$`C*exp(-x^4)`.

2. Nahradíme integrační konstantu C vhodnou funkcí $\mathrm{C}(x)$ a najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y_p = \mathrm{C}(x)\mathrm{e}^{-x^4}.$$

Zderivujeme $y' = \mathrm{C}'(x)e^{-x^4} - 4x^3\mathrm{C}(x)$ a dosadíme do původní lineární rovnice

$$\mathrm{C}'(x)\mathrm{e}^{-x^4} - 4x^3\mathrm{C}(x)\mathrm{e}^{-x^4} + 4x^3\mathrm{C}(x)\mathrm{e}^{-x^4} = x^2\mathrm{e}^{-x^4}$$

a odtud po osamostatnění $\mathrm{C}'(x)$

$$\mathrm{C}'(x) = x^2.$$

Integrujeme

$$\mathrm{C}(x) = \int x^2\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{C}(x) = \frac{x^3}{3}.$$

Tedy partikulární řešení nehomogenní rovnice má tvar

$$y_p = \mathrm{C}(x)\mathrm{e}^{-x^4}$$
$$y_p = \frac{x^3}{3}\mathrm{e}^{-x^4}$$

Do testu IS MU zapíšeme $\mathrm{C}'(x) =$`x^2` a $y_p =$`(x^3)/3*exp(-x^4)`.

3. Obecné řešení lineární diferenciální rovnice je pak

$$y = y_0 + y_p$$
$$y = \mathrm{C}\mathrm{e}^{-x^4} + \frac{x^3}{3}\mathrm{e}^{-x^4}$$
$$y = \mathrm{e}^{-x^4}(\mathrm{C} + \frac{x^3}{3}).$$

Výsledek do odpovědního políčka zapíšeme jako $y =$`exp(-x^4)*(C+(x^3)/3)`.

Příklad 2.

Je zadaná diferenciální rovnice

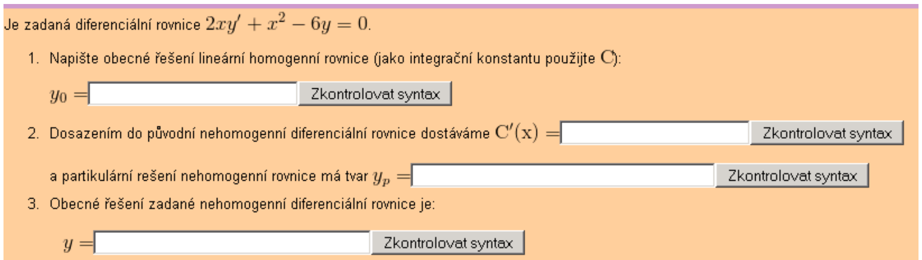
$$2xy' + x^2 - 6y = 0.$$

Řešení:

Rovnici upravíme

$$2xy' + x^2 - 6y = 0$$
$$y' = \frac{6}{2x}y - \frac{x^2}{2x}$$
$$y' = \frac{3}{x}y - \frac{x}{2}.$$

Jedná se o lineární diferenciální rovnici 1. řádu $y' = a(x)y + b(x)$, kde $a(x) = \frac{3}{x}, b(x) = -\frac{x}{2}$.



Obrázek 2: Zadání příkladu v elektronickém odpovědníku IS MU.

1. Vyřešíme homogenní lineární rovnici $y' = \frac{3}{x}y$, separujeme proměnné.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{y} &= 3\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad y \neq 0\\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x}\\ \ln|y| &= 3\ln x + \ln \mathrm{C}, \quad \mathrm{C} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

   po odlogaritmování dostáváme obecné řešení homogenní lineární rovnice

$$y_0 = \mathrm{C}x^3,$$

   které v odpovědníku IS MU zapíšeme jako $y_0 =$`C*x^3`.

2. Nahradíme integrační konstantu C vhodnou funkcí $\mathrm{C}(x)$ a najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y = \mathrm{C}(x)x^3.$$

   Zderivujeme $y' = \mathrm{C}'(x)x^3 + 3x^2\mathrm{C}(x)$ a dosadíme do původní lineární rovnice

$$C'(x)x^3 + 3x^2\mathrm{C}(x) = \frac{3}{x}\mathrm{C}(x)x^3 - x^2 = 0$$

   a odtud po osamostatnění $\mathrm{C}'(x)$

$$\mathrm{C}'(x) = -\frac{1}{2x^2}.$$

   Integrujeme

$$\begin{aligned}\mathrm{C}(x) &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\\ \mathrm{C}(x) &= \frac{1}{2x}.\end{aligned}$$

Tedy partikulární řešení nehomogenní rovnice má tvar

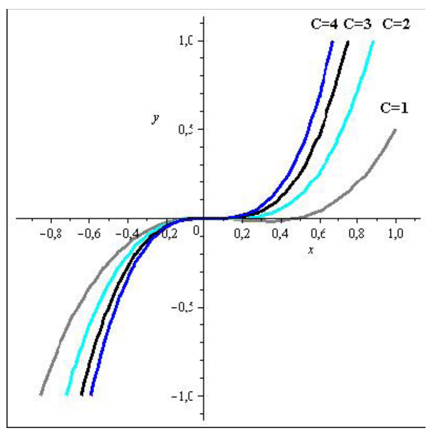
$$y_p = \mathrm{C}(x)x^3$$
$$y_p = \frac{1}{2x} \cdot x^3$$
$$y_p = \frac{x^2}{2}.$$

Do testu IS MU zapíšeme $\mathrm{C}'(x) =$`1/(2*x^2)` a $y_p =$`(x^2)/2`.

3. Obecné řešení diferenciální rovnice je pak

$$y = y_0 + y_p$$
$$y = \mathrm{C}x^3 - \frac{x^2}{2}.$$

Výsledek do odpovědního políčka zapíšeme jako $y =$`C*x^3+(x^2)/2`.



Obrázek 3: Obecné řešení $y = \mathrm{C}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ diferenciální rovnice $2xy' + x^2 - 6y = 0$.