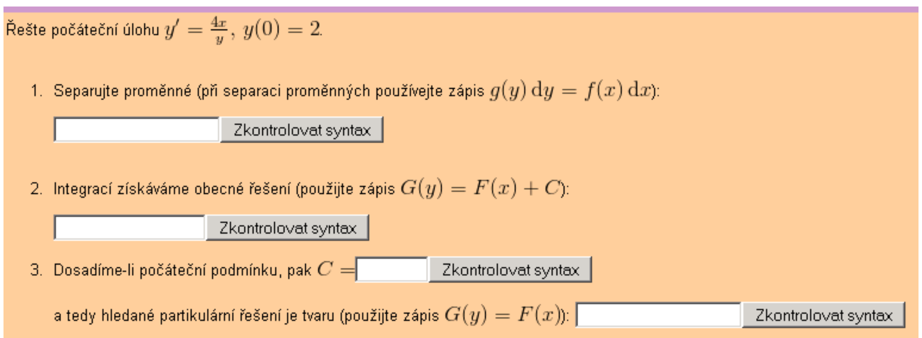
1 Rovnice se separovanými proměnnými

Příklad 1.

Je zadaná diferenciální rovnice

$$y' = \frac{4x}{y}$$

s počáteční podmínkou $y(0) = 2$. Separujte proměnné, integrujte a spočtěte partikulární řešení diferenciální rovnice. Při separaci proměnných používejte zápis $g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$.


Řešte počáteční úlohu $y' = \frac{4x}{y}$, $y(0) = 2$.

1. Separujte proměnné (při separaci proměnných používejte zápis $g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$):

   Zkontrolovat syntax

2. Integrací získáváme obecné řešení (použijte zápis $G(y) = F(x) + C$):

   Zkontrolovat syntax

3. Dosadíme-li počáteční podmínku, pak $C =$ Zkontrolovat syntax

   a tedy hledané partikulární řešení je tvaru (použijte zápis $G(y) = F(x)$): Zkontrolovat syntax

Obrázek 1: Zadání příkladu v elektronickém odpovědníku IS MU.

Řešení:

1. Jde o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými. Nahrazením y' členem $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a úpravou dostáváme na jedné straně rovnice proměnné s x, na druhé proměnné s y:

   $$y\,\mathrm{d}y = 4x\,\mathrm{d}x.$$

   Požadovaný zápis separace proměnných $g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$ bude v odpovědníku IS MU ve tvaru: `y*dy=4*x*dx`.

2. Integrováním dostáváme:

   $$\int y\,\mathrm{d}y = 4\int x\,\mathrm{d}x$$
   $$\frac{y^2}{2} = 2x^2 + \mathrm{C}.$$

   Obecné řešení bychom mohli dále upravovat:

   $$y^2 = 4x^2 + 2\mathrm{C}$$
   $$y = \sqrt{4x^2 + 2\mathrm{C}}$$
   $$y = \sqrt{4x^2 + \mathrm{K}}.$$

Protože však potřebujeme vyjádřit konstantu C, zůstaneme u obecného řešení tvaru: $\frac{y^2}{2} = 2x^2 + \mathrm{C}$ a do odpovědního políčka v testu IS MU zapíšeme `y^2/2=2*x^2+C`.

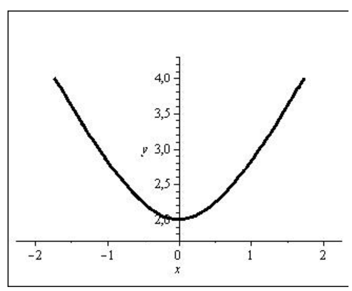
3. Dosadíme počáteční podmínku, tj. $x = 0, y = 2$:

$$\begin{aligned}\frac{4}{2} &= 2 \cdot 0 + \mathrm{C} \\ \mathrm{C} &= 2.\end{aligned}$$

Partikulární řešení je tvaru

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{2} &= 2x^2 + 2 \\ y^2 &= 4x^2 + 4 \\ y &= 2\sqrt{x^2 + 1}.\end{aligned}$$

Výsledek v testu IS MU zapíšeme jako `y=2*sqrt(x^2+1)`.



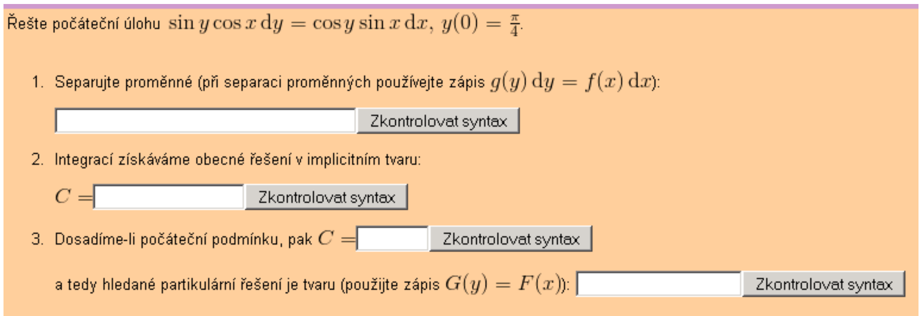
Obrázek 2: Partikulární řešení $y = 2\sqrt{x^2 + 1}$ diferenciální rovnice $yy' = 4x$ s počáteční podmínkou $y(0) = 2$.

Příklad 2.

Řešte počáteční úlohu

$$\sin y \cos x \, \mathrm{d}y = \cos y \sin x \, \mathrm{d}x, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Při separaci proměnných používejte zápis $g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$.



Obrázek 3: Zadání příkladu v elektronickém odpovědníku IS MU.

Řešení:

1. Jde o tzv. separovatelný tvar diferenciální rovnice, který za předpokladu $\cos y \neq 0$ a $\cos x \neq 0$ převedeme na rovnici se separovanými proměnnými

$$\frac{\sin y}{\cos y}\,\mathrm{d}y = \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

   Požadovaný zápis separace proměnných $g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$ bude v odpovědníku IS MU ve tvaru: `sin(y)/cos(y)*dy=sin(x)/cos(x)*dx`.

2. Integrujeme. Při integraci použijeme vhodnou substituci.

$$\int \frac{\sin y}{\cos y}\,\mathrm{d}y \left| \begin{array}{rcl} \cos y & = & t \\ -\sin y\,\mathrm{d}y & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \left| \begin{array}{rcl} \cos x & = & a \\ -\sin x\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}a \end{array} \right|$$

$$-\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\int 1a\,\mathrm{d}a$$

$$\ln|t| = \ln|a| + \ln \mathrm{C}$$

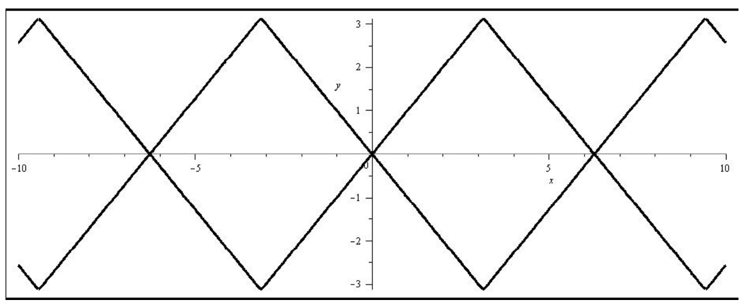
$$\cos y = \mathrm{C}\cos x.$$

   Obecné řešení v implicitním tvaru zapíšeme do odpovědi v IS MU jako $C =$ `cos(y)/cos(x)`.

3. Dosadíme počáteční podmínku, tj. $x = 0, y = \frac{\pi}{4}$:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \mathrm{C}\cos 0$$
$$\mathrm{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\mathrm{C} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tedy hledané partikulární řešení je $\cos y = \frac{\cos x}{\sqrt{2}}$.
V odpovědníku IS MU zapsáno implicitně jako `cos(y)=1/sqrt(2)*cos(x)` nebo explicitně jako `y = arcos(1/sqrt(2)*cos(x))`.



Obrázek 4: Partikulární řešení $\cos y = \frac{\cos x}{\sqrt{2}}$ diferenciální rovnice $\sin y \cos x \,\mathrm{d}y = \cos y \sin x \,\mathrm{d}x$ s počáteční podmínkou $y(0) = \frac{\pi}{4}$.