Hodnocení kontingenčních tabulek

Osnova:

- zavedení kontingenční tabulky
- testování hypotézy o nezávislosti a měření síly závislosti
- test homogenity
- analýza čtyřpolních tabulek

Motivace

Při zpracování dat se velmi často setkáme s úkolem zjistit, zda dvě náhodné veličiny nominálního typu jsou stochasticky nezávislé. Např. nás může zajímat, zda ve sledované populaci je barva očí a barva vlasů nezávislá.

Zpravidla chceme také zjistit intenzitu případné závislosti sledovaných dvou veličin. K tomuto účelu byly zkonstruovány různé koeficienty, které nabývají hodnot od 0 do 1. Čím je takový koeficient bližší 1, tím je závislost mezi danými dvěma veličinami silnější a čím je bližší 0, tím je slabší.

Kontingenční tabulky

Nechť X,Y jsou dvě nominální náhodné veličiny (tj. obsahová interpretace je možná jenom u relace rovnosti). Nechť X nabývá variant $x_{[1]}, ..., x_{[r]}$ a Y nabývá variant $y_{[1]}, ..., y_{[s]}$.

Označme:

$\pi_{jk} = P(X = x_{[j]} \wedge Y = y_{[k]})$ … simultánní pravděpodobnost dvojice variant $(x_{[j]}, y_{[k]})$

$\pi_{j.} = P(X = x_{[j]})$ … marginální pravděpodobnost varianty $x_{[j]}$

$\pi_{.k} = P(Y = y_{[k]})$ … marginální pravděpodobnost varianty $y_{[k]}$

Simultánní a marginální pravděpodobnosti zapíšeme do kontingenční tabulky:

	y	$y_{[1]}$	...	$y_{[s]}$	$\pi_{j.}$
x	π_{jk}				
$x_{[1]}$		π_{11}	...	π_{1s}	$\pi_{1.}$
...		...	...	...	...
$x_{[r]}$		π_{r1}	...	π_{rs}	$\pi_{r.}$
$\pi_{.k}$		$\pi_{.1}$	...	$\pi_{.s}$	1

Pořídíme dvourozměrný náhodný výběr $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ rozsahu n z rozložení, kterým se řídí dvourozměrný diskrétní náhodný vektor (X, Y). Zjištěné absolutní simultánní četnosti n_{jk} dvojice variant $(x_{[j]}, y_{[k]})$ uspořádáme do kontingenční tabulky:

	y	$y_{[1]}$	...	$y_{[s]}$	$n_{j.}$
x	n_{jk}				
$x_{[1]}$		n_{11}	...	n_{1s}	$n_{1.}$
...		...	...	...	...
$x_{[r]}$		n_{r1}	...	n_{rs}	$n_{r.}$
$n_{.k}$		$n_{.1}$	...	$n_{.s}$	n

$n_{j.} = n_{j1} + ... + n_{js}$ je marginální absolutní četnost varianty $x_{[j]}$
$n_{.k} = n_{1k} + ... + n_{rk}$ je marginální absolutní četnost varianty $y_{[k]}$

Simultánní pravděpodobnost π_{jk} odhadneme pomocí simultánní relativní četnosti $p_{jk} = \frac{n_{jk}}{n}$, marginální pravděpodobnosti $\pi_{j.}$ a $\pi_{.k}$ odhadneme pomocí marginálních relativních četností $p_{j.} = \frac{n_{j.}}{n}$ a $p_{.k} = \frac{n_{.k}}{n}$.

Testování hypotézy o nezávislosti

Testujeme nulovou hypotézu H_0: X, Y jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny proti alternativě H_1: X, Y nejsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny.

Kdyby náhodné veličiny X, Y byly stochasticky nezávislé, pak by platil multiplikativní vztah

$\forall j = 1, \dots, r, \ \forall k = 1, \dots, s: \pi_{jk} = \pi_{j.} \, \pi_{.k}$ neboli $\frac{n_{jk}}{n} = \frac{n_{j.}}{n} \cdot \frac{n_{.k}}{n}$, tj. $n_{jk} = \frac{n_{j.} n_{.k}}{n}$. Číslo $\frac{n_{j.} n_{.k}}{n}$ se nazývá teoretická četnost dvojice variant $(x_{[j]}, y_{[k]})$.

Testová statistika: $K = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} \frac{\left(n_{jk} - \frac{n_{j.} n_{.k}}{n}\right)^2}{\frac{n_{j.} n_{.k}}{n}}$.

Platí-li H_0, pak K se asymptoticky řídí rozložením $\chi^2((r-1)(s-1))$.

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1)), \infty)$.

Hypotézu o nezávislosti veličin X, Y tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $K \geq \chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1))$.

Podmínky dobré aproximace

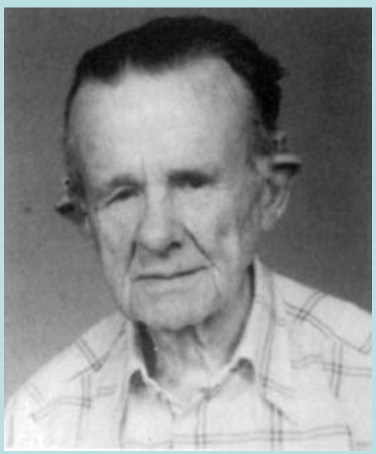
Rozložení statistiky K lze aproximovat rozložením $\chi^2((r-1)(s-1))$, pokud teoretické četnosti $\frac{n_{j.} n_{.k}}{n}$ aspoň v 80% případů nabývají hodnoty větší nebo rovné 5 a ve zbylých 20% neklesnou pod 2. Není-li splněna podmínka dobré aproximace, doporučuje se slučování některých variant.

Měření síly závislosti

Cramérův koeficient: $V = \sqrt{\frac{K}{n(m-1)}}$, kde m = min{r,s}. Tento koeficient nabývá hodnot mezi 0 a 1. Čím blíže je k 1, tím je závislost mezi X a Y těsnější, čím blíže je k 0, tím je tato závislost volnější.

Význam hodnot Cramérova koeficientu:

mezi 0 až 0,1 … zanedbatelná závislost,
mezi 0,1 až 0,3 … slabá závislost,
mezi 0,3 až 0,7 … střední závislost,
mezi 0,7 až 1 … silná závislost.



Carl Harald Cramér (1893 – 1985): Švédský matematik

Příklad

V sociologickém průzkumu byl z uchazečů o studium na vysokých školách pořízen náhodný výběr rozsahu 360. Mimo jiné se zjišťovala sociální skupina, ze které uchazeč pochází (veličina X) a typ školy, na kterou se hlásí (veličina Y). Výsledky jsou zaznamenány v kontingenční tabulce:

Sociální skupina	Typ školy			$n_{j.}$
	univerzitní	technický	ekonomický	
I	50	30	10	90
II	30	50	20	100
III	10	20	30	60
IV	50	10	50	110
$n_{.k}$	140	110	110	360

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny. Vypočtěte Cramérův koeficient.

Řešení:

Nejprve vypočteme všech 12 teoretických četností:

Sociální skupina	Typ školy			$n_{j.}$
	univerzitní	technický	ekonomický	
I	50	30	10	90
II	30	50	20	100
III	10	20	30	60
IV	50	10	50	110
$n_{.k}$	140	110	110	360

$$\frac{n_{1.}n_{.1}}{n} = \frac{90\cdot 140}{360} = 35,\quad \frac{n_{1.}n_{.2}}{n} = \frac{90\cdot 110}{360} = 27,5,\quad \frac{n_{1.}n_{.3}}{n} = \frac{90\cdot 110}{360} = 27,5,$$

$$\frac{n_{2.}n_{.1}}{n} = \frac{100\cdot 140}{360} = 38,9,\quad \frac{n_{2.}n_{.2}}{n} = \frac{100\cdot 110}{360} = 30,6,\quad \frac{n_{2.}n_{.3}}{n} = \frac{100\cdot 110}{360} = 30,6,$$

$$\frac{n_{3.}n_{.1}}{n} = \frac{60\cdot 140}{360} = 23,3,\quad \frac{n_{3.}n_{.2}}{n} = \frac{60\cdot 110}{360} = 18,3,\quad \frac{n_{3.}n_{.3}}{n} = \frac{60\cdot 110}{360} = 18,3,$$

$$\frac{n_{4.}n_{.1}}{n} = \frac{110\cdot 140}{360} = 42,8,\quad \frac{n_{4.}n_{.2}}{n} = \frac{110\cdot 110}{360} = 33,6,\quad \frac{n_{4.}n_{.3}}{n} = \frac{110\cdot 110}{360} = 33,6$$

Vidíme, že podmínky dobré aproximace jsou splněny, všechny teoretické četnosti převyšují číslo 5.

Dosadíme do vzorce pro testovou statistiku K:

$$K = \frac{(50-35)^2}{35} + \frac{(30-27,5)^2}{27,5} + \dots + \frac{(50-33,6)^2}{33,6} = 76,84.$$

Dále stanovíme kritický obor:

$$W = \left\langle \chi^2_{(r-1)(s-1)}(0,95); \infty \right) = \left\langle \chi^2_{(4-1)(3-1)}(0,95); \infty \right) = \left\langle \chi^2_{6}(0,95); \infty \right) = \left\langle 12,6; \infty \right)$$

Protože $K \in W$, hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Vypočteme Cramérův koeficient: $V = \sqrt{\frac{76,84}{360\cdot 2}} = 0,326.$

Hodnota Cramérova koeficientu svědčí o tom, že mezi veličinami X a Y existuje středně silná závislost.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o třech proměnných (X - sociální skupina, Y – typ školy, četnost) a 12 případech:

	1 X	2 Y	3 četno
1	I	univerzi	5
2	I	technick	3
3	I	ekonom	1
4	II	univerzi	3
5	II	technick	5
6	II	ekonom	2
7	III	univerzi	1
8	III	technick	2
9	III	ekonom	3
1	IV	univerzi	5
1	IV	technick	1
1	IV	ekonom	5

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – OK – Specif. Tabulky – List 1 X, List 2 Y – OK, zapneme proměnnou vah četnost – OK, Výpočet – na záložce Možnosti zaškrtneme Očekávané četnosti. Dostaneme kontingenční tabulku teoretických četností:

Souhrnná tab.: Očekávané četnosti (
Četnost označených buněk > 10
Pearsonův chí-kv. : 76,8359, sv=6, p

X	Y univerzi	Y technic	Y ekonomi	Řádk součt
I	35,00	27,50	27,50	90,00
II	38,88	30,55	30,55	100,0
III	23,33	18,33	18,33	60,00
IV	42,77	33,61	33,61	110,0
Vš.sku	140,0	110,0	110,0	360,0

Všechny teoretické četnosti jsou větší než 5, podmínky dobré aproximace jsou splněny. V záhlaví tabulky je uvedena hodnota testové statistiky K = 76,8359, počet stupňů volnosti 6 a odpovídající p-hodnota. Je velmi blízká 0, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nezávislosti typu školy a sociální skupiny.
Hodnotu testové statistiky a Cramérův koeficient dostaneme také tak, že na na záložce Možnosti zaškrtneme Pearsonův & M-V chí kvadrát a Cramérovo V, na záložce Detailní výsledky vybereme Detailní 2 rozm. tabulky.

Statist.	Chi-kv	sv	p
Pearsonův chí-k	76,83	df=	p=,00
M-V chí-kvadr.	84,53	df=	p=,00
Fí	,4619		
Kontingenční ko	,4193		
Cramér. V	,3266		

Test homogenity v tabulce typu 2 x s

Máme kontingenční tabulku, v níž veličina X má jen dvě varianty a veličina Y s variant:

x \ y (π_{jk})	$y_{[1]}$	...	$y_{[s]}$	$\pi_{j.}$
$x_{[1]}$	π_{11}	...	π_{1s}	$\pi_{1.}$
$x_{[2]}$	π_{21}	...	π_{2s}	$\pi_{2.}$
$\pi_{.k}$	$\pi_{.1}$	...	$\pi_{.s}$	1

Pořídíme dvourozměrný náhodný výběr $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ rozsahu n z rozložení, kterým se řídí dvourozměrný diskrétní náhodný vektor (X, Y). Zjištěné absolutní simultánní četnosti n_{jk} dvojice variant $(x_{[j]}, y_{[k]})$ uspořádáme do kontingenční tabulky:

x \ y (π_{jk})	$y_{[1]}$	...	$y_{[s]}$	$n_{j.}$
$x_{[1]}$	n_{11}	...	n_{1s}	$n_{1.}$
$x_{[2]}$	n_{21}	...	n_{2s}	$n_{2.}$
$\pi_{.k}$	$n_{.1}$	...	$n_{.s}$	n

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu H_0: $\pi_{1k} = \pi_{2k}$, k = 1, 2, …, s proti alternativě H_1: aspoň jedna dvojice pravděpodobností se liší.

Na problém lze pohlížet tak, že máme s nezávislých náhodných výběrů z alternativních rozložení, přičemž první má rozsah $n_1 = n_{11} + n_{21}$ a pochází z rozložení A(ϑ), …. , s-tý má rozsah $n_s = n_{1s} + n_{2s}$ a pochází z rozložení A(ϑ). Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta \dots =$ proti alternativě H_1: non H_0.

V kapitole o hodnocení náhodných výběrů z alternativních rozložení jsme použili testovou statistiku:

$Q = \frac{1}{M_*(1-M_*)}\sum_{j=1}^{s} n_j (M_j - M_*)^2 \approx \chi^2(s-1)$, když H_0 platí.

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(s-1), \infty)$

H_0 tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $Q \in W$. Přitom $M_* = \sum_{j=1}^{s} \frac{n_j M_j}{n}$ je vážený průměr výběrových průměrů.

Nyní použijeme testovou statistiku $K = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{s} \frac{\left(n_{jk} - \frac{n_{j.}n_{.k}}{n}\right)^2}{\frac{n_{j.}n_{.k}}{n}}$, stejně jako u testu nezávislosti. Lze dokázat, že při výše uvedeném označení jsou statistiky Q a K totožné. Tedy test homogenity lze provést stejně jako test nezávislosti.

Tato statistika se v případě platnosti nulové hypotézy asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(s-1)$. Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(s-1), \infty)$.

Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $K \in W$.

Příklad: 104 náhodně vybraných matek bylo dotázáno, zda jejich kojenec dostává dudlík. Zjišťoval se též nejvyšší stupeň dosaženého vzdělání matky.

Vzdělání matky	Počet matek	Počet dětí s dudlíkem
ZŠ	39	27
SŠ	47	34
VŠ	18	15

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že používání dudlíku nezávisí na vzdělání matky.
(Jedná se o příklad 8.6.2. ze skript Základní statistické metody. Zde je uvedeno, že testová statistika Q se realizuje hodnotou 1,267, kritický obor je $W = \langle 5{,}992; \infty)$, tedy nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.)

Řešení: Data zapíšeme do kontingenční tabulky 2 x 3.

	Matka ZŠ	Matka SŠ	Matka VŠ	$n_{j.}$
Dudlík ano	27	34	15	76
Dudlík ne	12	13	3	28
$n_{.k}$	39	47	18	104

Ověříme splnění podmínek dobré aproximace:

$$\frac{n_{1.}n_{.1}}{n} = \frac{76 \cdot 39}{104} = 28{,}5,\ \frac{n_{1.}n_{.2}}{n} = \frac{76 \cdot 47}{104} = 34{,}35,\ \frac{n_{1.}n_{.3}}{n} = \frac{76 \cdot 18}{104} = 13{,}15,\ \frac{n_{2.}n_{.1}}{n} = \frac{28 \cdot 39}{104} = 10{,}5,\ \frac{n_{2.}n_{.2}}{n} = \frac{28 \cdot 47}{104} = 12{,}65,\ \frac{n_{2.}n_{.3}}{n} = \frac{28 \cdot 18}{104} = 4{,}85$$

Podmínky dobré aproximace jsou splněny, pouze v 1 případě ze 6 je teoretická četnost menší než 5.
Dosadíme do vzorce pro testovou statistiku K:

$$K = \frac{(27-28{,}5)^2}{28{,}5} + \frac{(34-34{,}35)^2}{34{,}35} + \cdots + \frac{(15-13{,}15)^2}{13{,}15} = 1{,}268$$

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}((r-1)(s-1)); \infty) = \langle \chi^2_{0{,}95}(2); \infty) = \langle 5{,}992; \infty)$

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 se tedy neprokázalo, že používání dudlíku závisí na vzdělání matky.

Čtyřpolní tabulky

Nechť r = s = 2. Pak hovoříme o čtyřpolní kontingenční tabulce a používáme označení: $n_{11} = a$, $n_{12} = b$, $n_{21} = c$, $n_{22} = d$.

X	Y		$n_{j.}$
	$y_{[1]}$	$y_{[2]}$	
$x_{[1]}$	a	b	a+b
$x_{[2]}$	c	d	c+d
$n_{.k}$	a+c	b+d	n

Test nezávislosti ve čtyřpolní tabulce

Testovou statistiku pro čtyřpolní kontingenční tabulku lze zjednodušit do tvaru:

$$K = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

Platí-li hypotéza o nezávislosti veličin X, Y, pak K se asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(1)$.

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(1), \infty)$

Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $K \in W$.

Povšimněte si, že za platnosti hypotézy o nezávislosti ad = bc.

Pro čtyřpolní tabulku navrhl R. A. Fisher přesný (exaktní) test nezávislosti známý jako Fisherův faktoriálový test.

Sir Ronald Aylmer Fisher (1890 – 1962): Britský statistik a genetik.
(Fisherův přesný test je popsán např. v knize K. Zvára: Biostatistika, Karolinum, Praha 1998. Princip spočívá v tom, že pomocí kombinatorických úvah se vypočítají pravděpodobnosti toho, že při daných marginálních četnostech dostaneme tabulky, které se od nulové hypotézy odchylují aspoň tak, jako daná tabulka.)

Upozornění: STATISTICA poskytuje p-hodnotu pro Fisherův přesný test. Jestliže vyjde $p \leq \alpha$, pak hypotézu o nezávislosti zamítáme na hladině významnosti α.

Příklad: V náhodném výběru 50 obézních dětí ve věku 6 – 14 let byla zjišťována obezita rodičů. Veličina X – obezita matky, veličina Y – obezita otce. Výsledky průzkumu jsou uvedeny v kontingenční tabulce:

X	Y		$n_{j.}$
	ano	ne	
ano	15	9	24
ne	7	19	26
$n_{.k}$	22	28	50

Pomocí Fisherova exaktního testu ověřte, zda lze na hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu o nezávislosti náhodných veličin X a Y.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor o třech proměnných X, Y (varianty 0 – neobézní, 1 – obézní) a četnost a čtyřech případech:

	1 X	2 Y	3 četno
1	obézn	obézn	1
2	obézn	neobé	9
3	neobé	obézn	7
4	neobé	neobé	1

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – OK – Specif. Tabulky – List 1 X, List 2 Y – OK, zapneme proměnnou vah četnost – OK, Výpočet – na záložce Možnosti zaškrtneme Fisher exakt., Yates, McNemar (2x2). Dostaneme výstupní tabulku:

Statist.	Statist. : X(2) x Y(2) (d		
	Chi-kva	sv	p
Pearsonův chi-kv	6,410	df=	p=,01
M-V chi-kvadr.	6,548	df=	p=,01
Yatesův chi-kv.	5,048	df=	p=,02
Fisherův přesný,			p=,01
2-stranný			p=,02
McNemarův chi-k	,2647	df=	p=,60
(B/C)	,0625	df=	p=,80

Vidíme, že p-hodnota pro Fisherův exaktní oboustranný test je 0,02163, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že obezita matky a otce spolu nesouvisí.

Test homogenity ve čtyřpolní tabulce

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu H_0: $\pi_{1k} = \pi_{2k}$, k = 1, 2 proti alternativě H_1: aspoň jedna dvojice pravděpodobností se liší. Na problém lze pohlížet tak, že máme dva nezávislé výběry z alternativních rozložení, první má rozsah n_1 = a+c a pochází z rozložení A(ϑ_1), druhý má rozsah n_2 = b+d a pochází z rozložení A(ϑ_2). Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta_1 - \vartheta_2$ = 0 proti oboustranné alternativě.

V kapitole o hodnocení náhodných výběrů z alternativních rozložení jsme použili testovou statistiku $T_0 = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{M_*(1-M_*)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$, která se za platnosti nulové hypotézy asymptoticky řídí rozložením N(0,1). (M_* je vážený průměr výběrových průměrů.)

Nyní použijeme testovou statistiku $K = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, stejně jako u testu nezávislosti. Tato statistika se v případě platnosti nulové hypotézy asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(1)$. Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(1), \infty)$. Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když K $\in$ W.

Příklad: Očkování proti chřipce se zúčastnilo 460 dospělých, z nichž 240 dostalo očkovací látku proti chřipce a 220 dostalo placebo. Na konci experimentu onemocnělo 100 lidí chřipkou. 20 z nich bylo z očkované skupiny a 80 z kontrolní skupiny. Na asymptotické hladině významnosti 0,01 testujte hypotézu, že výskyt chřipky v očkované a kontrolní skupině je shodný.

Řešení:

Údaje uspořádáme do čtyřpolní kontingenční tabulky, kde roli veličiny X hraje onemocnění chřipkou a roli veličiny Y existence očkování.

X onemocnění chřipkou	Y existence očkování		$n_{j.}$
	ano	ne	
ano	20	80	100
ne	220	140	360
$n_{.k}$	240	220	460

Vypočteme sloupcově podmíněné relativní četnosti:

X onemocnění chřipkou	Y existence očkování	
	ano	ne
ano	8,3%	36,4%
ne	91,7%	63,6%

Vidíme, že v očkované skupině onemocnělo chřipkou 8,3% lidí, v kontrolní skupině však 36,4%. Zjistíme, zda takto velký rozdíl je způsoben pouze náhodnými vlivy.

Ověříme splnění podmínek dobré aproximace, tedy nejprve vypočteme teoretické četnosti:

X onemocnění chřipkou	Y existence očkování ano	Y existence očkování ne	$n_{j.}$
ano	20	80	100
ne	220	140	360
$n_{.k}$	240	220	460

$$\frac{n_{1.}n_{.1}}{n} = \frac{100 \cdot 240}{460} = 52,17, \quad \frac{n_{1.}n_{.2}}{n} = \frac{100 \cdot 220}{460} = 47,83,$$
$$\frac{n_{2.}n_{.1}}{n} = \frac{360 \cdot 240}{460} = 187,83, \quad \frac{n_{2.}n_{.2}}{n} = \frac{360 \cdot 220}{460} = 172,17$$

Všechny teoretické četnosti jsou větší než 5, podmínky dobré aproximace jsou splněny.

Realizace testové statistiky:

$$K = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{460(20 \cdot 140 - 80 \cdot 220)^2}{100 \cdot 360 \cdot 240 \cdot 220} = 53,01.$$

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(1), \infty) = \langle \chi^2_{0,99}(1), \infty) = \langle 6,635; \infty)$.

Protože $K \in W$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,01. S rizikem omylu nejvýše 0,01 jsme tedy prokázali, že výskyt chřipky v očkované a kontrolní skupině se liší.

Nyní provedeme výpočet pomocí statistiky $T_0 = \dfrac{M_1 - M_2}{\sqrt{M_*(1-M_*)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$, která se v případě platnosti nulové hypotézy asymptoticky řídí rozložením N(0,1).

Přitom očkovaných bylo 240, z nich onemocnělo 20, neočkovaných bylo 220, z nich onemocnělo 80.

V našem případě tedy n_1 = 240, n_2 = 220, $m_1 = \frac{20}{240}$, $m_2 = \frac{80}{220}$, $m_* = \frac{20+80}{460} = \frac{5}{23}$

Ověření podmínek $n_1 \vartheta_1 (1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2 \vartheta_2 (1-\vartheta_2) > 9$: Parametry ϑ_1 a ϑ_2 neznáme, nahradíme je odhady m_1 a m_2, tedy

20.(1-20/240) = 18,333 > 9, 80.(1-80/220) = 50,909 > 9.

Realizace testového kritéria:

$$t_0 = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{m_*(1-m_*)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\frac{20}{240} - \frac{80}{220}}{\sqrt{\frac{5}{23}\left(1-\frac{5}{23}\right)\left(\frac{1}{240}+\frac{1}{220}\right)}} = -7{,}280.$$

Kritický obor je $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty) = (-\infty, -u_{0,995}\rangle \cup \langle u_{0,995}, \infty) = (-\infty, -2{,}5758\rangle \cup \langle 2{,}5758, \infty)$. Protože testové kritérium patří do kritického oboru, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Podíl šancí ve čtyřpolní kontingenční tabulce

Ve čtyřpolních tabulkách používáme charakteristiku $OR = \frac{ad}{bc}$, která se nazývá výběrový podíl šancí (odds ratio). Považujeme ho za odhad neznámého teoretického podílu šancí $\rho = \frac{\pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{12}\pi_{21}}$. Můžeme si představit, že pokus se provádí za dvojích různých okolností a může skončit buď úspěchem nebo neúspěchem.

Výsledek pokusu	okolnosti		$n_{j.}$
	I	II	
úspěch	a	b	a+b
neúspěch	c	d	c+d
$n_{.k}$	a+c	b+d	n

Poměr počtu úspěchů k počtu neúspěchů (tzv. šance) za 1. okolností je $\frac{a}{c}$, za druhých okolností je $\frac{b}{d}$. Podíl šancí je tedy

$$OR = \frac{ad}{bc}.$$

Jsou-li veličiny X, Y nezávislé, pak $\pi_{jk} = \pi_{j.}\pi_{.k}$, tudíž teoretický podíl šancí $\rho = 1$. Závislost veličin X, Y bude tím silnější, čím více se ρ bude lišit od 1. Avšak $\rho \in (0, \infty)$, tedy hodnoty ρ jsou kolem 1 rozmístěny nesymetricky. Z tohoto důvodu raději používáme logaritmus teoretického či výběrového podílu šancí.

Testování nezávislosti ve čtyřpolních tabulkách pomocí podílu šancí

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu H_0: X, Y jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny (tj. $\ln OR = 0$) proti alternativě H_1: X, Y nejsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny (tj. $\ln OR \neq 0$).

Testová statistika $T_0 = \dfrac{\ln OR}{\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}}$ se asymptoticky řídí rozložením $N(0,1)$, když nulová hypotéza platí.

Kritický obor: $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right)$.

Nulovou hypotézu tedy zamítáme na asymtotické hladině významnosti α, když se testová statistika realizuje v kritickém oboru W.

Testování nezávislosti lze provést též pomocí 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti pro logaritmus podílu šancí $\ln OR$, který je dán vzorcem:

$$(d, h) = \left(\ln OR - \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\, u_{1-\alpha/2}, \ln OR + \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\, u_{1-\alpha/2}\right)$$

Jestliže interval spolehlivosti neobsahuje 0, pak hypotézu o nezávislosti zamítneme na asymptotické hladině významnosti α.

Příklad (testování nezávislosti pomocí podílu šancí a pomocí statistiky K):

U 135 uchazečů o studium na jistou fakultu byl hodnocen dojem, jakým zapůsobili na komisi u ústní přijímací zkoušky. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že přijetí na fakultu nezávisí na dojmu u přijímací zkoušky.

přijetí	dojem		$n_{j.}$
	dobrý	špatný	
ano	17	11	28
ne	39	58	97
$n_{.k}$	56	69	125

Řešení:

a) Testování pomocí podílu šancí:

$OR = \frac{ad}{bc} = \frac{17 \cdot 58}{11 \cdot 39} = 2,298$. Podíl šancí nám říká, že uchazeč, který zapůsobil na komisi dobrým dojmem, má asi 2,3 x větší šanci na přijetí než uchazeč, který zapůsobil špatným dojmem.

Provedeme další pomocné výpočty:

$$\ln OR = 0,832,$$

$$\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} = \sqrt{\frac{1}{17}+\frac{1}{11}+\frac{1}{39}+\frac{1}{58}} = 0,439, \quad u_{0,975} = 1,96$$

Dosadíme do vzorců pro meze asymptotického intervalu spolehlivosti pro podíl šancí:

$$\ln d = \ln OR - \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\, u_{1-\alpha/2} = 0,832 - 0,439 \cdot 1,96 = -0,028, \quad \ln h = \ln OR + \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\, u_{1-\alpha/2} = 0,832 + 0,439 \cdot 1,96 = 1,692$$

Protože interval (-0,028; 1,692) obsahuje číslo 0, na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o nezávislosti dojmu u přijímací zkoušky a přijetí na fakultu.

b) Testování pomocí statistiky K:

přijetí	dojem		$n_{j.}$
	dobrý	špatný	
ano	17	11	28
ne	39	58	97
$n_{.k}$	56	69	125

Ověříme splnění podmínek dobré aproximace:

$$\frac{n_{1.}n_{.1}}{n} = \frac{28 \cdot 56}{125} = 12,54, \quad \frac{n_{1.}n_{.2}}{n} = \frac{28 \cdot 69}{125} = 15,45,$$

$$\frac{n_{2.}n_{.1}}{n} = \frac{97 \cdot 56}{125} = 43,45, \quad \frac{n_{2.}n_{.2}}{n} = \frac{97 \cdot 69}{125} = 53,54$$

Podmínky dobré aproximace jsou splněny.

Dosadíme do zjednodušeného vzorce pro testovou statistiku K:

$$K = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{125(17 \cdot 58 - 11 \cdot 39)^2}{28 \cdot 97 \cdot 56 \cdot 69} = 3,695$$

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{0,95}(1), \infty) = \langle 3,841, \infty)$.

Protože testová statistika se nerealizuje k kritickém oboru, nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Vypočteme ještě Cramérův koeficient: $V = \sqrt{\frac{K}{n(m-1)}} = \sqrt{\frac{3,6953}{125(2-1)}} = 0,171$

Vidíme, že mezi dojmem u přijímací zkoušky a přijetím na fakultu je pouze slabá závislost.

Poznámka k jednostranným alternativám:
Nulová hypotéza tvrdí, že podíl šancí je roven 1, tj. H_0: $o\rho = 1$.

Pokud víme, že za prvních okolností je šance na úspěch vyšší než za druhých okolností, pak proti nulové hypotéze postavíme pravostrannou alternativu
H_1: $o\rho > 1$.
Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α ve prospěch pravostranné alternativy, když $100(1-\alpha)\%$ empirický asymptotický levostranný interval spolehlivosti pro $\ln o\rho$ neobsahuje číslo 0.

Pokud víme, že za prvních okolností je šance na úspěch nižší než za druhých okolností, pak proti nulové hypotéze postavíme levostrannou alternativu
H_1: $o\rho < 1$.
Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α ve prospěch levostranné alternativy, když $100(1-\alpha)\%$ empirický asymptotický pravostranný interval spolehlivosti pro $\ln o\rho$ neobsahuje číslo 0.

Pokud jsou šance na úspěch stejné za prvních i druhých okolností, pak proti nulové hypotéze postavíme oboustrannou alternativu
H_1: $o\rho \neq 1$.
Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α ve prospěch oboustranné alternativy, když $100(1-\alpha)\%$ empirický asymptotický oboustranný interval spolehlivosti pro $\ln o\rho$ neobsahuje číslo 0.

Příklad: U 24 žáků 6. třídy základní školy bylo zjišťováno, zda jsou úspěšní v matematice (tj. mají na posledním vysvědčení známku 1 nebo 2 z matematiky) a zda hrají na nějaký hudební nástroj. Z 10 úspěšných matematiků 6 hrálo na nějaký hudební nástroj, kdežto ve skupině neúspěšných matematiků hrál pouze 1 žák na hudební nástroj. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že úspěch v matematice a hra na hudební nástroj jsou nezávislé veličiny. Proti nulové hypotéze postavte

a) oboustrannou alternativu, tj. tvrzení, úspěch v matematice a hra na hudební nástroj spolu souvisí,
b) pravostrannou alternativu, tj. tvrzení, že šance na úspěch v matematice jsou vyšší pro žáky, kteří hrají na nějaký hudební nástroj,
c) levostrannou alternativu, tj. tvrzení, že šance na úspěch v matematice jsou nižší pro žáky, kteří hrají na nějaký hudební nástroj.

Řešení:
Máme kontingenční tabulku

úspěch v M	hra na hudební nástroj		$n_{j.}$
	ano	ne	
ano	6	4	10
ne	1	13	14
$n_{.k}$	7	17	24

Vypočteme podíl šancí: $OR = \frac{ad}{bc} = \frac{6 \cdot 13}{4 \cdot 1} = \frac{39}{2} = 19,5$. Podíl šancí nám říká, že žák, který hraje na nějaký hudební nástroj, má 19,5 x větší šanci na úspěch v matematice než žák, který nehraje na žádný hudební nástroj.

Ad a)
Pro testování nulové hypotézy proti oboustranné alternativě sestrojíme oboustranný interval spolehlivosti:
Dolní a horní mez intervalu spolehlivosti pro ορ zjistíme pomocí STATISTIKY. Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných DM a HM a jednom případu. Do Dlouhého jména proměnné DM napíšeme vzorec pro dolní mez:
=log(19,5)-sqrt(1/6+1/4+1/1+1/13)*VNormal(0,975;0;1)
a analogicky do Do Dlouhého jména proměnné HM napíšeme vzorec pro horní mez:
=log(19,5)+sqrt(1/6+1/4+1/1+1/13)*VNormal(0,975;0;1)

	1 DM	2 HM
1	0,575	5,365

Vidíme, že 0,575093 < ln ορ < 5,365736 s pravděpodobností aspoň 0,95. Protože tento interval neobsahuje 0, nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05 ve prospěch oboustranné alternativy. S rizikem omylu nejvýše 5% se tedy prokázalo, že úspěch v matematice souvisí s hrou na hudební nástroj.

Ad b)

Pro testování nulové hypotézy proti pravostranné alternativě sestrojíme levostranný interval spolehlivosti:
Do Dlouhého jména proměnné DM napíšeme vzorec pro dolní mez:

=log(19,5)-sqrt(1/6+1/4+1/1+1/13)*VNormal(0,95;0;1)

	1 DM
1	0,960198

Protože interval (0,960198; ?) neobsahuje 0, nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05 ve prospěch pravostranné alternativy. S rizikem omylu nejvýše 5% se tedy prokázalo, že žáci, kteří hrají na nějaký hudební nástroj, mají vyšší šance na úspěch v matematice.

Ad c)

Pro testování nulové hypotézy proti levostranné alternativě sestrojíme pravostranný interval spolehlivosti:
Do Dlouhého jména proměnné HM napíšeme vzorec pro dolní mez:

=log(19,5)+sqrt(1/6+1/4+1/1+1/13)*VNormal(0,95;0;1)

	1 HM
1	4,980631

Protože interval (-? ; 4,980631) obsahuje 0, nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05 ve prospěch levostranné alternativy. Neprokázalo se tedy, že žáci, kteří hrají na nějaký hudební nástroj, mají nižší šance na úspěch v matematice.