Cvičení 5.: Parametrické úlohy
o jednom náhodném výběru z normálního rozložení

Úkol 1.: Vlastnosti výběrového průměru z normálního rozložení
Předpokládejme, že velký ročník na vysoké škole má výsledky ze statistiky normálně rozloženy kolem střední hodnoty 72 bodů se směrodatnou odchylkou 9 bodů. Najděte pravděpodobnost, že průměr výsledků náhodného výběru 10 studentů bude větší než 80 bodů.
Návod:
$X_1, ..., X_{10}$ je náhodný výběr z N(72, 81). Počítáme P(M > 80), přičemž výběrový průměr M má normální rozložení se střední hodnotou E(M) = μ = 72 a rozptylem D(M) $= \frac{\sigma^2}{n} = \frac{81}{10} =$ 8,1 (viz skripta Základní statistické metody, věta 6.1.1.1., bod 2).
Tedy P(M > 80) = 1 - P(M ≤ 80) = 1 – Φ(80), kde Φ(80) je hodnota distribuční funkce rozložení N(72; 8,1) v bodě 80.
Vytvoříme datový soubor o jedné proměnné a o jednom případu. Do Dlouhého jména této proměnné napíšeme =1 – INormal(80;72;sqrt(8,1)). Zjistíme, že 1 - Φ(80) = 0,00247005.
Funkce INormal(x;μ;σ) počítá hodnotu distribuční funkce rozložení $N(\mu,\sigma^2)$ v bodě x.

	1 Prom1
1	0,00247

Úkol 2.: Intervaly spolehlivosti pro parametry μ, σ^2 **normálního rozložení**
Z populace stejně starých selat téhož plemene bylo vylosováno šest selat a po dobu půl roku jim byla podávána táž výkrmná dieta. Byly zaznamenávány průměrné denní přírůstky hmotnosti v Dg. Z dřívějších pokusů je známo , že v populaci mívají takové přírůstky normální rozložení, avšak střední hodnota i rozptyl se měnívají. Přírůstky v Dg: 62, 54, 55, 60, 53, 58.

a) Najděte 95% empirický levostranný interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ při neznámé směrodatné odchylce σ.
b) Najděte 95% empirický interval spolehlivosti pro směrodatnou odchylku σ.

Návod:
Vytvoříme nový datový soubor o jedné proměnné X a 6 případech. Do proměnné X napíšeme dané hodnoty.
Ad a) Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme Meze spolehl. prům. (ostatní volby zrušíme) – pro jednostranný interval změníme hodnotu na 90,00 - Výpočet. (Hodnotu změníme na 90, protože dolní mez levostranného 95% intervalu spolehlivosti pro μ je stejná jako dolní mez oboustranného 95% intervalu spolehlivosti pro μ.)

	Popisné statistiky (Tabulka1)	
Proměnná	Int. spolehl. -90,000%	Int. spolehl. 90,000
X	54,05683	59,94317

Vidíme, že μ > 54,06 Dg s pravděpodobností aspoň 0,95.

Ad b) Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme Meze sp. směr. odch., ponecháme implicitní hodnotu 95,00 – Výpočet.

Proměnná	Popisné statistiky (Tabulka1) Spolehlivost Sm.Odch. -95,000%	Spolehlivost Sm.Odch. +95,000%
X	2,233234	8,774739

Dostáváme výsledek: 2,23 g < σ < 8,77 g s pravděpodobností aspoň 0,95.

Úkol 3.: Testování hypotézy o parametru μ normálního rozložení

Systematická chyba měřicího přístroje se eliminuje nastavením přístroje a měřením etalonu, jehož správná hodnota je $\mu = 10{,}00$. Nezávislými měřeními za stejných podmínek byly získány hodnoty: 10,24 10,12 9,91 10,19 9,78 10,14 9,86 10,17 10,05, které považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 9 z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$. Je možné při riziku 0,05 vysvětlit odchylky od hodnoty 10,00 působením náhodných vlivů?

Návod:

Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu H_0: $\mu = 10$ proti oboustranné alternativě H_1: $\mu \neq 10$. Jde o úlohu na jednovýběrový t-test. Ten je ve STATISTICE implementován. Vytvoříme datový soubor o jedné proměnné a devíti případech, kam zapíšeme naměřené hodnoty. V Základních statistikách/tabulkách vybereme t-test, samostatný vzorek. Do Referenčních hodnot zapíšeme 10. Ve výstupu se podíváme na hodnotu testového kritéria a na p-hodnotu. Pokud p-hodnota bude menší nebo rovna 0,05, zamítneme hypotézu H_0: $\mu = 10$ ve prospěch oboustranné alternativní hypotézy H_1: $\mu \neq 10$ na hladině významnosti 0,05.
V opačném případě H_0 nezamítáme. V našem případě je

Proměnná	Test průměrů vůči referenční konstantě (hodnotě) Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Referenční konstanta	t	SV	p
Prom1	10,05111	0,162669	9	0,054223	10,00000	0,942611	8	0,373470

Protože p-hodnota 0,373470 > 0,05 nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05. S rizikem omylu nejvýše 5% lze tedy odchylky od hodnoty 10 vysvětlit působením náhodných vlivů.
Všimněme si ještě hodnoty testového kriteria: $t_0 = 0{,}942611$. Kritický obor

$$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty\right) = \left(-\infty, -t_{0,975}(8)\right\rangle \cup \left\langle t_{0,975}(8), \infty\right) =$$
$$= \left(-\infty, -2{,}306\right\rangle \cup \left\langle 2{,}306, \infty\right)$$

Protože $t_0 \notin W$, nezamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu H_0.

Úkol 4.: Interval spolehlivosti pro rozdíl parametrů μ_1 - μ_2 dvourozměrného rozložení
Bylo vylosováno 6 vrhů selat a z nich vždy dva sourozenci. Jeden z nich vždy dostal náhodně dietu č. 1 a druhý dietu č. 2. Přírůstky v Dg jsou následující: (62,52), (54,56), (55,49), (60,50), (53,51), (58,50). Za předpokladu, že rozdíly uvedených dvojic tvoří náhodný výběr z normálního rozložení se střední hodnotou μ_1 - μ_2, sestrojte 95% interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot.
Návod:
Vytvoříme datový soubor o třech proměnných a šesti případech. Do proměnných v1 a v2 zapíšeme naměřené přírůstky, do proměnné v3 uložíme rozdíly v1 - v2.
Ve STATISTICE je implementován výpočet oboustranného intervalu spolehlivosti pro μ, když σ^2 neznáme. Pomocí Popisných statistik zjistíme meze 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu proměnné v3 tak, že zaškrtneme Meze spoleh. prům.

	Popisné statistiky	
Proměnná	Int. spolehl. -95,000%	Int. spolehl. +95,000%
Prom3	0,626461	10,70687

Dostaneme výsledek: 0,63 Dg < μ < 10,71 Dg s pravděpodobností aspoň 0,95.

Úkol 5.: Testování hypotézy o rozdíl parametrů μ_1 - μ_2 dvourozměrného rozložení
Pro data z úkolu 4. testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že obě výkrmné diety mají stejný vliv.
Návod:
Označme $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu H_0: $\mu = 0$ proti oboustranné alternativě H_1: $\mu \neq 0$. Jde o úlohu na párový t-test. Ten je ve STATISTICE implementován.Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných a šesti případech. Do proměnných v1 a v2 zapíšeme naměřené přírůstky. V menu Základní statistiky/tabulky vybereme t-test, závislé vzorky. Zadáme názvy obou proměnných a ve výstupu se podíváme na hodnotu testového kritéria a na p-hodnotu.

	t-test pro závislé vzorky Označ. rozdíly jsou významné na hlad. p < ,05000							
Proměnná	Průměr	Sm.odch.	N	Rozdíl	Sm.odch. rozdílu	t	sv	p
Prom1	57,00000	3,577709						
Prom2	51,33333	2,503331	6	5,666667	4,802777	2,890087	5	0,034183

Protože p-hodnota 0,034183 < 0,05, zamítáme hypotézu H_0: $\mu = 0$ ve prospěch alternativní hypotézy H_1: $\mu \neq 0$ na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že jsme s rizikem omylu nejvýše 5% prokázali rozdíl v účinnosti obou výkrmných diet.
Všimněme si ještě hodnoty testového kriteria: $t_0 = 2,890087$. Kritický obor

$$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty\right) = \left(-\infty, -t_{0,975}(5)\right\rangle \cup \left\langle t_{0,975}(5), \infty\right) =$$
$$= \left(-\infty, -2,5706\right\rangle \cup \left\langle 2,5706, \infty\right)$$

Protože $t_0 \in W$, zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu H_0.

Příklady k samostatnému řešení

Příklad 1.: Měřením délky deseti válečků byly získány hodnoty (v mm): 5,38 5,36 5,35 5,40 5,41 5,34 5,29 5,43 5,42 5,32. Těchto deset hodnot považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 10 z normálního rozložení $N(\mu, \sigma^2)$.

a) Sestrojte 99% interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ
b) Sestrojte 99% interval spolehlivosti pro neznámou směrodatnou odchylku σ.
c) Na hladině významnosti 0,01 testujte hypotézu, že střední hodnota délky válečků je 5,3 mm proti oboustranné alternativě.

Výsledky:
ad a)
5,3228 mm < μ < 5,4172 mm s pravděpodobností aspoň 0,99
ad b)
0,0284 mm < σ < 0,1046 mm s pravděpodobností aspoň 0,99.
ad c) Testujeme H_0: $\mu = 5{,}3$ proti H_1: $\mu \neq 5{,}3$ na hladině významnosti 0,01. Nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0,01 a přijímáme alternativní hypotézu.

Příklad 2.: Bylo náhodně vybráno 15 desetiletých chlapců a byla zjištěna jejich výška (v cm). Výsledky měření 130, 140, 136, 141, 139, 133, 149, 151, 139, 136, 138, 142, 127, 139, 147 považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 15 z rozložení $N(\mu,\sigma^2)$. Podle názoru odborníků by střední hodnoty výšky desetiletých chlapců měla být 136,1 cm. Testujte tuto hypotézu na hladině významnosti 0,05.
Pomocí N-P plotu a S-W testu ověřte normalitu dat.

Výsledky:
S-W test poskytl p-hodnotu 0,7998, tedy hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Dále testujeme H_0: $\mu = 136{,}1$ proti H_1: $\mu \neq 136{,}1$ na hladině významnosti 0,05. Protože $p = 0{,}0947 > 0{,}05$, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Příklad 3.: Pět mužů se rozhodlo, že budou hubnout. Zjistili svou hmotnost před zahájením diety a po ukončení diety.

Číslo osoby	1	2	3	4	5
Hmotnost před dietou	84	77,5	91,5	84,5	97,5
Hmotnost po dietě	78,5	73,5	88,5	80	97

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že dieta neměla vliv na hmotnost.

Výsledky:
Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$. Testová statistika nabývá hodnoty 4,1105, odpovídající p-hodnota je 0,0147, tedy nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0,05. S rizikem omylu nejvýše 5% jsme tedy prokázali, že dieta má vliv na střední hodnotu hmotnosti.