Řízené homogenní markovské řetězce

Příklad 1.: Je sledována výrobní linka, která se může nacházet buď v provozu (stav 0) nebo v opravě (stav 1). Ve stavu 0 je možný provoz „bez kontroly agregátů“ (strategie 1) nebo „s kontrolou agregátů“ (strategie 2). Ve stavu 1 je možno rozlišit opravu „bez výměny agregátů“ (strategie 1) nebo „s výměnou agregátů“ (strategie 2). Matice přechodu a matice výnosů jsou následující:

$$^{1}P=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix},\ ^{1}R=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -5\end{pmatrix},\ ^{2}P=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix},\ ^{2}R=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}.$$

Pro první tři kroky najděte maximální střední hodnotu celkového výnosu a optimální strategii.

Řešení:

$$^{1}q_0={}^{1}p_{00}\,{}^{1}r_{00}+{}^{1}p_{01}\,{}^{1}r_{01}=0{,}5\cdot 2+0{,}5\cdot 0=1,\ ^{1}q_1={}^{1}p_{10}\,{}^{1}r_{10}+{}^{1}p_{11}\,{}^{1}r_{11}=0{,}2\cdot 1+0{,}8\cdot(-5)=-0{,}2$$

$$^{2}q_0={}^{2}p_{00}\,{}^{2}r_{00}+{}^{2}p_{01}\,{}^{2}r_{01}=0{,}4\cdot 3+0{,}6\cdot 1=1{,}8,\ ^{2}q_1={}^{2}p_{10}\,{}^{2}r_{10}+{}^{2}p_{11}\,{}^{2}r_{11}=0{,}4\cdot 2+0{,}6\cdot(-2)=-0{,}4$$

$$^{1}\mathbf{q}=\begin{pmatrix}1\\ -0{,}2\end{pmatrix},\ ^{2}\mathbf{q}=\begin{pmatrix}1{,}8\\ -0{,}4\end{pmatrix}$$

$$v_0(1)=\max\{1;1{,}8\}=1{,}8\Rightarrow d_0^{*}(1)=2,\ v_1(1)=\max\{-0{,}2;-0{,}4\}=-0{,}2\Rightarrow d_1^{*}(1)=1$$

$$v_0(2)=\max\{^{1}q_0+{}^{1}p_{00}v_0(1)+{}^{1}p_{01}v_1(1);\ ^{2}q_0+{}^{2}p_{00}v_0(1)+{}^{2}p_{01}v_1(1)\}=$$
$$=\max\{1+0{,}5\cdot 1{,}8+0{,}5\cdot(-0{,}2);1{,}8+0.4\cdot 1{,}8+0{,}6\cdot(-0{,}2)\}=\max\{1{,}8;2{,}4\}=2{,}4\Rightarrow d_0^{*}(2)=2$$
$$v_1(2)=\max\{^{1}q_1+{}^{1}p_{10}v_0(1)+{}^{1}p_{11}v_1(1);\ ^{2}q_1+{}^{2}p_{10}v_0(1)+{}^{2}p_{11}v_1(1)\}=$$
$$=\max\{-0{,}2+0{,}2\cdot 1{,}8+0{,}8\cdot(-0{,}2);-0{,}4+0.4\cdot 1{,}8+0{,}6\cdot(-0{,}2)\}=\max\{0;0{,}2\}=0{,}2\Rightarrow d_1^{*}(2)=2$$

$$v_0(3)=\max\{^{1}q_0+{}^{1}p_{00}v_0(2)+{}^{1}p_{01}v_1(2);\ ^{2}q_0+{}^{2}p_{00}v_0(2)+{}^{2}p_{01}v_1(2)\}=$$
$$=\max\{1+0{,}5\cdot 2{,}4+0{,}5\cdot 0{,}2;1{,}8+0.4\cdot 2{,}4+0{,}6\cdot 0{,}2\}=\max\{2{,}3;2{,}88\}=2{,}88\Rightarrow d_0^{*}(3)=2$$
$$v_1(3)=\max\{^{1}q_1+{}^{1}p_{10}v_0(2)+{}^{1}p_{11}v_1(2);\ ^{2}q_1+{}^{2}p_{10}v_0(2)+{}^{2}p_{11}v_1(2)\}=$$
$$=\max\{-0{,}2+0{,}2\cdot 2{,}4+0{,}8\cdot 0{,}2;-0{,}4+0.4\cdot 2{,}4+0{,}6\cdot 0{,}2\}=\max\{0{,}44;0{,}68\}=0{,}68\Rightarrow d_1^{*}(3)=2$$

Závěr: V prvním kroku je vektor optimálních strategií $\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$, ve druhém a třetím kroku $\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$.

Návod na řešení v MATLABu:

Zadáme matice $^{1}\mathbf{P}$, $^{1}\mathbf{R}$, $^{2}\mathbf{P}$, $^{2}\mathbf{R}$:

P1=[0.5 0.5;0.2 0.8]; R1=[2 0;1 -5]; P2=[0.4 0.6;0.4 0.6]; R2=[3 1;2 -2];

Vypočteme pomocné matice Q1=P1*R1’; Q2=P2*R2’;

Diagonála matice Q1 je vektor q1=diag(Q1)

Diagonála matice Q2 je vektor q2=diag(Q2)

Vypočteme vektor v1=max(q1,q2)

(Protože první složka vektoru v1 odpovídá první složce vektoru q2, znamená to, že když je linka v provozu, je optimální strategie v 1. kroku strategie 2.

Protože druhá složka vektoru v1 odpovídá druhé složce vektoru q1, znamená to, že když je linka v opravě, je optimální strategie v 1. kroku strategie 1.)

Spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 2. kroku pro strategii 1, je-li linka v provozu:

v2_provoz_s1= q1(1)+P1(1,1)*v1(1)+P1(1,2)*v1(2)

a totéž pro strategii 2:

v2_provoz_s2= q2(1)+P2(1,1)*v1(1)+P2(1,2)*v1(2)
Dále spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 2. kroku pro strategii 1, je-li linka v opravě:
v2_oprava_s1= q1(2)+P1(2,1)*v1(1)+P1(2,2)*v1(2)
a totéž pro strategii 2:
v2_oprava_s2= q2(2)+P2(2,1)*v1(1)+P2(2,2)*v1(2)
Vypočítáme vektor v2:
v2=[max(v2_provoz_s1, v2_provoz_s2); max(v2_oprava_s1, v2_oprava_s2)]
(Vidíme, že první složka vektoru v2 odpovídá strategii 2 a druhá složka rovněž.)
Spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 3. kroku pro strategii 1, je-li linka v provozu:
v3_provoz_s1= q1(1)+P1(1,1)*v2(1)+P1(1,2)*v2(2)
a totéž pro strategii 2:
v3_provoz_s2= q2(1)+P2(1,1)*v2(1)+P2(1,2)*v2(2)
Dále spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 3. kroku pro strategii 1, je-li linka v opravě:
v3_oprava_s1= q1(2)+P1(2,1)*v2(1)+P1(2,2)*v2(2)
a totéž pro strategii 2:
v3_oprava_s2= q2(2)+P2(2,1)*v2(1)+P2(2,2)*v2(2)
Vypočítáme vektor v3:
v3=[max(v3_provoz_s1, v3_provoz_s2); max(v3_oprava_s1, v3_oprava_s2)]
(Vidíme, že první složka vektoru v3 odpovídá strategii 2 a druhá složka rovněž.)

Upozornění: Uvedené řešení je pouze jedním z možných, zajisté lze vytvořit lepší.

Příklad 2.: Závod produkuje nějaký spotřební výrobek, u něhož lze rozeznat dva stavy: stav 0 – výrobek je úspěšný s dobrým odbytem a cenou, stav 1 – výrobek je neúspěšný, odbyt vázne a cena je nízká. Při 1. strategii vedení závodu neinvestuje ani do technického rozvoje ani do reklamy. Při této strategii je matice přechodu ${}^1\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ a matice výnosů ${}^1\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$. Při 2. strategii vedení závodu zajistí technický rozvoj a investuje do reklamy. Matice přechodu: ${}^2\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$, matice výnosů: ${}^2\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -19 \end{pmatrix}$. (Při 2. strategii se vyšší náklady promítnou do zisku, proto výnos ${}^2r_{00}$ musí být nižší než ${}^1r_{00}$, stejně tak ${}^2r_{11}$ musí být nižší než ${}^1r_{11}$.) Pomocí iterační metody je třeba zjistit, jakou strategii doporučit vedení závodu, aby střední hodnota celkového výnosu byla maximální.

Řešení: Nejprve vypočítáme vektory ${}^1\mathbf{q} = ({}^1q_0, {}^1q_1)$ a ${}^2\mathbf{q} = ({}^2q_0, {}^2q_1)$.

$${}^1q_0 = {}^1p_{00}\,{}^1r_{00} + {}^1p_{01}\,{}^1r_{01} = 0{,}5 \cdot 9 + 0{,}5 \cdot 3 = 6, {}^1q_1 = {}^1p_{10}\,{}^1r_{10} + {}^1p_{11}\,{}^1r_{11} = 0{,}4 \cdot 3 + 0{,}6 \cdot (-7) = -3$$

$${}^2q_0 = {}^2p_{00}\,{}^2r_{00} + {}^2p_{01}\,{}^2r_{01} = 0{,}8 \cdot 4 + 0{,}2 \cdot 4 = 4, {}^2q_1 = {}^2p_{10}\,{}^2r_{10} + {}^2p_{11}\,{}^2r_{11} = 0{,}7 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot (-19) = -5$$

${}^1\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ (6, -3), ${}^2\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

1. iterace: zvolíme $d_0(1) = 1$, $d_1(1) = 1$ a vyřešíme systém rovnic (přitom položíme $v_1 = 0$)

$$g + v_0 = {}^1q_0 + {}^1p_{00}v_0 + {}^1p_{01}v_1 : g + v_0 = 6 + 0{,}5 \cdot v_0$$

$$g + v_1 = {}^1q_1 + {}^1p_{10}v_0 + {}^1p_{11}v_1 : g = -3 + 0{,}4 \cdot v_0$$

Řešením tohoto systému obdržíme $v_0 = 10$, $g = 1$.
2. iterace:
i = 0, k = 1: ${}^1q_0 + {}^1p_{00}v_0 + {}^1p_{01}v_1 = 6 + 0{,}5 \cdot 10 = 11$

k = 2: ${}^2q_0 + {}^2p_{00}v_0 + {}^2p_{01}v_1 = 4 + 0{,}8 \cdot 10 = 12$

max{11, 12} = 12, tedy $d_0(2) = 2$
i = 1, k = 1: ${}^1q_1 + {}^1p_{10}v_0 + {}^1p_{11}v_1 = -3 + 0{,}4 \cdot 10 = 1$

k = 2: ${}^2q_1 + {}^2p_{10}v_0 + {}^2p_{11}v_1 = -5 + 0{,}7 \cdot 10 = 2$

max{1, 2} = 2, tedy $d_1(2) = 2$
Výsledek 2. iterace dává vektor strategií (2, 2).

S tímto vektorem vyřešíme systém rovnic (přitom položíme $v_1 = 0$)

$g + v_0 = {}^2q_0 + {}^2p_{00}v_0 + {}^2p_{01}v_1 : g + v_0 = 4 + 0{,}8 \cdot v_0$

$g + v_1 = {}^2q_1 + {}^2p_{10}v_0 + {}^2p_{11}v_1 : g = -5 + 0{,}7 \cdot v_0$

Řešením tohoto systému obdržíme $v_0 = 10$, $g = 2$.

3. iterace:
i = 0, k = 1: ${}^1q_0 + {}^1p_{00}v_0 + {}^1p_{01}v_1 = 6 + 0{,}5 \cdot 10 = 11$

k = 2: ${}^2q_0 + {}^2p_{00}v_0 + {}^2p_{01}v_1 = 4 + 0{,}8 \cdot 10 = 12$

max{11, 12} = 12, tedy $d_0(3) = 2$
i = 1, k = 1: ${}^1q_1 + {}^1p_{10}v_0 + {}^1p_{11}v_1 = -3 + 0{,}4 \cdot 10 = 1$

k = 2: ${}^2q_1 + {}^2p_{10}v_0 + {}^2p_{11}v_1 = -5 + 0{,}7 \cdot 10 = 2$

max{1, 2} = 2, tedy $d_1(3) = 2$
Výsledek 3. iterace dává vektor strategií (2, 2).

Protože ve dvou po sobě jdoucích iteracích jsme dostali stejný vektor strategií, výpočet končí.
Interpretace: Kromě počátečního kroku přinese větší zisk ta strategie, která zahrnuje náklady na technický rozvoj a reklamu výrobku.
Návod na řešení v MATLABu:
Použít funkci howard.m (vytvořil Pavel Mizera) – uložena v ISu v Učebních materiálech.

Příklad k samostatnému řešení:
Uvažujme provoz stroje, který může být buď v provozu (stav 0) nebo v poruše (stav 1). Ve stavu 0 můžeme volit alternativu „bez preventivní údržby“ (strategie 1) nebo „s preventivní údržbou“ (strategie 2). Ve stavu 1 můžeme volit buď alternativu „běžná oprava“ (strategie 1) nebo „speciální oprava“ (strategie 2). Matice přechodu a matice výnosů jsou následující:

$${}^1P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}, {}^1R = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, {}^2P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}, {}^2R = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Pro první tři kroky najděte maximální střední hodnotu celkového výnosu a optimální strategii.
S využitím funkce howard.m najděte takový vektor strategií, který maximalizuje střední hodnotu celkového výnosu.

Výsledek: $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix},\ d^*_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 9{,}7 \\ 4{,}8 \end{pmatrix},\ d^*_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 13{,}43 \\ 8{,}52 \end{pmatrix},\ d^*_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Funkce howard.m poskytne optimální vektor strategií $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.