

## Systémy hromadné obsluhy s neomezenou kapacitou

### 1. Systém M/M/1/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem  $\lambda$ , doba obsluhy se řídí rozložením  $Ex(\mu)$ , v systému je 1 linka obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen“.

Podíl  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  se nazývá intenzita provozu. Systém se může stabilizovat, pokud

$$\rho < 1.$$

Stacionární rozložení:  $a_j = \rho^j(1 - \rho)$ ,  $j = 0, 1, \dots$

Počet  $N$  zákazníků ve stabilizovaném systému se tedy řídí rozložením  $Ge(1 - \rho)$ .

#### Charakteristiky stabilizovaného systému:

Střední hodnota počtu zákazníků v systému:  $E(N) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ .

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě:  $E(N_Q) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$ .

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků:  $E(N_s) = \frac{\lambda}{\mu}$ .

Střední hodnota doby strávené v systému:  $E(W) = \frac{1}{\mu - \lambda}$ .

Střední hodnota doby strávené ve frontě:  $E(W_Q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$ .

Střední hodnota doby obsluhy:  $E(W_s) = \frac{1}{\mu}$ .

Pravděpodobnost, že zákazník najde volnou linku =  $1 - \frac{\lambda}{\mu}$ .

Pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve frontě =  $\frac{\lambda}{\mu}$ .

```

function[a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi);
% [a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi)
% Vypočítá prvek a0 stacionárního rozložení, intenzitu provozu
% a charakteristiky systému hromadné obsluhy M|M|1|Inf|FIFO.
% Vstupní parametry:
% lambda .... parametr vstupního proudu, mi ..... parametr obsluhy
% Výstupní parametry:
% a0 ..... pst, že v systému nebude žádný zákazník
% ro ..... intenzita provozu
% ENS ..... střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků
% ENQ ..... střední hodnota počtu zákazníků ve frontě
% EN ..... střední hodnota počtu zákazníků v systému
% EWS ..... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví obsluhou
% EWQ ..... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví ve frontě
% EW ..... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví v systému
ro=lambda/mi;
if ro<1
    a0=1-ro;
    ENS=ro;
    ENQ=lambda^2/(mi*(mi-lambda));
    EN=lambda/(mi-lambda);
    EW=1/(mi-lambda);
    EWS=1/mi;
    EWQ=lambda/(mi*(mi-lambda));
else
    error('Systém se nemůže stabilizovat. Intenzita provozu je větší než 1.')
end;

```

**Příklad 1.:** K ortopedovi přichází v průměru 16 pacientů za 8 h jeho pracovní doby. Pacient je v průměru ošetřen za 20 min.

Předpokládáme, že vstupní proud pacientů je Poissonův proces a doba ošetření se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se systém může stabilizovat. Pokud ano, vypočtěte všechny jeho charakteristiky.

**Řešení:**  $\lambda = 2, \mu = 3, \rho = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$  systém se může stabilizovat

Ortoped je využit na 66,6%.

Pravděpodobnost, že pacient nebude čekat:  $a_0 = 1 - \rho = 0,3$

$E(W) = 1$  h,  $E(W_Q) = 40$  min,  $E(W_S) = 20$  min

$E(N) = 2$  osoby,  $E(N_Q) = 1\frac{1}{3}$  osoby,  $E(N_S) = \frac{2}{3}$  osoby

**Návod na řešení pomocí MATLABu:**

lambda=2;mi=3;

[a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny\_1(lambda,mi)

**Příklad 2.:** Do pokladny na železniční stanici přichází v průměru 1 zákazník za 2 minuty. Obsluha trvá v průměru 1 minutu.

Předpokládáme, že vstupní proud zákazníků je Poissonův proces a doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se systém může stabilizovat. Pokud ano, řešte následující úkoly:

- a) Na kolik % je pokladna využita?
- b) Jaká je pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve frontě?
- c) Jaká je střední hodnota doby pobytu v systému, ve frontě a doby obsluhy?
- d) Jaká je střední hodnota počtu zákazníků v systému, ve frontě, u pokladny?

Úlohy řešte pomocí funkce neomezeny\_1.m.

**Výsledek:** Systém se může stabilizovat.

Ad a) Pokladna je využita na 50 %.

Ad b) Pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve frontě, je 0,5.

Ad c)  $E(W) = 2 \text{ min}$ ,  $E(W_Q) = 1 \text{ min}$ ,  $E(W_S) = 1 \text{ min}$

Ad d)  $E(N) = 1 \text{ osoba}$ ,  $E(N_Q) = 0,5 \text{ osoby}$ ,  $E(N_S) = 0,5 \text{ osoby}$

## 2. Systém M/M/n/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem  $\lambda$ , doba obsluhy se řídí rozložením  $Ex(\mu)$ , v systému je  $n$  linek obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen“.

Označme  $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$ . Podíl  $\rho = \frac{\beta}{n}$  se nazývá intenzita provozu. Systém se může stabilizovat, pokud  $\rho < 1$ .

Stacionární rozložení:  $a_j = \begin{cases} \frac{\beta^j}{j!} a_0 & \text{pro } j = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\beta^j}{n! n^{j-n}} a_0 & \text{pro } j = n + 1, n + 2, \dots \end{cases}$ , kde

$$a_0 = \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)} \right]^{-1}$$

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě:

$$P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)}$$

### Charakteristiky stabilizovaného systému:

Střední hodnota počtu zákazníků v systému:  $E(N) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho} + n\rho$ .

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě:  $E(N_Q) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$ .

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků:  $E(N_s) = n\rho$ .

Střední hodnota doby strávené v systému:  $E(W) = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$ .

Střední hodnota doby strávené ve frontě:  $E(W_Q) = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$ .

Střední hodnota doby strávené obsluhou:  $E(W_s) = \frac{1}{\mu}$ .

Využití systému:  $\kappa = \rho$ .

```

function[a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi);
% [a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi)
%
% Vypočítá prvek a0 stacionárního rozložení, intenzitu provozu
% a charakteristiky systému hromadné obsluhy M|M|n|Inf|FIFO.
%
% Vstupní parametry:
% n ..... počet linek obsluhy,
% lambda .... parametr vstupního proudu,
% mi ..... parametr obsluhy
%
% Výstupní parametry:
% a0 ..... pst, že v systému nebude žádný zákazník
% ro ..... intenzita provozu (využití systému)
% PQ ..... pst, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě
% ENS ..... střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků
% ENQ ..... střední hodnota počtu zákazníků ve frontě
% EN ..... střední hodnota počtu zákazníků v systému
% EWS ..... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví obsluhou
% EWQ ..... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví ve frontě
% EW ..... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví v systému

beta=lambda/mi;
ro=beta/n;
if ro<1
    a0=inv(sum(beta.^(0:n-1)/factorial(0:n-1))+n*beta^n/factorial(n)/(n-beta));
    PQ=a0*beta^n/(factorial(n)*(1-ro));
    ENS=n*ro;
    ENQ=PQ*ro/(1-ro);
    EN=ENQ+ENS;
    EWS=1/mi;
    EWQ=PQ*ro/(lambda*(1-ro));
    EW=EWS+EWQ;
else
    error('Systém se nemůže stabilizovat. Intenzita provozu je větší než 1.')
end;

```

**Příklad 3.:** K benzínové stanici se dvěma čerpadly přijíždí každých 80 sekund jedno auto, přičemž průměrná doba čerpání je 2 min 30 s. Za předpokladu, že příjezdy aut tvoří Poissonův proces, doba čerpání se řídí exponenciálním rozložením a systém se může stabilizovat (ověřte!), vypočtete

- pravděpodobnost, že u čerpací stanice budou právě dvě auta
- střední hodnotu počtu obsazených stojanů
- střední hodnotu doby, kterou řidič stráví u čerpací stanice.

**Řešení:**  $n = 2$ ,  $\lambda = \frac{3600}{80} = 45$ ,  $\mu = \frac{1}{2,5} = \frac{600}{25} = 24$ ,  $\beta = \frac{45}{24} = \frac{15}{8}$ ,  $\rho = \frac{\beta}{n} = \frac{15}{16} < 1 \Rightarrow$  systém

se může stabilizovat

$$\text{ad a) } a_0 = \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)} \right]^{-1} = \left[ 1 + \frac{15}{8} + \frac{2\left(\frac{15}{8}\right)^2}{2\left(2 - \frac{15}{8}\right)} \right]^{-1} = \frac{8}{248} = \frac{1}{31} = 0,0323$$

$$a_2 = \frac{\beta^2}{2!} a_0 = \left(\frac{15}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{31} = \frac{225}{3968} = 0,0567$$

$$\text{ad b) } E(N_s) = n\rho = 2 \frac{15}{16} = \frac{15}{8} = 1,875$$

ad e)

$$P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)} = \frac{1}{31} \cdot \frac{64}{\frac{1}{8}} = \frac{225}{248}$$

$$E(W) = P_Q \frac{\rho}{(1-\rho)\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{225}{248} \cdot \frac{\frac{15}{16}}{\left(1 - \frac{15}{16}\right) \cdot 45} + \frac{1}{24} = \frac{32}{93} = 0,344 \text{ h} = 20 \text{ min } 38 \text{ s}$$

**Návod na řešení pomocí MATLABu:**

lambda=45;mi=24;n=2;

[a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny\_n(n,lambda,mi)

**Příklad 4.:** V laboratoři pracují 3 laborantky. V průměru přichází do laboratoře 15 požadavků za 1 h. Zpracování 1 požadavku trvá v průměru 10 min. Předpokládáme, že vstupní proud požadavků je Poissonův proces a doba zpracování 1 požadavku se řídí exponenciálním rozložením.

- a) Může se systém stabilizovat?
- b) Jaký je průměrný počet požadavků čekajících na zpracování?
- c) Jaká je průměrná doba, která uplyne od předání požadavku po jeho zpracování?

Úlohy řešte pomocí funkce neomezeny\_n.m.

**Výsledek:**

Ad a) Systém se může stabilizovat.

Ad b) Průměrný počet požadavků čekajících na zpracování je 3,51.

Ad c) Průměrná doba, která uplyne od předání požadavku po jeho zpracování, činí 24 min.