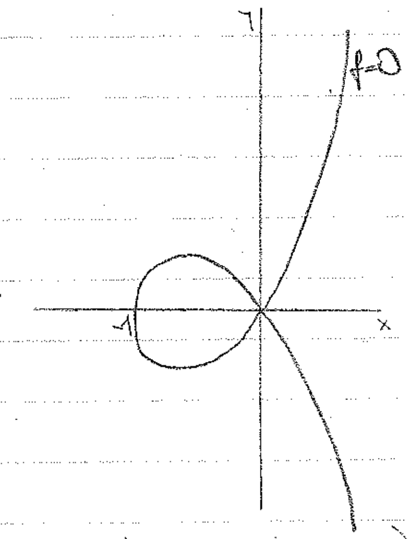
Algebr. geom.

Materiály: přednáška
Klaus Hulek - Elementary algebraic geometry

Algebraická geometrie zkoumá mn. řešení algebraických (polynomiálních) rovnic resp. soustav rovnic.

lineární ... affinní geom.
kvadratické ... nadkvadriky



Př. Descartův list ... $f(x,y) = x^2 + x^3 - y^2 = 0$ v $\mathbb{R}^2$

parametrizace křivky $y = tx$

$$x^2 + x^3 - t^2x^2 = 0$$
$$x^2 \cdot (1 + x - t^2) = 0$$

(počátek je dvojnásob. kořenem)

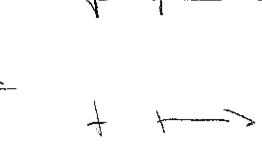
$$x = t^2 - 1 \qquad y = tx = t(t^2-1)$$

Parametrizace: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$t \longmapsto (t^2-1,\ t(t^2-1))$$

Zúžením parametrizace na $t \in \mathbb{Q}$ dostáváme právě všechna racionální řešení rovnice $f(x,y) = 0$

Racionální křivka: existuje parametrizace pomocí racionálních lomených funkcí

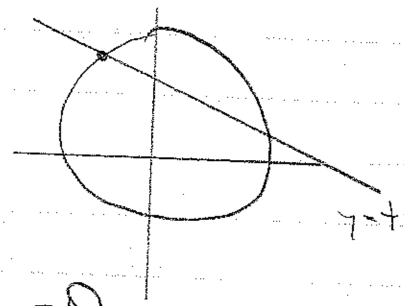
$$t \longmapsto \left(\frac{p(t)}{q(t)},\ \frac{r(t)}{s(t)}\right) \qquad p, q, r, s \in \mathbb{R}[t]$$



$t \longmapsto (t, \frac{1}{t})$ bez lomených bychom museli vzít

Racionální parametrizace kružnice (kuželosečky)

$$x^2+y^2-1=0$$



$y=tx+1 \quad ((y-y_0)=t(x-x_0)+1)$

$$x^2+(tx+1)^2-1=0$$
$$x^2+t^2x^2+2tx=0$$
$$x((t^2+1)x+2t)=0 \qquad (x-x_0)(A(t)x+B(t))$$

$$x=-\frac{2t}{t^2+1} \qquad x=-\frac{B(t)}{A(t)}$$

$$y=\frac{1-t^2}{t^2+1}$$

Pythagorejské trojice $(\underset{a}{-2t}, \underset{b}{1-t^2}, \underset{c}{1+t^2})$

(mezi a,b,c v $\mathbb{Z}$ a v $\mathbb{Q}$ je vzáj. koresp.)

$x^n+y^n-1=0$ není racionální pro $n>2$

Důkaz: Předp., že $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ je racionální parametrizace

$$\varphi(t)=\frac{p(t)}{r(t)}, \quad \psi(t)=\frac{q(t)}{r(t)} \qquad p,q,r \text{ polynomy}$$

Předp. $NSD(p,q,r)=1$. Platí $p(t)^n+q(t)^n-r(t)^n=0$

Derivací dostaneme (a dělením n):

$$p(t)^{n-1}p'(t)+q(t)^{n-1}q'(t)-r(t)^{n-1}r'(t)=0$$

Tedy $(p^{n-1},q^{n-1},r^{n-1})$ je řešením sous. lin. rovnic (nad $\mathbb{R}[x]$) s maticí $\begin{pmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \end{pmatrix}$.

Jedno z řešení je $(qr'-rq', rp'-pr', pq'-qp')$

Protože $(p^{n-1}, q^{n-1}, -r^{n-1})$ je rovněž řešením, navíc $NSD(\text{—} n \text{—}) = 1$, musí platit:

$$p^{n-1} \mid qr' - rq'$$

$$q^{n-1} \mid rp' - pr'$$

$$r^{n-1} \mid pq' - qp'$$

$qr' - rq' = 0 \Rightarrow \frac{qr' - rq'}{q^2} = \left(\frac{r}{q}\right)' = 0$ což nelze

tedy determinant soust. $\neq 0$

$qr' - rq' = \frac{\det}{q} p^{n-1}$

$rp' - pr' = \frac{\det}{q} q^{n-1}$

$pq' - qp' = \frac{\det}{q} r^{n-1}$

Můžeme předp. $NSD(p, q) = 1$

$\Rightarrow q \mid p^{n-1}, q^{n-1}, r^{n-1}$

$q \mid NSD(p^{n-1}, q^{n-1}, r^{n-1}) = 1$

$\Rightarrow q$ je konstantní

$\operatorname{st} p = a, \quad \operatorname{st} q = b, \quad \operatorname{st} r = c$

$(n-1) \operatorname{st} p \leq \operatorname{st}(qr' - rq') \leq \operatorname{st} q + \operatorname{st} r - 1$

$$\left.\begin{aligned} (n-1)a &\leq b + c - 1 \\ (n-1)b &\leq a + c - 1 \\ (n-1)c &\leq b + a - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} (n-1)d &\leq 2d - 3 \\ (n-3)d &\leq -3 \end{aligned}$$

$$n - 3 < 0 \Rightarrow n < 3 \qquad \square$$

Polynomy

A … okruh - komutativní s jedničkou

$A[x]$ … komutativní okruh polynomů s jedničkou

A obor integrity $\Rightarrow A[x]$ obor integrity

$$A[x_1, \dots, x_n] \cong (A[x_1, \dots, x_{n-1}])[x_n]$$

Podílové těleso $A[x_1, \dots, x_n]$ se značí $A(x_1, \dots, x_n)$, je to těleso racionálních fcí

Věta: A UFD $\Rightarrow A[x]$ UFD

(okruh s jednoznačným rozkladem)

unique factorization domain

Bezoutova rovnost: nechť K je těleso, $f, g \in K[x]$. Pak $\exists$ $A, B \in K[x]$ tak, že
$$NSD(f,g) = Af + Bg$$

Rezultant dvou polynomů: Nechť A je okruh, $f, g \in A[x]$
$$f = a_n x^n + \dots + a_0, \quad a_n \neq 0$$
$$g = b_m x^m + \dots + b_0, \quad b_m \neq 0$$

Sylvestrova matice $Syl(f,g)$ je matice $(m+n) \times (m+n)$

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccccccccc}
a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & a_n & \dots & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_n & a_{n-1} & & \dots & & a_1 & a_0 \\
b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & b_m & \dots & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & b_m & b_{m-1} & & \dots & & b_1 & b_0
\end{array}\right)\end{array}
\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \end{array}$$

Rezultant f, g je $Res(f,g) = \det(Syl(f,g))$

Věta: Nechť K je těleso. Pak nekonst. polynomy $f, g \in K[x]$ mají společný faktor (tj. $f = f_1 h$, $g = g_1 h$, kde h je nekonst.), právě když $Res(f,g) = 0$.

Lemma: K těleso, $f, g \in K[x]$, stupňů $n, m > 0$.
Potom f, g mají společný faktor $\iff$ $\exists$ polynomy $A, B \in K[x]$ t.ž.
1) $Af + Bg = 0$
2) $A \neq 0$, $B \neq 0$
3) $\deg A < \deg g$, $\deg B < \deg f$

Důkaz: "$\Rightarrow$" $f = f_1 h$, $g = g_1 h$, $\deg h \geq 0$
Položme $A = g_1$, $B = -f_1$

"$\Leftarrow$" Nechť A, B splňují 1), 2) a 3), přitom $NSD(f,g) = 1$.
Podle Bezouta $\exists\, \tilde{A}, \tilde{B}$ t.ž.

$$1 = \tilde{A} f + \tilde{B} g \qquad / \cdot A$$

$$A = \tilde{A} A f + \tilde{B} A g = \tilde{A}(-Bg) + \tilde{B} A g = (\tilde{B} A - \tilde{A} B) g$$

$$A \neq 0 \Rightarrow \deg A \geq \deg g \text{, spor.}$$

Důkaz věty: $f = a_n x^n + \dots + a_0$
$g = b_m x^m + \dots + b_0$

f, g mají společný faktor $\Leftrightarrow$ existují
$A = c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_0$
$B = d_{n-1} x^{n-1} + \dots + d_0$
nenulové t.ž. $Af + Bg = 0$

rozepsáním koef. u x^i:

x^{n+m-1}: $a_n c_{m-1} + b_m d_{n-1} = 0$
x^{n+m-2}: $a_{n-1} c_{m-1} + a_n c_{m-2} + b_{m-1} d_{n-1} + b_m d_{n-2} = 0$
$\vdots$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} c_{m-1} & c_{m-2} & \cdots & c_1 & c_0 & d_{n-1} & d_{n-2} & \cdots & d_1 & d_0 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & 0 & b_{m-1} & b_m & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & \vdots & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & &
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Je matice sous. $Af + Bg = 0$
Ta má tedy nenulové řešení $\Leftrightarrow$

$$\det\left(Syl(f,g)^T\right) = 0$$

Polynomy více proměnných

Lemma: $f, g \in K[x_1, \dots, x_r]$ mají společný faktor s kladným stupněm v proměnné x_r právě tehdy, když mají společný faktor jako prvky $K(x_1, \dots, x_{r-1})[x_r]$

Důkaz: "$\Rightarrow$" zřejmé (kdyby nějaký faktor jen v prom. $x_1, \dots, x_{r-1}$, tak by to byla jednotk…)
"$\Leftarrow$" Nechť $f = \tilde{h} \cdot \tilde{f}_1$, $g = \tilde{h} \cdot \tilde{g}_1$ kde $\tilde{h}, \tilde{f}_1, \tilde{g}_1 \in K(x_1, \dots, x_{r-1})[x_r]$

$$\tilde{h} = \frac{h}{d}, \quad \tilde{f}_1 = \frac{f_1}{e}, \quad \tilde{g}_1 = \frac{g_1}{c}$$

kde $h, f_1, g_1 \in K[x_1, \dots, x_r]$, $d, e, c \in K[x_1, \dots, x_{r-1}]$

(přepsáno)
$def = h f_1$ $\quad$ h má kladný stupeň v x_r
$dcg = h g_1$ $\quad$ $\Rightarrow h$ má ireducibilní faktor h_1 s kladným stupněm v x_r a ten se musí vyskytovat v rozl… def na ired. faktory.

Protože ale d, e jsou stupně 0 v x_r, musí $h_1 \backslash$ … analogicky $h_1 | g$.

Definice: Nechť $f, g \in K[x_1, \dots, x_r] \cong (K[x_1, \dots, x_{r-1}])[x_r]$.
Rezultant f, g vzhledem k x_r: $Res(f, g, x_r) \in K[x_1, \dots, x_{r-1}]$
(stejně jako předtím je to determinant Sylvestrovy matice pro f, g)

Věta: Nechť $f, g \in K[x_1, \dots, x_r]$ jsou polynomy stupňů $n, m > 0$. Potom
1) f, g mají společný faktor kladného stupně v proměnné x_r $\Leftrightarrow Res(f, g, x_r) = 0$
2) $\exists$ nenulové polynomy $A, B \in K[x_1, \dots, x_r]$ t.ž.
$Res(f, g, x_r) = Af + Bg$ & $st A < st g$, $st B < st f$

Důkaz: 1) viz předch. lemma, dále matice v $K(x_1,\dots,x_{r-1})[x_r]$ a v $(K[x_1,\dots,x_{r-1}])[x_r]$ je stejná, pouze v prvním chápu její prvky jako racionální fce, v druhém jako polynomy

2) • $Res(f,g,x_r)=0 \Rightarrow$ mají společný faktor

$$f=hf_1 \qquad A=g_1 \qquad Af+Bg=0=Res(f,g,x_r)$$
$$g=hg_1 \qquad B=f_1$$

• $Res(f,g,x_r)\neq 0 \Rightarrow$ v $(K[x_1,\dots,x_{r-1}])[x_r]$

(*) $NSD(f,g)=1=\tilde{A}f+\tilde{B}g \quad \tilde{A},\tilde{B}\in(K[x_1,\dots,x_{r-1}])[x_r]$

Hledejme $\tilde{A},\tilde{B}$ stupňů $\deg\tilde{A}<\deg g$; $\deg\tilde{B}<\deg f$.
Dostáváme soust. ~~s rozšířenou maticí~~.

$$Syl(f,g,x_r)^T\begin{pmatrix}c_{m-1}\\ \vdots\\ c_0\\ d_{n-1}\\ \vdots\\ d_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

kde $c_{m-1},\dots,c_0\in K(x_1,\dots,x_{r-1})$ jsou hledané koef. $\tilde{A}$
$d_{n-1},\dots,d_0$ — " — $\tilde{B}$

Podle Cramerova pravidla:

$$c_{m-1}=\frac{(\,\vdots\ *)}{\det Syl(f,g,x_r)^T} \begin{matrix}\in K[x_1,\dots,x_{r-1}]\\ =Res(f,g,x_r)\end{matrix}$$

$\vdots$

Tedy $$\tilde{A}=\frac{A}{Res(f,g,x_r)}\quad\in K[x_1,\dots,x_r]$$

$$\tilde{B}=\frac{B}{Res(f,g,x_r)}\quad\in K[x_1,\dots,x_r]$$

Když rovnici (*) vynásobíme Res-em dostáváme požad. rovnost. $\square$

Důsledek: Nechť rovnice $f(x_1,x_2)=0$, $g(x_1,x_2)=0$ mají nekonečně mnoho společných řešení. Pak f a g mají společný faktor.

Důkaz: BÚNO lze předp. nekonečně mnoho společných prvních souřadnic x_1. Pro řešení $(x_1^1, x_2^1), (x_1^2, x_2^2), \dots$ je buď $\{x_1^1, x_1^2, \dots\}$ nebo $\{x_2^1, x_2^2, \dots\}$ nekonečná. Nechť je to ta první.

$Res(f,g,x_2) = A f(x_1,x_2) + B g(x_1,x_2)$ je polynom v proměnné x_1 a má nekonečně mnoho řešení.

$\Rightarrow Res(f,g,x_2) = 0 \Rightarrow f,g$ mají společný faktor

Př. Mají $xy-1=f$, $x^2+y^2-4=g$ společný faktor?

$$Res(f,g,x) = \det\begin{pmatrix} y & -1 & 0 \\ 0 & y & -1 \\ 1 & 0 & y^2-4 \end{pmatrix} = y^2(y^2-4)+1 \neq 0$$

Tedy nemají spol. faktor.

$$Res(f,g,y) = \det\begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 1 & 0 & x^2-4 \end{pmatrix} = x^2(x^2-4)+1 \neq 0$$

Př. Mají $f=x^2+y^2-4$, $g=16x^2+y^2-16$ společný faktor?

$$Res(f,g,x) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & y^2-4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y^2-4 \\ 16 & 0 & y^2-16 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & y^2-16 \end{pmatrix} \sim \det\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & y^2-4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y^2-4 \\ 0 & 0 & 15y^2-48 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & y^2-16 \end{array}\right)$$

$$= (15y^2-48)(y^2-16) - 16(y^2-4)(15y^2-48) =$$

$$= (15y^2-48)\cdot(48-15y^2) = -(15y^2-48)^2 = 0$$

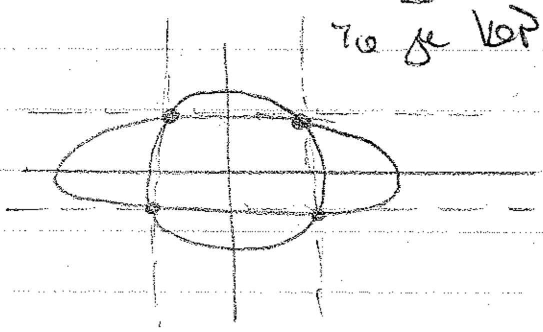
$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{48}{15} = \frac{16}{5}$$

$$\boxed{y = \pm\frac{4}{\sqrt{15}}}$$

$$\mathrm{Res}(f,g,y) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2-4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^2-4 \\ 1 & 0 & 16(x^2-1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16(x^2-1) \end{pmatrix} = \det\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & x^2-4 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & x^2-4 \\ 0 & 0 & 15x^2-12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16(x^2-1) \end{array}\right) =$$

$$= (15x^2-12)\cdot 16(x^2-1) - (15x^2-12)(x^2-4) =$$
$$= (15x^2-12)\cdot(15x^2-12) = [3\cdot(5x^2-4)]^2 =$$
$$= 9\cdot(5x^2-4) = 0 \iff x^2 = \frac{4}{5} \qquad \boxed{x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

v předch. příkladě o společných řešeních $f=0$, $g=0$?
Co znamená, že x_0 je kořen $\mathrm{Res}(f,g,y)$? (y-ová resp. x-ová souř. nějakého (obecně komplex.) průsečíku obou [illegible])
y_0 je kořen $\mathrm{Res}(f,g,x)$?



Lokální okruh = okruh s jediným maximálním ideálem
(automaticky myšleno komutativní s jednotkou)

Tvr: Nechť A je okruh, $I \neq A$ ideál. Pokud $A \setminus I$ obsahuje pouze jednotky, pak A je lokální a I maximální. (platí i opačně)

Důkaz: I je zřejmě maximální a každý ideál $J \subsetneq A$ leží v I.

Tvr: Nechť A je okruh s maximálním ideálem I. Jestliže každý prvek z $1+I = \{1+x \mid x \in I\}$ je jednotka, pak A je lokální.

Důkaz: Nechť $x \in A - I$, ukážeme, že x je jednotka. Z maximality I $(x, I) = A$. Proto $\exists\, t \in I, y \in A$ t.ž. $xy + t = 1$, $xy = 1 - t \in 1+I$ je jednotka $\Rightarrow$ x je jednotka.

Lokalizace okruhu: Nechť A je okruh a $S \subseteq A$ podmn. s vlastnostmi: $1 \in S$
$x, y \in S \Rightarrow xy \in S$

(S se nazývá multiplikativní podmn.)

Na mn. $A \times S$ zavedeme relaci: $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$
$\iff$
$\exists s: s(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$

Třídy ekvivalence značíme $\frac{a}{s}$ a jejich množinu $S^{-1}A$.
Na ní lze zavést strukturu okruhu $\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 s_2 + a_2 s_1}{s_1 s_2}$, $\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2}$

$\lambda: A \to S^{-1}A$ homomorfismus (přidávám inverze prvků z S)
$a \mapsto \frac{a}{1}$ $\quad \frac{a}{1} = 0 \iff \exists s \in S: sa = 0$

$S^{-1}A = (A \times S)/\sim$, $[(a,s)] = \frac{a}{s}$ 2.3.

B je kom.
ρ zach. jedničku

Věta: Nechť $\rho: A \to B$ je homomorf okruhů. $S \subseteq A$ multiplik. podmn., pro každé $s \in S$ je $\rho(s)$ jednotka. Pak $\exists!$ homomorf okruhů $\tilde{\rho}: S^{-1}A \to B$ t.ž.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\lambda"'] & B \\ S^{-1}A \arrow[ur, dashed, "\tilde{\rho}"'] & \end{tikzcd}$$

Důkaz: $\tilde{\rho}\left(\frac{a}{s}\right) = \rho(a)\rho(s)^{-1}$

dobře def: $\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2} \overset{?}{\Longrightarrow} \rho(a_1)\rho(s_1)^{-1} = \rho(a_2)\rho(s_2)^{-1}$
tj. $\rho(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$
ale víme, že $\underbrace{\rho(s)}_{\text{jednotka}} \rho(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$

pak ověřit, že se jedná o hom. okruhů $\square$

Spec. případy:

(nějaká mocnina $a^n = 0$)

a) $S = \{1, a, a^2, \dots\}$ (předp., že a není nilpotentní

$S^{-1}A = A_a$ (přidám k A inverzi k prvku a)

b) $p \subseteq A$ prvoideál, $S = A \setminus p$ je multiplik. podmn.

$S^{-1}A = A_p$ ... lokalizace A vzhledem k prvoideálu p
(příp. v $\mathbb{Z}$ značíme $\mathbb{Z}_{(p)}$)

c) A je obor integrity, $S = A \setminus \{0\}$

$S^{-1}A$ je podílové těleso okruhu A

Def. A-modul je mn. M společně s
- struktura komut. grupy (operace +)
- $A \times M \longrightarrow M$
  $(a, m) \longmapsto a \cdot m = am$

$1m = m$
$a(b \cdot m) = (ab) \cdot m$
$a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$
$(a+b)m = am + bm$ (jako ve VP)

Noetherovské okruhy

Pro okruh A uvažujeme podmínku ACC (ascending chain condition)

- pro každou posl. ideálů v A: $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$
  $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.ž. $I_n = I_{n+1} = \dots$

př. ($\mathbb{Z}$, $K[x]$)

Věta: Nechť A je okruh. NTPJE:
1) ACC
2) lib. neprázd. mn. ideálů obs. max. prvek
3) každý ideál v A je konečně generovaný

NTPJE = Násl. podm. jsou ekviv.

Def.: Okruh A se nazývá <u>Noetherovský</u>, jestliže splňuje podmínky předchozí věty.

Důkaz: 1) $\Leftrightarrow$ 2) zřejmé (pro 1) $\Rightarrow$ 2) asi třeba AC)

1) $\Rightarrow$ 3) Nechť I není konečně generovaný.
induktivně $I_0 = 0$, přidám generátor $I_1 \neq I$, přidám...
$\exists$ posl. $x_1, x_2, \ldots \in I$ t.ž. $(x_1, \ldots, x_n) \subsetneq (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$
spor s ACC.

3) $\Rightarrow$ 1) Nechť $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ je rostoucí řetězec ideálů, položme

$I = \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} I_n$. I je ideál. Podle 3) je I kon. gen.
prvky $a_1, \ldots, a_k \in I_n \Rightarrow I = I_n = I_{n+1} = \cdots$ $\square$

Stejným způsobem se dokáže.

Věta: Nechť M je A-modul. Následující:

1) ACC pro podmoduly M
$N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq M$ posl. podmodulů. Potom $\exists n \in \mathbb{N}$ t.ž. $N_n = N_{n+1} = \cdots$
2) lib. neprázdná mn. podmodulů obsahuje max. prvek vzhl. k $\subseteq$
3) každý podmodul je kon. gen. (jakožto modul)

(tato věta je spec. pro předch., okruh je modul sám nad sebou, ideálům odp. podmoduly)

Def. Modul A splňující tyto podmínky se nazývá <u>Noetherovský modul.</u>

Věta: Nechť $0 \to M_1 \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M_2 \to 0$ je krátká exaktní posl. A-modulů. Potom M je Noetherovský právě když M_1, M_2 jsou Noetherovské.

přidáme $M_1 \subseteq M$ podmodul, $M_2 = M/M_1$

Důkaz: "$\Rightarrow$" podmodul a kvocienty Noet. jsou Noet.

svazy podmodulů M_1 i M_2 jsou podsvazy ve svazu podmodulů M, proto splňují ACC

"$\Leftarrow$" ~~Nechť $L_1 \subseteq L_2 \subseteq$ je posl. podmodulů~~

Nechť $L \subseteq M$, ukážeme, že L je kon. gen.

Položme $L_1 = \alpha^{-1}(L)$, $L_2 = \beta(L)$

$L_1 = M_1 \cap L$, $L_2 = (M_1 + L)/M_1$

$$0 \to M_1 \cap L \to L \to (M_1 + L)/M_1$$

$$L/M_1 \cap L \cong M_1 + L/M_1$$

Ty jsou kon. gen. a máme krátkou exaktní posl.

$0 \to L_1 \to L \to L_2 \to 0$ s L_1, L_2 kon. gen. $\to$ L kon. gen. $\square$

Důsledek: Jsou-li $M_1, \ldots, M_n$ Noetherovské moduly, pak $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ je rovněž Noetherovský.

Dk: stačí pro $n=2$: $0 \to M_1 \to M_1 \oplus M_2 \to M_2 \to 0$

Věta: Je-li A Noether. okruh, pak každý kon. gen. A-modul je Noether.

Důkaz: A je Noether. A-modul $\Rightarrow A^n$ je Noether. A-modul

$\Rightarrow M \cong A^n/N$ je Noether. A-modul

kde N je podmodul v A^n

$(N = \ker \varphi$, $A^n \xrightarrow{\varphi} M)$

Věta: Je-li A Noether. okruh, $I \subseteq A$ ideál, pak ~~AKA~~ A/I je Noet. okruh.

Důkaz: Svaz ideálů v A/I je podsvaz ve svazu ideálů v A.

Věta: Nechť $\varphi: A \to B$ je epimorfismus okruhů (surj. homomorf.)
Je-li A Noether., pak i B je Noether.

Důkaz: $B \cong A/\mathrm{Ker}\,\varphi$

Věta: Nechť A je podokruh v B. Je-li A Noether. okruh a B kon. gen. A-modul, pak B je Noether. okruh.

Důkaz: Podle 3. předch. věty je B Noetherovský A-modul
$\Rightarrow$ B je Noetherovský B-modul (tj. B je Noether. okruh)

$I \subseteq B$ ideál, tj. B-podmodul, pak I je A-podmodul a navíc kon. gen. jako A-modul, tím spíš jako B-modul

Př. $\mathbb{Z}$ je Noetherovský okruh $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ je také Noetherovský

Věta: Je-li A Noetherovský okruh, $S \subseteq A$ mult. podmn.,
pak $S^{-1}A$ je Noetherovský okruh.

Důkaz: $I \subseteq S^{-1}A$ je ideál. Položme $J = \lambda^{-1}(I) = \{a \in A \mid \frac{a}{1} \in I\}$
$= \{a \in A \mid \exists s \in S: \frac{a}{s} \in I\}$

$J \subseteq A$ je ideál $\Rightarrow$ kon. gen. prvky $a_1, \dots, a_n \in J$
Potom I je generovaný $\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{1}, \dots, \frac{a_n}{1} \in I$

$$I \ni \frac{a}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{a}{1} = \frac{1}{s} \cdot \frac{x_1 a_1 + \dots + x_n a_n}{1} = \frac{x_1}{s} \frac{a_1}{1} + \dots + \frac{x_n}{s} \frac{a_n}{1}$$

Hilbertova věta o bázi: Je-li A Noetherovský okruh, pak okruh pol. $A[x]$ je rovněž Noetherovský.

Důsl.: Za stejných předp. je $A[x_1, \dots, x_n]$ Noetherovský.

Důkaz věty: Nechť J je ideál v $A[x]$. Definujme

$$I = \{a \in A \mid \exists p \in J : p = ax^r + \text{Lot}\}$$ ↗ lower order terms, tj. a je vedoucí koef.

I je ideál, podle předp. kon. gen. prvky $a_1, \dots, a_n$.
Pro každé a_i $\exists\, p_i \in J$ tvaru $p_i = a_i x^{r_i} + \text{Lot}$
Položme $\tilde{J} = (p_1, \dots, p_n)_{\text{ideal}} \subseteq J$ a $r = \max r_i$.

Lib. polynom $p \in J$ stupně $m \geq r$ je tvaru $ax^m + \text{Lot}$, kde $a \in I$,
$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$

Polynom $p - \sum \alpha_i x^{m-r_i} p_i$ je prvkem J a má menší stupeň než p
Po konečném počtu kroků $p = g_1 + g_2$
kde $g_1 \in \tilde{J}$, $g_2 \in J$ a st $g_2 < r$.

Nechť M je A-podmodul $A[x]$ generovaný $1, x, \dots, x^{r-1}$,
potom $g_2 \in J \cap M$. Dokázali jsme

$$J = \tilde{J} + (J \cap M)$$

M je kon. gen. A-modul $\Rightarrow$ Noetherovský A-modul
$\Rightarrow$ $J \cap M$ je kon. gen. $f_1, \dots, f_m$. Potom ale J
je generovaný $p_1, \dots, p_n, f_1, \dots, f_m \Rightarrow A[x]$ je Noether. □

Gröbnerova báze:

Uvažme na $K[x_1, \dots, x_r]$ uspořádání dané:

uspořádáme monomy $x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{\alpha_r} < x_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{\beta_r}$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1},\ \alpha_i < \beta_i$$

vedoucí člen polynomu $f \in K[x_1, \dots, x_r]$, $f = a_\alpha x^\alpha + \sum_{\beta < \alpha} a_\beta x^\beta$, $a_\alpha \neq 0$
definujeme jako

$$LT f = a_\alpha x^\alpha$$

kde $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{\alpha_r}$

I ideál v $K[x_1,\dots,x_r]$ definujeme $LT\,I = (\{LT f \mid f \in I\})$ ideál generovaný všemi $LT f$ (nezáleží to na $\prec$)

Věta: Nechť $I \subseteq K[x_1,\dots,x_r]$ je ideál $g_1,\dots,g_s \in I$. Jestliže $LT\,I = (LT g_1,\dots, LT g_s)$ potom $I = (g_1,\dots,g_s)$

Definice: Polynomy $g_1,\dots,g_s$ z předch. věty se nazývají Gröbnerova báze ideálu I.

(Pozn.: Pomocí Gröbnerovy báze lze jednoduše rozhodnout, zda $f \in I$ (algoritmicky) (spíše asi algoritmicky) Přidáním minimality a redukovanosti $\Rightarrow$ jednoznačnost báze.)

Důkaz: $LT\,I$ je ideál. Sporem: nechť $f \in I \setminus (g_1,\dots,g_s)$ s nejmenším $LT f$ (usp. na monomech je dobré usp.)

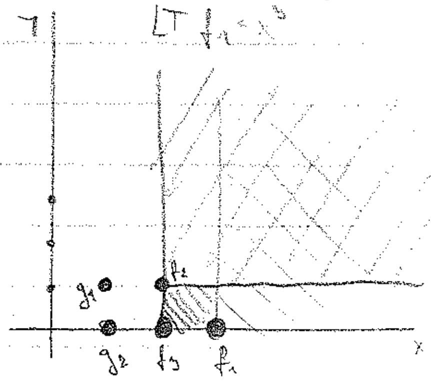
$$LT f = \cancel{\sum_{i=1}} \; \underbrace{LT g_i \cdot x^\alpha}_{\text{monom}}$$

Potom $f - g_i x^\alpha \in I \setminus (g_1,\dots,g_s)$ a má

$$LT(f - g_i x^\alpha) < LT f, \text{ spor.}$$

$\square$

Př. Najděte Gröbnerovu bázi $I = (f_1, f_2)$, kde $f_1 = x^3 - 2xy$, $f_2 = x^2y + x - 2y^2$. $LT f_2 = x^2 y$ $LT f_1 = x^3$



$$(yx^3 - 2xy^2) - (x^3y + x^2 - 2y^2x) = -x^2 = f_3$$

$$f_1 + x f_3 = -2xy = g_1$$

$$f_2 + y f_3 = x - 2y^2 = \underline{g_2}$$

Upravujeme bázi I, abychom našli všechny ved. koef.

$$f_3 + x g_2 = -2xy^2 + 2y^2 g_2 = -4y^4$$ (je násobkem $-4y^3$, i jeho ved. člen je násobkem ved. členu)

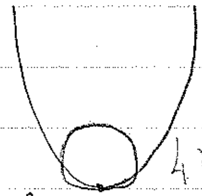
$$g_1 + 2y g_2 = \underline{-4y^3}$$

$I = (x-2y^2, y^3)$ $\quad y^3x-2y^5-xy^3=-2y^5$ (což už je násobek y^3, tedy konec)

Tedy Gröbnerova báze je $x-2y^2, y^3$.

$x>y$

Př. $I = (y-x^2, x^2+(y-1)^2-1) = (-x^2+y, x^2+y^2-2y)$



4 body

(f_1, f_2)

(f_1, g_2)

$f_1 + f_2 = y^2 - y = g_2$

$y^2 f_1 + x^2 \cdot g_2 = y^3 - y^2x^2 + x^2y^2 - x^2y = y^3 - x^2y$

$(y^3-x^2y) - y\cdot g_2 = (y^3-x^2y) - y^3 + y^2 = -x^2y + y^2$

$(-x^2y+y^2) - y(-x^2+y) = -x^2y + y^2 + x^2y - y^2 = 0$

proto má výsledek dimenzi 4 $(1, x, y, xy)$

Afinní variety a ideály

K ... algebraicky uzavřené těleso

A^n_K ... n-rozměrný af. prostor nad K (K^n chápeme jako vektorový prostor)

Afinní varieta (= uzavřená algebraická množina) je množina řešení soustavy algebraických rovnic

$$f_i(x_1,\dots,x_n) = 0 \qquad i=1,\dots,r$$

Označme ji $V(f_1,\dots,f_r) = \{x\in A^n_K \mid f_i(x)=0\ \forall i\}$

Je-li $I \subseteq K[x_1,\dots,x_n]$ ideál, definujeme $V(I) = \{x\in A^n_K \mid f(x)=0\ \forall f\in I\}$

Platí: pro ideál $I = (f_1, \dots, f_r)$ je $V(I) = V(f_1, \dots, f_r)$

"$\subseteq$" zřejmé
"$\supseteq$" $f(x) = 0$, pak i $g(x) \cdot f(x) = 0$

Opačně, je-li $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ lib. podmn., ozn. $I(X) = \{ f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(x) = 0 \ \forall x \in X \}$. To je ideál. Dostáváme zobr.

$$\begin{Bmatrix} \text{ideály v} \\ k[x_1, \dots, x_n] \end{Bmatrix} \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \begin{Bmatrix} \text{podmn.} \\ \text{v } \mathbb{A}_k^n \end{Bmatrix}$$

V není injektivní: $V(x_1^2, \dots, x_n^2) = V(x_1, \dots, x_n)$ (dva různé ideály generují stejnou podmn. v $\mathbb{A}_k^n$)

I není injektivní ani surjektivní: $(x_1^2, \dots, x_n^2) \notin \operatorname{Im} I$
$I(\mathbb{A}_k^1) = I(\mathbb{Z}) = k[x_1]$

Zákl. vlast. zobr. V: 1) $V(0) = \mathbb{A}_k^n$, $V(k[x_1, \dots, x_n]) = \emptyset$

(Systém axiómů pro uzavřené mn. jako gen. topologie)

2) $I \subseteq J$, $V(J) \subseteq V(I)$

3) $V(J_1 \cap J_2) = V(J_1) \cup V(J_2) = V(J_1 \cdot J_2)$

4) $V\left(\sum_{\lambda \in L} J_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in L} V(J_\lambda)$

Důkaz: (1), (2) a (4) jsou jednoduché

(3) $V(J_i) \subseteq V(J_1 \cap J_2)$ plyne z (2)
$\Rightarrow V(J_1) \cup V(J_2) \subseteq V(J_1 \cap J_2)$

Pro důkaz opačné inkluze uvažme $P \in V(J_1 \cap J_2)$ a $P \notin V(J_1) \cup V(J_2)$, tzn. $\exists \ f_i \in J_i$ t.ž. $f_i(P) \neq 0$ ($P \notin V(J_1)$ & $P \notin V(J_2)$)
Vezměme $f = f_1 f_2$, potom $f(P) \neq 0$, ale $f \in V(J_1 \cap J_2)$
$\Rightarrow P \notin V(J_1 \cap J_2)$, spor.

$V(J_1\cap J_2) \supseteq V(J_1)\cup V(J_2) \supseteq V(J_1 J_2) \supseteq V(J_1\cap J_2)$ 9.3.

$p\in V(J_1 J_2)$, $p\notin V(J_1)$, $p\notin V(J_2)$

$\exists f_1\in J_1: f_1(p)\neq 0$, $\exists f_2\in J_2: f_2(p)\neq 0$

$f_1 f_2\in J_1 J_2$, $f_1 f_2(p)\neq 0$
$\Rightarrow p\notin V(J_1 J_2)$, spor.

Zákl. vlast. zobr. I

1) $X\subseteq Y \Rightarrow I(X)\supseteq I(Y)$
2) pro každou podmn. $X\subseteq \mathbb{A}^n_k$ platí $X\subseteq V(I(X))$, rovnost nastává právě když X je afinní varieta
3) pro každý ideál $J\subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ platí $J\subseteq I(V(J))$, rovnost nastává právě když J je tvaru $I(X)$ pro nějaké $X\subseteq \mathbb{A}^n_k$

Dk: 2) $X=V(J) \Rightarrow X=V(I(X))$

podle 3)a) $J\subseteq I(V(J))$, aplikací V:

$V(J)\supseteq V(I(V(J)))$

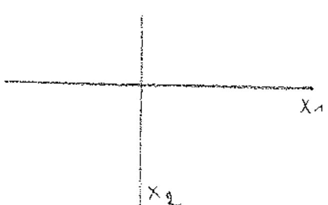
$X\supseteq V(I(X))$, společně s 2)a) dostáváme rovnost

Důsledek: Zobr. I, V dávají bijekci mezi

$$\left\{\begin{matrix}\text{afinní variety}\\ \text{v } \mathbb{A}^n_k\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{ideály v } k[x_1,\dots,x_n]\\ \text{tvaru } I(X)\end{matrix}\right\}$$

která je antiizomorfismus svazů

Def. Afinní varieta X se nazývá <u>ireducibilní</u>, jestliže nelze psát ve tvaru $X=X_1\cup X_2$, kde $X_1\subsetneq X$, $X_2\subsetneq X$ jsou afinní variety.

Př. $V(x_1 x_2) =$ 

$= V(x_1)\cup V(x_2)$

Věta: Nechť X je afinní varieta. Potom X je ireducibilní, právě když $I(X)$ je prvoideál.

Důkaz: Obecně J není prvoideál $\iff$ $\exists\, J_1, J_2$ ideály t.ž. $J \subsetneq J_1$, $J \subsetneq J_2$ a $J_1 \cdot J_2 \subseteq J$.

Poddůkaz: "$\Longrightarrow$" J není prvoideál, $\exists\, f_1, f_2 \notin J : f_1 \cdot f_2 \in J$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] J+(f_1) \arrow[dr, dash] & & J+(f_2) \arrow[dl, dash] \\ & J & \end{tikzcd}$$

$$(J+(f_1))\cdot(J+(f_2)) = \underbrace{J\cdot J}_{\subseteq J} + \underbrace{J(f_1)}_{\subseteq J} + \underbrace{J\cdot(f_2)}_{\subseteq J} + \underbrace{(f_1 \cdot f_2)}_{\subseteq J}$$

"$\Longleftarrow$"

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] J_1 \arrow[dr, dash] & & J_2 \arrow[dl, dash] \\ & J \arrow[d, dash] & \\ & J_1 \cdot J_2 & \end{tikzcd}$$

zvolme $f_1 \in J_1 \setminus J$, $f_2 \in J_2 \setminus J$
$f_1 \cdot f_2 \in J_1 \cdot J_2 \subseteq J$

Budeme dokazovat: X reducibilní $\iff$ $I(X)$ není prvoideál

"$\Longrightarrow$" $X = X_1 \cup X_2$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & I(X_1) \arrow[dr, dash] & & I(X_2) \arrow[dl, dash] \\ X_1 & & X_2 \arrow[r, squiggly, "I"] & {} & & I(X) = I(X_1) \cap I(X_2) \arrow[d, dash] & \\ & & & & & I(X_1) \cdot I(X_2) & \end{tikzcd}$$

"$\Longleftarrow$"

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & V(J_1 \cdot J_2) = V(J_1) \cup V(J_2) \arrow[d, dash] & & & J_1 \arrow[dr, dash] & & J_2 \arrow[dl, dash] \\ & X \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & {} & & I(X) \arrow[d, dash] \arrow[ll, squiggly, "V"'] & \\ V(J_1) & & V(J_2) & & & J_1 \cdot J_2 & \end{tikzcd}$$

vyplývá, že $X = V(J_1) \cup V(J_2)$ $\square$

Def. Topologický prostor se nazývá <u>Noetherovský</u>, jestliže neexistuje
$X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq X_3 \supsetneq X_4 \supsetneq \dots$
nekonečná klesající posl. jeho uzavřených podmnožin.

Věta: A^n_k se Zariskiho topologií (uz. mn. = afinní variety) je Noetherovský topologický prostor.

Cvičení: Každý Noetherovský top. prostor je kompaktní (kvazi) (nevyžaduje se T_2)

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \emptyset \overset{\text{kompaktnost}}{\Longrightarrow} \exists\, J \subseteq I \text{ konečná t.ž. } \bigcap_{i \in J} X_i = \emptyset$$

Sporem předp., že žádný konečný průnik není prázdný.
Zvolme $i_0 \in I$ lib. t.ž. $X_{i_0} \neq \emptyset$
$\exists\, i_1$ takové, že $X_{i_0} \cap X_{i_1} \subsetneq X_{i_0}$, iterujeme dál
$\rightarrow$ spor s Noetherovskostí, neboť dostaneme nekon. kles. posl.

Cvičení: Popište topologii na A^1_k
$V(J) = V(f)$
$\quad \nwarrow k[x]$ je PID (= OHI) (= Okruh hlavních ideálů)

$$V(f) = \begin{cases} \text{konečná mn. kořenů } f & \text{pro } f \neq 0 \\ A^1_k & \text{pro } f = 0 \end{cases}$$

jsou právě uzavřené $\Rightarrow$ topologie konečných doplňků

Průnik lib. dvou neprázd. ot. mn. je neprázdný ($|k| = \infty$)
$\Rightarrow A^n_k$ není T_2.

Věta: Každou afinní varietu $X \subseteq A^n_k$ lze rozložit jako $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ s vlastností $X_i \not\subseteq X_j$ pro $i \neq j$ na sjednocení ireducibilních afinních variet. Tento rozklad je jednoznačný až na pořadí, X_i se nazývají <u>ireducibilní komponenty</u> X.

Důkaz: existence: rozkládám na ireducibilní, to se zastaví po konečném počtu kroků díky Noetherovskosti.
Při $X_i \subseteq X_j$ můžeme X_i vynechat.

jednoznačnost: $X = X_1 \cup \dots \cup X_r = Y_1 \cup \dots \cup Y_s$

$$X_i = X_i \cap X = \bigcup_{j=1}^{s} X_i \cap Y_j$$

Díky ireducibilitě $\exists\, j$ t.ž. $X_i = X_i \cap Y_j$
tj. $X_i \subseteq Y_j$
Ze symetrie $X_i \subseteq Y_j \subseteq X_{i'}$
Podle jedn. na rozklad $i = i' \rightarrow X_i = Y_j$

Def.: Radikál ideálu J je ideál $\sqrt{J} = \{f \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : f^n \in J\}$

Cv.: Ukažte, že $\sqrt{J}$ je ideál

Nechť $f \in \sqrt{J}$, $a \in A$: $(a \cdot f)^n = \underset{\in A}{a^n} \underset{\in J}{f^n} \in J$

$f_1, f_2 \in \sqrt{J}$ t.ž. $f_1^n \in J$, $f_2^m \in J$

$$(f_1 + f_2)^{n+m} = \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{N} \\ (k+l) = n+m}} \binom{n+m}{k} f_1^k f_2^l$$

když $k \geq n$ $\in J$
$k < n \Rightarrow l \geq m$ $\in J$

Věta: (Hilbertova o nulách, Nullstellensatz)
Nechť k je algebraicky uzavřené těleso.
1) Každý maximální ideál $m \in k[x_1, \dots, x_n]$ je tvaru
$$m = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = I(P)$$
pro nějaký bod $P = (a_1, \dots, a_n) \in A_k^n$

2) Je-li $J \subsetneq k[x_1,\dots,x_n]$ vlastní ideál, potom $V(J) \neq \emptyset$

3) Pro každý ideál $J \subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ platí $I(V(J)) = \sqrt{J}$.

Def. Ideál J se nazývá radikálový ideál, jestliže $J = \sqrt{J}$.
(např. prvoideály jsou radikálové)

Důsledek: Zobrazení V, I

$$\left\{\begin{array}{c}\text{ideály v}\\ k[x_1,\dots,x_n]\end{array}\right\} \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{array}{c}\text{podmnožiny}\\ A^n_k\end{array}\right\}$$

indukují bijekce

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{c}\text{radikálové}\\ \text{ideály}\end{array}\right\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{afinní}\\ \text{variety}\end{array}\right\}\\
\cup & & \cup\\
\{\text{prvoideály}\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{ireducibilní}\\ \text{af. variety}\end{array}\right\}\\
\cup & & \cup\\
\{\text{max. ideály}\} & \longleftrightarrow & \{\text{body } A^n_k\}
\end{array}$$

Důkaz: Zbývá dokázat, že obraz I tvoří právě radikálové ideály.
Nechť $J = I(X) = I(V(I(X))) = \sqrt{I(X)}$, tedy J je radikálový.
Naopak nechť $J = \sqrt{J} = I(V(J))$ a leží v obrazu I.

Př. Hilbertova věta neplatí nad $\mathbb{R}$. V $A^1_{\mathbb{R}}$ uvažme $J = (x^2+1)$
$V(J) = \emptyset$, $I(V(J)) = \mathbb{R}[x]$

Ukážeme, že $\sqrt{J} = J$ $\quad f \in \sqrt{J} \Rightarrow (x^2+1) \mid f^n$
x^2+1 je ireducibilní $\Rightarrow x^2+1 \mid f \Rightarrow f \in J$ tj. $\sqrt{J} \subseteq J$
a opačná inkluze platí vždy.
J je maximální ideál a neodpovídá žádnému bodu $A^1_{\mathbb{R}}$.

• R kom. okruh, R-algebra A je homomorfismus okruhů $R \to A$ 11.3.
(A je okruh).
Jinak A je okruh a R-modul a násobení na A splňuje
$\forall r \in R,\ \forall a,b \in A:\ (ra)b = a(rb)$

(Kategoriálně: $A \otimes_R A \to A$ je homo R-modulů, $R \to A$ je jednotka)

Def. A je <u>konečná R-algebra</u>, jestliže je konečně generovaná jakožto R-modul: $A = Ra_1 + \dots + Ra_n$ pro nějaká $a_1, \dots, a_n$

A je <u>konečně generovaná R-algebra</u>, jestliže $\exists$ surj. homo R-algeber
$$R[x_1,\dots,x_n] \twoheadrightarrow A$$
$$x_i \longmapsto a_i$$
Píšeme $A = R[a_1,\dots,a_n]$ - A je gen. $a_1,\dots,a_n$ nad R, $a_i\, a_j$ nemusí být nezávislé
(volná algebra) Říkáme, že A je generovaná $a_1,\dots,a_n$.

Def.: Prvky $b_1,\dots,b_n \in A$ v R-algebře A se nazývají <u>algebraicky nezávislé</u>, jestliže $R[x_1,\dots,x_n] \to A$ je injektivní
$$x_i \longmapsto b_i$$

Věta: (o Noetherovské normalizaci)
Nechť K je nekonečné těleso a A kon. gen. K-algebra.
Potom $\exists\ y_1,\dots,y_m \in A$ t.ž.
1) $y_1,\dots,y_m$ jsou algebraicky nezávislé
2) A je konečná $K[y_1,\dots,y_m]$-algebra
podalgebra gen. $\{y_1,\dots,y_m\}$

Lemma A: Nechť $C \subseteq B \subseteq A$ jsou okruhy.
1) Je-li B konečná C-algebra a A kon. B-algebra, pak A je konečná C-algebra.
2) Je-li A kon. B-algebra, pak každý prvek z A je kořenem nějakého polynomu $x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ s koef. v B
(A je integrální nad B)

3) Je-li $a \in A$ kořenem polynomu $x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ s koef. v B, pak $B[a]$ je konečná B-algebra.

Důkaz: 1) $\left.\begin{array}{l} A = Ba_1, \dots, Ba_m \\ B = Cb_1, \dots, Cb_n \end{array}\right\} A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C a_j b_i$

3) $B[a] = B + Ba + \dots + Ba^{n-1}$

2) Pro $a \in A$ uvažujme zobr. $\begin{array}{l} A \to A \\ b \mapsto ab \end{array}$

Ukážeme, že a je kořenem char. pol. tohoto homo B-modulů
Nechť $A = Ba_1 + \dots + Ba_n$ a nechť $aa_i = \sum_j b_{ij} a_j$

prvky jednotkové matice

$$\sum_j (a\delta_{ij} - b_{ij}) a_j = 0$$

$$(aE - B)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

Ozn. $M = aE - B$, M^A matice tvořena alg. doplňky a transponovaná.
Platí
$$(\det M) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = M^A \cdot \underbrace{M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{0} = 0$$

Tedy $(\det M) a_i = 0$ a $1 \in Ba_1 + \dots + Ba_n \Rightarrow (\det M) \cdot 1 = 0$
Hledaný polynom je $\det M$. (pouze píšu v proměnné a)

Lemma B: Nechť $0 \neq f \in K[x_1, \dots, x_n]$ stupně d. Potom $\exists$ záměna proměnných (K je nekonečné)
$$x_i' = x_i - \alpha_i x_n \qquad i = 1, \dots, n-1$$
$$\text{t.ž. } f = c \cdot x_n^d + \underbrace{\dots}_{\substack{\text{pol. v } x_1', \dots, x_{n-1}', x_n \\ \text{nižšího stupně}}} \qquad 0 \neq c \in K$$

Důkaz: $(x_1' + \alpha_1 x_n, \dots, x_{n-1}' + \alpha_{n-1} x_n)$ - uvažme
Jak vypadá koef. u x_n^d? - Je to nenulový pol. v koef. $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$

(nechť F je část f stupně d, pak tento pol. je $F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$)

Protože je K nekonečné, $\exists$ volba $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ tak, že tento koef. je nenulový

Důkaz věty: Nechť A je generovaná $a_1, \dots, a_n$ a uvažme $K[x_1, \dots, x_n] \to A$ t.ž. $x_i \mapsto a_i$. Ozn. I jako jádro. Pokud $I = 0$, pak lze volit $y_1 = a_1, \dots, y_n = a_n$. Nechť $0 \neq f \in I$. Případnou záměnou x_i a a_i (podle Lemmatu B) můžeme předp., že
$f = x_n^d + \text{zbytek}$, kde $d = \deg f$.

Nechť $K[a_1, \dots, a_{n-1}]$ je konečná $K[y_1, \dots, y_m]$-algebra, kde $y_1, \dots, y_m$ jsou alg. nezávislé, což můžeme induktivně předp.

Jelikož a_n je kořenem normovaného pol. s koef. v $K[a_1, \dots, a_{n-1}]$, tak $K[a_1, \dots, a_n]$ je konečná $K[a_1, \dots, a_{n-1}]$-algebra.
Dle lemmatu A již odsud plyne znění věty. $\square$

Lemma C: Nechť A je těleso a $B \subseteq A$ podokruh.
Je-li A konečná B-algebra, pak B je rovněž těleso.

Důkaz: Nechť $0 \neq b \in B$. Jelikož $b^{-1} \in A$, tak $\exists$ pol. s koef. v B $x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$, jehož je b^{-1} kořenem. Po dosazení a vynásobení b^{n-1}:

$$b^{-1} + \underbrace{b_{n-1} + b_{n-2}b + \dots + b_1 b^{n-2} + b_0 b^{n-1}}_{\in B} = 0$$

$\Rightarrow b^{-1} \in B$.

Lemma D: Nechť K je těleso s nekonečně mnoha prvky. Je-li kon. gen. K-algebra A tělesem, pak je konečná nad K.

Důkaz: Podle Noether. normalizace $\exists$ alg. nezávislé $y_1, \dots, y_m$ t.ž. A je konečná $K[y_1, \dots, y_m]$-algebra. Podle lemmatu C je $K[y_1, \dots, y_m]$ těleso a tedy nutně $m = 0$. $\square$

Důkaz Hilbertovy věty o nulách.

1) Prvně dk., že $m = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ je maximální ideál, kde $P = (a_1, \dots, a_n)$. To je proto, že m je jádrem surj. homo $K[x_1, \dots, x_n] \to K$
$$f \longmapsto f(P)$$
Nechť naopak m je nějaký (libo.) maximální ideál v $K[x_1, \dots, x_n]$.
$$K \hookrightarrow K[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \underbrace{K[x_1, \dots, x_n]/m}_{\text{těleso}} = A$$
$$a_i \longmapsto a_i \longmapsto a_i + m \quad (x_i + m)$$
Podle lemmatu D je A konečná K-algebra (protože A je kon. gen.)
Protože je K alg. uzavřené je tato složení izomorfismus.
Nechť a_i je vzor $x_i + m \in A$. Tzn. $x_i - a_i \in m$, tedy $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subseteq m$. Protože je $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ max., musí se rovnat.

2) Dokážeme z 1). J je vlastní, tedy leží v nějakém max. ideálu m.
$J \subseteq m \implies V(J) \supseteq V(m) = \{P\}$

3) $I(V(J)) \supseteq \sqrt{J}$ jednoduché
$I(V(J)) \subseteq \sqrt{J}$: nechť $f \in I(V(J))$, ukážeme, že $f^n \in J$.
Přejdeme k lokalizaci (přidáváním inverze k prvku f)
$$K[x_1, \dots, x_n]_f \cong \big(K[x_1, \dots, x_n]\big)[t] \big/ (tf - 1)$$

$$\begin{tikzcd}
K[x_1, \dots, x_n] \arrow[d] \arrow[r, "f \mapsto u"] & A \\
K[x_1, \dots, x_n][t] \arrow[d] \arrow[ur, "t \mapsto u^{-1}"'] & \\
K[x_1, \dots, x_n][t] / (tf-1) \arrow[uur, dashed, "\exists!"'] &
\end{tikzcd}$$
(u je jednotka v A)

zlomky tvaru $\frac{g}{f^n}$

Ozn. $B = k[x_1,\dots,x_n]$

$B_f = k[x_1,\dots,x_n]_f \subseteq k(x_1,\dots,x_n)$

$J \subseteq B$ obsahuje f^n $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{B_f \cdot J}_{\text{ideál v } B_f \text{ generovaný } J} \subseteq B_f$ obsahuje 1

("$\Rightarrow$" zřejmé,
"$\Leftarrow$" $1 \in B_f \cdot J$ umíme zapsat jako $\frac{g}{f^n}$ $\in J$ n lib.
tj. $g = f^n \in J$)

Uvažujme o B_f jako o $(k[x_1,\dots,x_n])[t]/(tf-1)$
Máme ideál $\underbrace{(k[x_1,\dots,x_n])[t] \cdot J + (tf-1)}_{\text{vzor } B_f \cdot J \text{ při projekci}} \subseteq B_f$

Máme $f^n \in J \Longleftrightarrow 1 \in B_f \cdot J + (tf-1)$ $\left(= \text{ozn. } \tilde{J}\right)$

Podle 2) to nastane, právě když $V(\tilde{J}) = \emptyset$
$(x_1,\dots,x_n,t) \in V(\tilde{J}) \Longleftrightarrow (x_1,\dots,x_n) \in V(J)$
$t \cdot f(x_1,\dots,x_n) = 1$
Protože $f = 0$ na $V(J)$, je $V(\tilde{J}) = \emptyset$.

Polynom. fce a zobr. 16.3.

Def: Nechť V je afinní varieta v $\mathbb{A}^n_k$. Pol. fce na V je zobr. $f: V \to k$ t.ž. $\exists$ pol. $F \in k[x_1,\dots,x_n]$ t.ž. $f = F|_V$

Pro chov. pol. $F, G \in k[x_1,\dots,x_n]$ platí $F|_V = G|_V$, právě když
$(F-G)|_V = 0 \Longleftrightarrow F - G \in I(V)$

$$\begin{tikzcd}
k[x_1,\dots,x_n] \arrow[r] \arrow[d] & k[V] \\
k[x_1,\dots,x_n]/I(V) \arrow[ur, dashed, "\cong"] &
\end{tikzcd}$$

kde $k[V]$ je okruh všech pol. fcí na V

$k[V]$ se nazývá <u>souřadnicový okruh</u> variety V.

Př. $k[A_k^n] = k[x_1,\dots,x_n]/0 \cong k[x_1,\dots,x_n]$

~~Lemma~~

Def.: Algebra A se nazývá redukovaná, jestliže
$$\forall x \in A: x^n = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Lemma: Algebra $k[x_1,\dots,x_n]/I$ je redukovaná, právě když I je radikálový.

Důkaz: "$\Rightarrow$" A je redukovaná $(a+I)^n \neq 0 \longrightarrow a \notin I$

$a^n + I \neq 0 \longrightarrow a^n \notin I$

"$\Leftarrow$" předp. $\sqrt{I} \subseteq I$ (druhá inkluze platí vždy)

$(a+I)^n = 0$

$a^n + I = 0 \Rightarrow a^n \in I \Rightarrow a \in \sqrt{I} \subseteq I \Rightarrow a + I = 0$

Důsl.: Souřadnicový okruh $k[V]$ afinní variety je redukovaná k-algebra.

Máme bijekci $J \longmapsto \pi^{-1}(J)$

$$\left\{\begin{matrix}\text{radikálové} \\ \text{ideály} \\ J \subseteq k[V]\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{radikálové ideály} \\ I(V) \subseteq J \subseteq k[x_1,\dots,x_n]\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{afinní} \\ \text{variety} \\ W \subseteq V\end{matrix}\right\}$$

$\overset{\shortparallel}{k[x_1,\dots,x_n]/I(V)}$

$$\{\text{prvoideály } J \subseteq k[V]\} \overset{\cong}{\longleftrightarrow} \{\text{ireducibilní afinní variety } W \subseteq V\}$$

$$\{\text{maximální ideály } J \subseteq k[V]\} \overset{\cong}{\longleftrightarrow} \{\text{body } P \in V\}$$

~~Jak získat V z $k[V]$?~~

• Jak získat V z $K[V]$?

$K[V]$ je kon. gen. redukovaná K-algebra

Nechť A je lib. kon. gen. redukovaná K-algebra
Zvolme generátory $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\pi : K[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow A$$
$$x_i \longmapsto a_i$$

a ozn. $I = \operatorname{Ker} \pi$.
Protože $A \cong K[x_1, \dots, x_n]/I$ je redukovaná, je I radikálový.

Tvrzení: $K[V(I)] \cong A$

Důkaz: $K[V(I)] = K[x_1, \dots, x_n]/\underbrace{I(V(I))}_{= \sqrt{I} = I} \cong A$

ideál všech nulových na $V(I)$

Polynomiální zobr.: $V \subseteq A^n_K$ a $W \subseteq A^m_K$ nechť jsou afinní variety
$x_1, \dots, x_n$ — souř. na A^n_K
$y_1, \dots, y_m$ — souř. na A^m_K

Def.: Zobr. $f: V \to W$ se nazývá polynomiální, jestliže $\exists F_1, \dots, F_m \in K[x_1, \dots, x_n]$ t.ž.
$$\forall P \in V : f(P) = (F_1(P), \dots, F_m(P)) \in W$$

Lemma: Zobr. $f: V \to W$ je polynomiální, právě když
$f_j = y_j \circ f : V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{y_j} K$ je polynomiální fce

Dk. "$\Rightarrow$" zřejmé
"$\Leftarrow$" $f_j = F_j|_V \rightsquigarrow f = (F_1, \dots, F_m)|_V$

Lemma: Každá polynomiální zobr. je spojité v Zariského topologii.

Dk: Uzavřené podmn. W jsou tvaru $Z = V(J)$, kde $I(W) \subseteq J$
Platí $P \in f^{-1}(Z) \iff f(P) \in Z \iff h(f(P)) = 0 \quad \forall h \in J$

$\iff h(F_1(P), \dots, F_n(P)) = 0 \quad \forall h \in J$

$\iff \underbrace{h \circ (F_1, \dots, F_n)}_{\text{pol. v } K[x_1, \dots, x_n]} (P) = 0$

je afinní varieta $\Rightarrow$ uzavřená

Př. $f: A_k^1 \longrightarrow C_0$ kde $C_0 = \{(x,y) \mid y = x^2\}$ je parabola
$g: C_0 \longrightarrow A_k^1$

$f(t) = (t, t^2)$
$g(x,y) = x$ jsou vzáj. inverz. pol. zobr.

Def: Řekneme, že V a W jsou izomorfní, jestliže $\exists\ f: V \to W,\ g: W \to V$ pol. zobr. t.ž. $g \circ f = id_V$, $f \circ g = id_W$

Př. Afinní přímka A_k^1 a parabola C_0 jsou izomorfní

Lemma: Každé polynomiální zobr. $f: V \to W$ definuje předpisem
$f^*(g) = g \circ f$
homomorf. algeber $f^*: K[W] \to K[V]$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^* g"'] & W \arrow[d, "g"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Dk: $f^*(g)$ je polynomiální
$f^*(g_1 + g_2) = (g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$

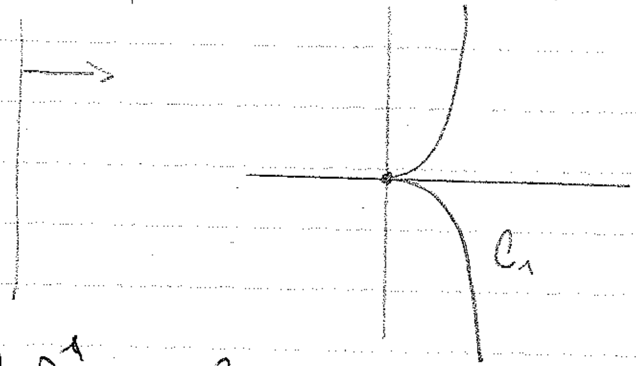
Důsledek: Izomorfní variety mají izomorfní souřadnicové algebry.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\cong"] & W \arrow[l, bend right, "g"'] \end{tikzcd} \qquad K[V] \cong K[W]$$

$f \circ g = id_W \qquad K[W] \xrightarrow{f^*} K[V] \xrightarrow{g^*} K[W]$

$h = \underbrace{(f \circ g)^*(h)}_{id^*(h)} = h \circ f \circ g = (h \circ f) \circ g = g^*(h \circ f) = g^*(f^*(h))$

Př. Semikubická Parabola $C_1=\{(x,y)\in A_k^2 \mid y^2=x^3\}$



Pol. zobr. $f: A_k^1 \longrightarrow C_1$
$t \longmapsto (t^2,t^3)$ které je bijekce, spojité a není $\cong$.
(homeomorf.)

$$k[C_1] \xrightarrow{f^*} k[A_k^1]$$
$$k[x,y]/(y^2=x^3) \qquad k[t]$$

tedy x $\quad \bar{x} \longmapsto t^2$
$\bar{y} \longmapsto t^3$

Obrazem f^* je $k\{1,t^2,t^3,\dots\}$ (podmodul gen. $\forall$ monom. kromě t)
(t není v obrazu)
a tedy f^* není izom. $\Rightarrow$ f není izom.

Věta. Nechť $\varphi: k[W] \longrightarrow k[V]$ je homomorf k-algeber. Potom $\exists$ právě jedno polynomiální zobr. $f: V \to W$ t.ž. $f^*=\varphi$.

Důkaz. $V\subseteq A_k^n$, $W\subseteq A_k^m$ $\quad$ Nechť $\bar{y}_i\in k[W]\cong k[y_1,\dots,y_m]/I(W)$
$(x_1,\dots,x_n)$ $\quad (y_1,\dots,y_m)$ $\quad$ jsou třídy určené $y_i\in k[y_1,\dots,y_m]$

$\varphi(\bar{y}_i)\in k[V] \cong k[x_1,\dots,x_n]/I(V)$
Nechť $F_i\in k[x_1,\dots,x_n]$ je nějaký reprezentant $\varphi(\bar{y}_i)$.
Potom $f=(F_1,\dots,F_m)|_V$ je polynomiální zobr.
Ukážeme, že jeho obraz leží ve W: nechť $G\in I(W)$ a $P\in V$
stačí dk., že $G(F_1(P),\dots,F_m(P))=0$

$F_i(P)=\varphi(\bar{y}_i)(P)$

$$G(F_1(P),\dots,F_m(P)) = G(\varphi(\bar{y}_1),\dots,\varphi(\bar{y}_m))(P) = \varphi(G(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_m))(P)$$

φ je hom. algeber
G je polynom

$\bar{y}_i = y_i|_W$
$G(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_m)=G(y_1,\dots,y_m)|_W$
$=G|_W=0$

Máme $f: V \to W$

$$f^* \overset{?}{=} \varphi \quad : k[W] \to k[V]$$

gen $\bar{y}_i$

stačí ověřit na $\bar{y}_i$

$$\left.\begin{aligned} f^*(\bar{y}_i) &= \bar{y}_i \circ f = y_i \circ f = f_i \\ \varphi(\bar{y}_i) &= f_i \end{aligned}\right\} \text{na } V$$

Jednoznačnost také plyne z toho, že $k[W]$ je generovaná $\bar{y}_i$.

Důkaz (pokus 2.): $f^*: k[W] \to k[V]$ 18.3.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[dr] & W \arrow[d, "\bar{y}_i \text{ (zadání souř. fcí)}"] \\ & k \end{tikzcd}$$

$$\varphi: k[W] \to k[V]$$

Nutně musíme vzít $f_i = \varphi(\bar{y}_i)$ (jednozn.)

$$f = (f_1, \dots, f_m): V \to A_k^m$$

$$f^*(\bar{y}_i) = f_i = \varphi(\bar{y}_i), \; \bar{y}_i \text{ generují } k[V] \Rightarrow f^* = \varphi$$

a předp., že $f: V \to W$; $G \in I(W)$

musíme ukázat, že $G \circ f = 0$

$$G \circ f = G(f_1, \dots, f_m) = G(\varphi(\bar{y}_1), \dots, \varphi(\bar{y}_m)) = \quad \text{G polynom, } \varphi \text{ homo}$$

$$= \varphi(\underbrace{G(y_1, \dots, y_m)}_{0}) \qquad id = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m): W \to A_k^m$$

$$= \varphi(0) = 0$$

□

Máme $\left\{\begin{matrix}\text{afinní variety}\\ \text{a polynom.}\\ \text{zobr. mezi nimi}\end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{(funktor)}]{F} \left\{\begin{matrix}\text{redukované kon. gen.}\\ \text{K-algebry a jejich}\\ \text{homomorfismy}\end{matrix}\right\}$

$$\begin{matrix} V & & K[V] \\ \downarrow & \longmapsto & \uparrow \\ W & & K[W] \end{matrix}$$

(vzáj. jednozn. korespondence) zleva doprava

→ F je kontravariantní funktor

Ten se nazývá (kontravariantní) ekvivalence, jestliže $\exists$ G v opačném směru t.ž. $G \circ F(V) \cong V$, $F \circ G(A) \cong A$ (přirozeně)

G(A) jsme již zkonstruovali

$A \cong K[x_1, \dots, x_n]/J$ ← zafixujeme pro každou algebru A

$G(A) = V(J)$

$\underbrace{F \circ G(A)}\cong A$

$K[x_1, \dots, x_n]/\underbrace{I(V(J))}_{J} \cong A$

G na homomorfismech

$$\begin{matrix} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \cong & & \cong \\ K[G(A)] & \xrightarrow{\exists \psi} & K[G(B)] \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$G(A) \xleftarrow[\exists!\, G(\varphi)]{} G(B)$$

To nám zadává funktor G

$F \circ G(A) \cong A$ už jsme ukázali

$G \circ F(V) \cong V$

$K[G(K[V])] \underset{\text{nahoře}}{\overset{\cong}{\longleftrightarrow}} K[V]$ $\quad K[G\_] = F \circ G$

$G(K[V]) \underset{\exists!}{\overset{\cong}{\longleftrightarrow}} V$

Shrnutí: $F: \hom(V,W) \xrightarrow{\cong} \hom(k[W], k[V])$

+ pro každé A $\exists V$ t.ž. $A \cong k[V]$ $\Rightarrow$ F je ekvivalence

Věta: Množinový součin afinních variet

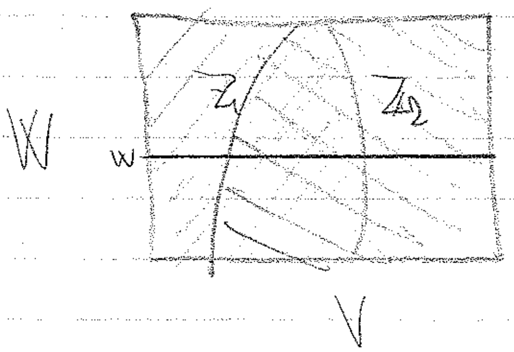
$$\begin{matrix} V \subseteq \mathbb{A}^n_k \\ W \subseteq \mathbb{A}^m_k \end{matrix} \longrightarrow V \times W \subseteq \mathbb{A}^n_k \times \mathbb{A}^m_k = \mathbb{A}^{n+m}_k$$

(lze chápat jako tenzorový součin oborů integrity)

je afinní varieta. Jsou-li obě V, W ireducibilní, pak také $V \times W$ je ireducibilní

Důkaz: $V = V(f_1, \dots, f_r)$ $\quad f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$
$W = V(g_1, \dots, g_s)$ $\quad g_j \in k[y_1, \dots, y_m]$ $\Rightarrow k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$

$\Rightarrow V \times W = V(f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s)$



$$\bigcap_{w \in W} p_1\Big(\underset{\substack{\cong \\ V}}{(V \times \{w\})} \cap Z_i\Big) = \underset{\substack{\text{uzav.} \\ \cap \\ V}}{V_i} = \{v \in V \mid \{v\} \times W \subseteq Z_i\}$$

z ireducibility W platí $V = V_1 \cup V_2 \Rightarrow V = V_j$ pro jedno z $j = 1, 2$
(pro každé $v \in V$ je $\{v\} \times W$ podmn. jedné z Z_1, Z_2)
$$\Downarrow$$
$$V \times W = Z_j$$

Racionální zobr. mezi ired. varietami

Nechť V je ired. varieta $\Rightarrow I(V)$ je prvoideál a $K[V]$ obor integrity.

Def.: Těleso racionálních fcí na varietě V je rozkladové těleso souřadnicového okruhu $K[V]$. Značíme jej $K(V)$.

Pro polynomy $G, H \in K[x_1, \dots, x_n]$, kde $H \notin I(V)$ (H není nulový na varietě) dostáváme prvek $\dfrac{G+I(V)}{H+I(V)} \in K(V)$

Dostáváme homomorfismus

$$K[x_1, \dots, x_n]_{I(V)} \longrightarrow K(V) \qquad \frac{G}{H} \longmapsto \frac{G+I(V)}{H+I(V)}$$

lokalizace v prvoideálu $I(V)$

který je surjektivní. Jeho jádro je maximální ideál

$$M = \left\{ \frac{G}{H} \,\middle|\, G \in I(V), H \notin I(V) \right\}$$

Tedy $K(V) \cong K[x_1, \dots, x_n]_{I(V)} / M$.

Speciálně $K(\mathbb{A}^n_K) = K(x_1, \dots, x_n)$

Def. Bod $P \in V$ se nazývá regulárním bodem racionální fce f, jestliže $\exists\, g, h \in K[x_1, \dots, x_n]$ t.ž. $f = \frac{g}{h}$ a $h(P) \neq 0$.

Definiční obor f je $\operatorname{dom}(f) = \{P \in V \mid P \text{ je regulární bod } f\}$

Každá racionální fce f určuje zobr. $\operatorname{dom}(f) \to \mathbb{K}$

$$P \longmapsto \frac{g(P)}{h(P)}$$

pro reprezentaci $f = \frac{g}{h}$ kde $H(P) \neq 0$

$$f = \frac{g}{h} = \frac{g'}{h'} \iff gh' = g'h \implies gh'(P) = g'h(P) \implies$$

$$\implies g(P)\underset{\neq 0}{h'(P)} = g'(P)\underset{\neq 0}{h(P)} \implies \frac{g(P)}{h(P)} = \frac{g'(P)}{h'(P)}$$

Lemma: Nechť $\emptyset \neq U \subseteq V$ je oter. podmn. Racionální fce $f \in K(V)$ s $\mathrm{dom}(f) \supseteq U$ jsou v bijekci se zobr. $\varphi: U \to K$ splňujícími

- pro každý bod $P \in U$ $\exists$ pol. zobr. $g, h \in K[V]$, $h(P) \neq 0$ t.ž. $\frac{g}{h} = \varphi$, kde jsou obě strany definované

Dk: Ke zobr. φ musíme najít $f \in K(V)$. Protože φ je lokálně podíl $\frac{g}{h}$, definujeme $f = \frac{g}{h}$. Jestliže v okolí P platí $\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'}$ (jako zobr. $V \overset{\text{někde defin.}}{\dashrightarrow} K$)

Chceme ukázat, že $\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'}$ jako prvky $K(V)$, tj. že $g \cdot h' = g' \cdot h$ jako prvky $K[V]$. Podle předch. se ale rovnají na okolí bodu P. Protože každá neprázd. oter. podmn. V je hustá ve V, musí tato rovnost platit na celém V.

ireducibilita = průnik 2 neprázd. oter. je neprázd. = neprázd. ot. jsou husté

Př. V A^4_K uvažujme af. varietu $V = V(x_1x_4 - x_2x_3)$
Na V máme racionální fci $\frac{x_1}{x_2}$ ... dobře def. pro $x_2 \neq 0$

$$\overset{\parallel}{}$$

$$f = \frac{x_3}{x_4} \ldots \text{ — " — } x_4 \neq 0$$

$\mathrm{dom}(f) \supseteq \{P \in V \mid x_2 \neq 0 \text{ nebo } x_4 \neq 0\}$

ukážeme rovnost: $\nexists$ reprezentace $f = \frac{G + I(V)}{H + I(V)}$ kde $G, H \in K[x_1, \ldots, x_4]$, $H \in I(V)$ kde H je nenulové na $\{x_2 = 0, x_4 = 0\}$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{G + I(V)}{H + I(V)} \quad ; \quad x_1H - x_2G \in I(V) = (x_1x_4 - x_2x_3)$$

$$x_1H - x_2G = k \cdot (x_1x_4 - x_2x_3)$$

dosazením $x_2 = 0, x_4 = 0$

$$x_1 H = 0 \implies H(x_1, 0, x_3, 0) = 0$$

Věta: Pro racionální fci $f \in K(V)$ platí
1) dom(f) je neprázdná ot. → hustá ve V
2) dom(f) $= V$, právě když $f \in K[V]$ (tedy f je polynom)
3) pro každou fci $h \in K[V]$: dom(f) $\supset V_h = V \setminus V(h)$
$$\Longleftrightarrow$$
$$f \in \underbrace{K[V]_h}_{\text{lokalizace podle } h} = K[V][h^{-1}] = \left\{ \frac{g}{h^n} \mid g \in K[V], n \in \mathbb{N} \right\}$$

Pokrač. Př. $\Rightarrow H(x_1, 0, x_3, 0) = 0$ 23.3.
$$H = x_2 K + x_4 L$$

$$H(0, x_2, 0, x_3) = x_2 K(0, x_2, 0, x_4) + x_4 L(0, x_2, 0, x_4)$$
nemůže být nenulová na $\{(x_2, x_4) \mid x_2 \neq 0 \text{ nebo } x_4 \neq 0\}$

$$H(0, x_2, 0, x_4') = x_2^d + \text{lot} \quad \text{(lin. změna souřadnic)}$$
→ pro lib. x_4' $\exists$ alespoň jedno x_2 t.ž. $H(0, x_2, 0, x_4') = 0$

⇒ H nemůže být nenulová na dom f.

Důsledek: $\nexists$ (nekonst.) polynom $H \in K[x_1, x_2]$, pro který $V(H) = \{(0,0)\}$

Důkaz: 1) definujeme ideál jmenovatelů f
$$D_f := \{ h \in K[V] \mid f \cdot h \in K[V] \} \subseteq K[V]$$

Platí $D_f = \{ h \in K[V] \mid \exists g \in K[V] : f = \frac{g}{h} \} \cup \{0\}$

Potom dom $f = V \setminus V(D_f)$ (doplněk uz. mn. ve V, tedy otevřená)

Př. v předp. příkladě je $D_f = (x_2, x_4)$

2) $\mathrm{dom}\, f = V \iff f \in k[V]$ $\quad I(V) = \mathrm{Ker}\, p$

viz 1) $V(D_f) \cong V$

$V(D_f) = \emptyset$ $\quad k[x_1, \dots, x_n] \supseteq p^{-1} D_f$

Hilb. věta o nulách $\quad f = \frac{g}{1},\ g \in k[V]$ $\quad \xrightarrow{p} k[V] \supseteq D_f$

$1 \in D_f \iff 1 \in p^{-1} D_f$

(tj. jednička je možný jmenovatel)

Protipř. použití Hilb. věty je podstatné

nad $\mathbb{R}$: $V(\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}) \ni \frac{1}{x^2+1} = f$

$\mathrm{dom}\, f = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ a $f \notin k[\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}]$

---

3) $\mathrm{dom}\, f \supseteq V_h \iff V \setminus V(D_f) \supseteq V \setminus V(h) \iff V(D_f) \subseteq V(h)$

$\iff I(V(D_f)) \supseteq (h)$ $\quad I(X) \supseteq J \iff X \subseteq V(J)$

$\iff h \in I(V(D_f)) = \sqrt{D_f}$

$\iff \exists n: h^n \in D_f \iff f = \frac{g}{h^n}$ $\quad \square$

Strukturní svazek (sheaf) aff. variety

je soubor okruhů (k-algeber) pro každou otevřenou podmn. $U \subseteq V$

$\mathcal{O}(U) = \{ f \in k(V) \mid f$ je regulární ve všech bodech $U \}$

$\mathrm{dom}\, f \supseteq U$

$\mathcal{O}: \{$ot. mn. $U \subseteq V\} \longrightarrow \{k\text{-algebry}\}$

splňuje 1) $\mathcal{O}$ je předsvazek (presheaf): jsou dány homomorfismy

$$\varphi_{U_2,U_1}: \mathcal{O}(U_1) \to \mathcal{O}(U_2) \quad \text{pro } U_2 \subseteq U_1$$
$$f \longmapsto f$$

t.ž. $\varphi_{U,U} = id$

$\varphi_{U_3,U_2} \circ \varphi_{U_2,U_1} = \varphi_{U_3,U_1}$ ($(\mathcal{O},\varphi)$ je kontravar. funktor)

2) předsvazek $\mathcal{O}$ je svazek: Je-li $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ a $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ mají vlast.

$\forall \alpha,\beta \quad \varphi_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\alpha}(f_\alpha) = \varphi_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\beta}(f_\beta)$ pak $\exists!\ f \in \mathcal{O}(U)$

t.ž. $\varphi_{U_\alpha,U}(f) = f_\alpha$

(plyne z nějakého předešlého lemmatu $\mathcal{O}(U) = \{f: U \to K \mid f$ je lok. racionální$\}$)

Předch. věta říká: $\mathcal{O}(V) = K[V]$

$\mathcal{O}(V_h) = K[V]_h$

Lok. okruh variety V v bodě P

$\mathcal{O}_{V,P} = K[V]_{m_P}$

pro V ired. $= \{f \in K(V) \mid f$ je regulární v bodě $P\}$

kde $m_P = \{g \in K[V] \mid g(P) = 0\}$ je maximální ideál v $K[V]$

(přidávám inverze k prvkům, co v tom ideálu nejsou)

$\mathcal{O}_{V,P}$ je lokální okruh - má jediný max ideál

$M_P = \{\frac{g}{h} \in \mathcal{O}_{V,P} \mid g(P) = 0,\ g \in m_P\}$

Racionální zobr.

Stále předp., že V, W jsou ireducibilní. • rac. zobr. $f: V \dashrightarrow A^m$ je m-tice rac. zobr. $V \to A^1$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, $f_i \in K(V)$

$$\operatorname{dom} f = \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{dom} f_i \quad \text{opět ot. nepr. podmn. } V$$

• rac. zobr. $f: V \dashrightarrow W$ je rac. zobr. $V \dashrightarrow A^m$ t.ž. $f(\operatorname{dom} f) \subseteq W$

Skládání rac. zobr.: $V \overset{f}{\dashrightarrow} W \overset{g}{\dashrightarrow} X$

může se stát, že $f(\operatorname{dom} f) \cap \operatorname{dom} g = \emptyset$

Př. $A^1 \longrightarrow A^2 \longrightarrow A^1$

$x \longmapsto (x, 0)$

$(x, y) \longmapsto x/y$

Algebraicky: $f: V \dashrightarrow W$

chceme $f^*: K(W) \to K(V)$ definovat předpisem $f^*(g) = g \circ f$ (nejde vždy)

$f^*: K[W] \longrightarrow K(V)$ je vždy dobře def. $(W \overset{f}{\dashrightarrow} V \overset{g}{\dashrightarrow} K)$

$g \longmapsto g \circ f$

($g \circ f$ je racionální funkce, jmenovatel je součin mocnin jmenovatelů f_i)

$$\begin{tikzcd} K[W] \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & K(V) \\ K(W) \arrow[ur, dashed, "\exists \text{ právě když } f^* \text{ je injektivní}"'] & \end{tikzcd}$$

Chceme pochopit, kdy $f^*: K[W] \to K(V)$ je injekt.

$g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0$

$\Updownarrow$

$\mathrm{Im}(W) = f(\operatorname{dom} f) \subseteq V(g)$

f je injektivní $\Leftrightarrow$ $f(\operatorname{dom} f)$ není obsaženo v žádné vlastní uzav. podmn.

- $f^*(g)=0 \Rightarrow f(\mathrm{dom} f) \subseteq V(g)$
- $f(\mathrm{dom} f) \subseteq V(g_1,\dots,g_n) \subseteq V \Rightarrow f^*(g_1)=0$
  $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \rotatebox{90}{$\subseteq$}\ V(g_1)^{(1)}$

Ekvivalentně: f^* je injektivní $\Leftrightarrow$ $f(\mathrm{dom} f)$ je hustá podmn. W

Def.: Racionální zobr. $f: V \dashrightarrow W$ se nazývá dominantní, jestliže $f(\mathrm{dom} f)$ je hustá podmn. W. Ekvivalentně $f^*: K[W] \to K(V)$ je injektivní.

Lemma: Každé dominantní zobr. $f: V \dashrightarrow W$ indukuje homomorf. $f^*: K(W) \to K(V)$ těles rac. fcí.

Dk. $f^*\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{f^*(g)}{f^*(h)}$

Lemma: Jsou-li $f: V \dashrightarrow W$ a $g: W \dashrightarrow X$ dvě dominantní zobr., pak $g\circ f: V \dashrightarrow X$ má smysl a je dominantní.

Dk. $g\circ f = (f^*(g_1), \dots, f^*(g_r))$

$$\begin{tikzcd}
(g\circ f)^*: K[X] \arrow[rr] \arrow[dr, "g^*"'] & {\scriptstyle \text{komutuje}} & K(V) \\
& K(W) \arrow[ur, "f^*"'] &
\end{tikzcd}$$

f^* je injektivní protože $K(W)$ je těleso

g^* je injekt., protože g je dominantní

$\Rightarrow (g\circ f)^*$ je injektivní

$\Rightarrow g\circ f$ je dominantní

Tvrzení: Ke každému hom. K-algeber $\varphi: K(W) \to K(V)$ $\exists!$ dominantní zobr. $f: V \dashrightarrow W$ t.ž. $f^* = \varphi$.

Dk. Položme $f=(f_1,\dots,f_m)$, kde $f_i=\varphi(\overline{y_i})$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed] \arrow[dr, dashed, "f_i"'] & W \arrow[d, "\overline{y_i}"] \\ & k \end{tikzcd}$$

To, že $f(\operatorname{dom} f)\subseteq W$ se ověří stejně jako pro případ pol. zobr., stejně $f^*=\varphi$.

Ukážeme, že f je dominantní $f^*: k[W] \longrightarrow k(V)$

$$\begin{tikzcd} k[W] \arrow[r] \arrow[dr, hook] & k(V) \\ & k(W) \arrow[u, "f^*=\varphi"'] \end{tikzcd}$$

□

• $V \overset{f}{\dashrightarrow} W \overset{g}{\dashrightarrow} X$

f dominantní $\iff f(\operatorname{dom} f)\subseteq W$ je hustá

$g\circ f$ je def. na $f^{-1}(\operatorname{dom} g)$ je otevřená + neprázdná

Lemma: Každé racionální zobr. je spojité.

Důkaz: Stačí $f^{-1}(\underset{W\setminus V(r)}{\underset{\|}{W_r}})$ je otevřená.

Pro $P\in\operatorname{dom} f$ platí: $r(f(P))\neq 0 \iff \exists\ \frac{g}{h}=r\circ f: h(P)\neq 0, g(P)\neq 0$

$f^{-1}(W_r)=\bigcup\limits_{\frac{g}{h}=r\circ f} W_h\cap W_g$ □

$\left\{\begin{matrix}\text{ired. afinní variety}\\ \text{a domin. zobr.}\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{kon. gen. rozšíření těles } k\subseteq K\\ \text{a homomorf. zachovávající } k\end{matrix}\right\}$

je kontravariantní ekvivalence kategorií

- stačí pro každé $k\subseteq K$ najít afinní varietu V t.ž. $k(V)\cong K$

nechť $K=k(a_1,\dots,a_n)$. Potom K je rozkladové těleso $k[a_1,\dots,a_n]$, které je kon. gen. k-algebra $\Rightarrow k[a_1,\dots,a_n]\cong k[V]$ pro nějakou af. varietu V, která je ireducibilní, protože $k[a_1,\dots,a_n]$ je obor integrity.

K je rozkladové těleso $k[V]$, tj. $K\cong k(V)$.

Def. Dominantní zobr. $f: V \dashrightarrow W$ se nazývá biracionální (birac. ekvivalence), jestliže $\exists$ dom. zobr. $g: W\dashrightarrow V$ t.ž. $f\circ g=\mathrm{id}$, $g\circ f=\mathrm{id}$.

V takovém případě říkáme, že V a W jsou biracionálně ekvivalentní.

Def. Afinní varieta V se nazývá racionální, jestliže je biracionálně ekvivalentní $\mathbb{A}^m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$.

Důsl.: Ired. af. varieta V je racionální $\iff$ $k(V)$ je čistě transcendentní rozšíření k. $(k(V) \cong k(x_1, \dots, x_m))$

Kvasiafinní variety = ot. podmn. af. variet

- ireducibilní, jestliže je ot. podmn. ired. af. variety
- Omezíme se pouze na ired. kvaziaf. variety $U_1 \subseteq V$, $U_2 \subseteq W$

Morfismus: $f: U_1 \to W$ je rac. zobr. $f: V \dashrightarrow W$ t.ž. $U_1 \subseteq \operatorname{dom} f$

Morfismus: $f: U_1 \to U_2$ je morfismus $f: U_1 \to W$, pro nějž $f(U_1) \subseteq U_2$

Izomorfismus je morfismus, jehož inverze je také morfismus.

Př. $C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \mid x_2^2 - x_1^3 = 0\}$ semikubická parabola

$$f: \mathbb{A}^1 \to C_1 \qquad t \mapsto (t^2, t^3)$$

je morfismus $\mathbb{A}^1 \to C_1$, který není izomorfismem, neboť $\cancel{\mathcal{O}(C_1)} \to \cancel{\mathcal{O}(\mathbb{A}^1)}$ není izom.
$k[C_1] \qquad k[\mathbb{A}^1]$

Ale $f: \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \to C_1 \setminus \{(0,0)\}$ je již izo kvaziaf. variet s inverzí
$$g: C_1 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$$
$$(x, y) \mapsto \frac{y}{x} \qquad (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_2}{x_1}$$

Jinak: $f: \mathbb{A}^1 \to C_1$ je biracionální ekvivalence
$\Rightarrow C_1$ je racionální křivka

Věta: Ireducibilní kvaziafinní varieta $V_h = V \setminus V(h)$ je izomorfní af. varietě, jejíž souřadnicový okruh je izomorfní $k[V]_h$.

Důkaz: Nechť $V \subseteq \mathbb{A}^n$, $J = I(V)$. Nechť $H \in k[x_1,\dots,x_n]$ je nějaký reprezentant $h = H|_V$. Na $\mathbb{A}^{n+1}$ vezměme souřadnice $x_1,\dots,x_n,t$
$J_H = (J \cup \{tH-1\})$.
Dk, že $V(J_H)$ je izo s V_h.

$$V(J_H) = \{(x_1,\dots,x_n,t) \mid (x_1,\dots,x_n) \in V,\ t\cdot H(x_1,\dots,x_n) = 1\}$$

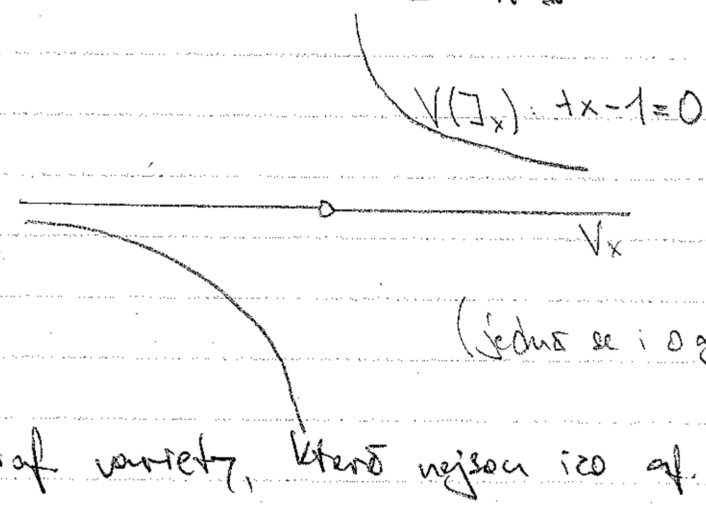
$$\begin{array}{ccc} V_h & \xrightarrow{f} & V(J_H) \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \left(x_1,\dots,x_n, \dfrac{1}{H(x_1,\dots,x_n)}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V_h & \xleftarrow{g} & V(J_H) \\ (x_1,\dots,x_n) & \longleftarrow & (x_1,\dots,x_n,t) \end{array}$$ (vlastně projekce)

$f^*: k[V(J_H)] \longrightarrow \mathcal{O}(V_h)$
$g^*: \mathcal{O}(V_h) \longrightarrow k[V(J_H)]$

jsou vzájemně inverzní a $\mathcal{O}(V_h) \cong k[V]_h$ $\square$

Př.



(jedná se i o graf fce $\frac{1}{H}$ kromě nuly)

Př. $\exists$ kvaziaf. variety, které nejsou izo af. varietám

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, hook] & V \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[dl, shift left, "\bar{g}"] \\ \mathbb{A}^2 \arrow[ur, shift left, "\bar{f}"] & \end{tikzcd}$$
af. varieta

reg. zobr. na $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\frac{k}{l}$, kde l je nenulové na $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$
$\Rightarrow l = \text{konst.} \Rightarrow \frac{k}{l}$ je polynom
$\Rightarrow$ regulární na $\mathbb{A}^2$

$\bar{f}, \bar{g}$ jsou také vzáj. inverzní $\Rightarrow$ nelze
$\bar{g}(\bar{f}(0)) = 0 \Rightarrow g(f(0))$ se pošle na $(0,0) \in \mathbb{A}^2$, což nelze

Pozn. $U \longmapsto \mathcal{O}(U)$ není ekvivalence $\{\text{kvaziaf. var.}\} \longrightarrow \{?\}$

Projektivní variety

Projektivní prostor: V je vp kon. dim. nad k
na $V \setminus \{0\}$ zavedeme $u \sim v \iff \exists \lambda \in k : u = \lambda v$

$$\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\sim \quad \text{proj. prostor dimenze } \dim V - 1$$
$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(k^{n+1})$$

Homogenní souřadnice $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n$
třída uspořádaná $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in k^{n+1}$

Rozklad $\mathbb{P}^n = U_e \cup H_e$
$$U_e = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_e \neq 0\}$$
$$H_e = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_e = 0\} \qquad H_e \cong \mathbb{P}^{n-1}$$

U_e můžeme identifikovat s $\mathbb{A}^n$ $\quad (x_0 : \ldots : x_n) \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_e}, \ldots, \frac{x_n}{x_e}\right)$ $\quad \frac{x_e}{x_e}$ vynecháno

$$\mathbb{P}^n = U_0 \cup \ldots \cup U_n$$

Homogenní polynom $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$, $f(x_0, \ldots, x_n) = \sum a_\alpha x^\alpha$ (multiindex)
stupně d $\qquad \deg \alpha = d$ (d jedané)
$\deg \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$

Důl. vlast.
$$f(\lambda \cdot x_0, \ldots, \lambda \cdot x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n)$$

$$V(f) = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid f(x_0, \ldots, x_n) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$$

Def <u>Projektivní varieta</u> je podmn. $V \subseteq \mathbb{P}^n$ t.ž. $\exists$ mn. T homogenních polynomů $T \subseteq k[x_0, \ldots, x_n]$, pro kterou $V = \bigcap_{f \in T} V(f)$

Př. $H_\ell = V(x_\ell)$ je projektivní varieta.

Def. <u>Gradovaný okruh</u> je okruh S společně s rozkladem $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ na abelovské grupy (vzhl. k součtu) t.ž. platí

násobení v okruhu

$$S_d \cdot S_e \subseteq S_{d+e} \qquad d, e \geq 0.$$

S_d je abelovská grupa

Prvky z S_d nazýváme homogenní stupně d.

Př. Okruh polynomů $S = k[x_0, \ldots, x_n] = \bigoplus_{d \geq 0} k^d[x_0, \ldots, x_n]$

kde $k^d[x_0, \ldots, x_n] = \{ f \in k[x_0, \ldots, x_n] \mid f \text{ homogenní stupně } d \}$

Homogenní ideál I v gradovaném okruhu S je ideál, pro který platí

$$I = \bigoplus_{d \geq 0} (I \cap S_d)$$

Jinak: každý prvek $f \in I$ má jednoznačný rozklad $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_d$ kde $f_i \in I \cap S_i$

Lemma: Pro ideál I v gradovaném okruhu S platí:
1) I je homogenní $\Leftrightarrow$ I je generovaný hom. prvky
2) Je-li I homogenní, pak
I je prvoideál $\Leftrightarrow$ $\forall f, g \in S$ hom. $(f g \in I \Rightarrow f \in I$ nebo $g \in I)$
3) Hom. ideály jsou uzav. na součet, součin a průnik.
4) Radikál homogenního ideálu je homogenní.

mn. T homogenních polynomů určuje homog. ideál $I(T)$ gen. T. 20.3

Proto
$$V(T) = V(I(T)) = V(f_1, \ldots, f_n) \qquad \text{kde } f_i \text{ jsou hom. generátory } I(T).$$

Projektivní variety na $\mathbb{P}^n$ definují tzv. Zariského topologii

Lemma: 1) $V(0) = \mathbb{P}^n \quad V(k[x_0, \dots, x_n]) = \emptyset$

2) $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$

3) $\bigcap_{\alpha \in A} V(I_\alpha) = V\left(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha\right)$

Def: Kvaziprojektivní varieta = ot. podmn. proj. variety.

$$\left\{\begin{matrix}\text{homogenní ideály} \\ I \subseteq k[x_0, x_1, \dots, x_n]\end{matrix}\right\} \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\text{projektivní variety} \\ V \subseteq \mathbb{P}^n\end{matrix}\right\}$$

$I(V)$ = ideál generovaný homog. polynomy f, pro něž $f|_V = 0$

Po zúžení na radikálové ideály nedostáváme bijekci jako v afinním případě:

$$V(k[x_0, \dots, x_n]) = V(x_0, \dots, x_n) = \emptyset$$

Věta: (projektivní věta o nulách)
Nechť k je algebr. uz. těleso. Potom pro homogenní ideál $J \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ platí:

1) $V(J) = \emptyset \iff \sqrt{J} \supseteq (x_0, \dots, x_n)$

2) Jestliže $V(J) \neq \emptyset$, pak $I(V(J)) = \sqrt{J}$

Důkaz: Afinní kužel nad projektivní varietou $V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$

$$\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$\pi(x_0, \dots, x_n) = (x_0 : \dots : x_n)$$

$I \subsetneq k[x_0, \dots, x_n]$ homogenní ideál zadává • proj. varietu $V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$
• af. varietu $V^a(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$

Platí: $V^a(I) = \pi^{-1}(V(I)) \cup \{0\}$

$V^a(I)$ - afinní kužel proj. variety $V(I)$

podle Hilbertovy věty

1) $V(J)=\emptyset \iff V^a(J)\subseteq \{0\} = V^a(x_0,\dots,x_n) \iff (x_0,\dots,x_n)\subseteq I(V^a(J))=\sqrt{J}$

2) Předp., že $V(J)\neq\emptyset$. Potom pro $f\in k[x_0,\dots,x_n]$
$$f\in I(V(J)) \iff f\in I(V^a(J))$$

"$\Rightarrow$": $f=f_1+\dots+f_d$, $\deg f_i=i$ a $f_i|_{V(J)}=0 \Rightarrow f_i|_{V^a(J)}=0$
$\Rightarrow f|_{V^a(J)}=0$

"$\Leftarrow$": $f=f_0+f_1+\dots+f_d$ splňuje $f|_{V^a(J)}=0$
$\forall x\in V^a(J)\ \forall\lambda\in k: f(\lambda x)=0$, tj. $f_0+\lambda f_1(x)+\dots+\lambda^d f_d(x)=0$
protože k je nekonečné, musí být $f_0=f_1(x)=\dots=f_d(x)=0$
$\Rightarrow f_i\in I(V(J))$

$$f\in I(V(J)) \iff f\in I(V^a(J)) \iff f\in\sqrt{J},\ \text{tj. } I(V(J))=\sqrt{J}$$

Důsledek: Máme bijekce

$$\left\{\begin{matrix}\text{homogenní radikálové}\\ \text{ideály } J\subseteq(x_0,\dots,x_n)\end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{\cong} \left\{\begin{matrix}\text{proj. variety}\\ V\subseteq\mathbb{P}^n\end{matrix}\right\}$$
$J\subsetneq k[x_0,\dots,x_n]$

$$\left\{\begin{matrix}\text{homogenní prvoideály}\\ J\subsetneq(x_0,\dots,x_n)\end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{\cong} \left\{\begin{matrix}\text{ired. proj.}\\ \text{variety } V\subseteq\mathbb{P}^n\end{matrix}\right\}$$

$\square$

$\mathbb{P}^n = U_0\cup U_1\cup U_2\cup\dots\cup U_n$ kde $U_i=\{(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{P}^n \mid x_i\neq 0\}$
$=\mathbb{P}^n\setminus V(x_i)$

Věta: $j_i: U_i\longrightarrow\mathbb{A}^n$, $j_i(x_0:\dots:x_n)=\left(\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)$
j_i je homeomorfismus v Zariskiho topologii.

$j_0^{-1}(x_1,\dots,x_n)=(1:x_1:\dots:x_n)$

Důkaz: $V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ uzavřená

$$j_0(U_0 \cap V(f)) = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{A}^n \mid f(1,x_1,\dots,x_n) = 0\}$$
$$= V^a(f(1,-,-,\dots,-))$$

naopak: $V^a(g) \subseteq \mathbb{A}^n$ uzavřená

$$j_0^{-1}(V^a(g)) = \{(x_0:\dots:x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0,\ g(\tfrac{x_1}{x_0},\dots,\tfrac{x_n}{x_0}) = 0\}$$
$$= \{(x_0:\dots:x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0,\ \underbrace{x_0^{\deg g} \cdot g(\tfrac{x_1}{x_0},\dots,\tfrac{x_n}{x_0})}_{\text{hom. pol. } \tilde{g} \text{ stupně } \deg g} = 0\}$$
$$= U_0 \cap V(\tilde{g})$$

Topologicky $V(\tilde{g}) = \overline{j_0^{-1}(V^a(g))}$

Důsledek. Zobr. $\underset{\mathbb{P}^n}{\overset{V}{\cap}} \longmapsto V_0 = \underset{\mathbb{A}^n}{\overset{U_0 \cap V}{\cap}}$ definuje bijekci

$$\left\{\begin{matrix}\text{ired. proj. variety} \\ V \subseteq \mathbb{P}^n,\ V \nsubseteq \underset{H_0}{\overset{\|}{V(x_0)}}\end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{\cong} \left\{\begin{matrix}\text{ired. af. variety} \\ W \subseteq \mathbb{A}^n\end{matrix}\right\}$$

Inverzní zobr. je dáno $W \longmapsto \overline{W}$ uzávěr $W \subseteq \underset{U_0}{\overset{\|}{\mathbb{A}^n}} \subseteq \mathbb{P}^n$ v $\mathbb{P}^n$

Dk.: $V \mapsto V_0 \longmapsto \overline{V_0}$ je opět V: $V = \overline{V_0} \cup (V(x_0) \cap V)$
z ired. a $V \nsubseteq V(x_0) \Rightarrow V = \overline{V_0}$

Př. $C_0 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{A}^2 \mid x_2^2 - x_1(x_1-1)(x_1-2) = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2 \cong U_0$

$C = \{(x_0:x_1:x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid x_0x_2^2 - x_1(x_1-x_0)(x_1-2x_0) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$

Př. 1: $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \mid x^2 - yz = xz - x = 0\}$
Rozložte na sjednocení ireducibilních af. variet.

$$V(x^2-yz,\ x(z-1)) = V(x^2-yz,\ x) \cup V(x^2-yz,\ z-1) =$$
$$= V(-yz,\ x) \cup V(x^2-y,\ z-1) =$$
$$= \underset{k[z]}{V(y,x)} \cup \underset{k[y]}{V(z,x)} \cup \underset{k[x]}{V(x^2-y,\ z-1)}$$

varieta je ired. $\Longleftrightarrow$ ideál je prvoideál

$V(y,x)$ ~ $k[z]$ je obor integrity $\Rightarrow$ prvoideál (y,x)

$$k[x,y,z]/(x^2-y,\, z-1) \cong k[x]$$

$$x \longmapsto x \qquad y \longmapsto x^2 \qquad z \longmapsto 1 \qquad x \longleftarrow x$$

$$f(x,y,z) \longmapsto f(x,x^2,1)$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{A}^2 \\
\mathbb{A}^1 \arrow[ur, "(x^2{,}1)"] \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{A}^3 \supseteq V(x^2-y,\, z-1) \arrow[u, "p_{2,3}"'] \arrow[d, "p_1"] \\
 & \mathbb{A}^1
\end{tikzcd}$$

Př. 2 Je $\{(t^3,t^4,t^5) \in \mathbb{A}^3 \mid t \in k\}$ afinní varieta?

nulující se polynomy: x^4-y^3, $xz-y^2$, x^5-z^3 $\qquad V(x^4-y^3,\, xz-y^2\, \cancel{},\, x^5-z^3) \supseteq X$

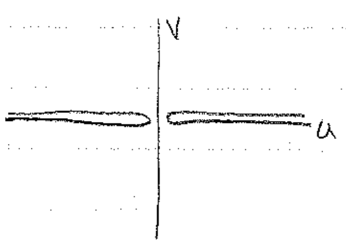
$x^4-y^3=0 \Rightarrow x^4=y^3 \Rightarrow \boxed{x=\left(\frac{y}{x}\right)^3}$ pro $x \neq 0$ (když $x=0 \to y=0,\ z=0$)

$x^4 \cdot \frac{y}{x^4} = y^3 \cdot \frac{y}{x^4} \Rightarrow \boxed{y=\left(\frac{y}{x}\right)^4}$

$xz=y^2 \Rightarrow z = y \cdot \frac{y}{x} = \left(\frac{y}{x}\right)^4 \cdot \frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{z=\left(\frac{y}{x}\right)^5}$

Př. 3 $(x,y) \longmapsto (\overset{u}{\overset{\shortparallel}{xy}}, \overset{v}{\overset{\shortparallel}{y}})$ $\qquad v \neq 0$ ... u jakékoliv

$v = 0$ ... $u = 0$



Obraz polynom. zobr. je vždy sjednocením ot. a uz. podmn.

$\exists x \exists y: u = f_1(x,y)\ \&\ v = f_2(x,y)$

3 Najděte př. polynom. zobr. $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ jehož obraz není ani kvaziafinní varieta

① $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ 1.4.

$(s,t) \mapsto (st, t)$ $\qquad (x,y) \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists s,t: \begin{array}{l} st - x = 0 \\ t - y = 0 \end{array}$

po zafixování x,y se ptáme, jestli $V(st-x, t-y) \subseteq \mathbb{A}^2_{s,t}$ je neprázdná

$\iff 1 \notin (st-x, t-y) \subseteq k[s,t]$ (spočítáme Gröbnerovu bázi)

$f_1 = st - x$
$f_2 = t - y$

$f_1 - s f_2 = (st - x) - (st - sy) = -x + sy = g_1$

$\downarrow y \neq 0$

$(s - \frac{x}{y}, t - y)$ je maximální z tvaru ideálu

I. $y \neq 0$ max. ideál $(s - \frac{x}{y}, t-y)$, proto neobsahuje 1

II. $y = 0$ $\quad \begin{array}{l} g_1 = -x \\ f_2 = t \end{array}$ $\quad$ a) $x \neq 0$, ideál obsahuje $1 \Rightarrow (x,y)$ není v obraze

b) $x = 0$, $1 \notin t$

$\hookrightarrow (x,y) \in \mathrm{Im}(f) \iff (y \neq 0) \vee (y = 0 \;\&\; x = 0)$

tj. $\mathrm{Im}(f) = (\underset{\text{oz.}}{\mathbb{A}^2} - V(y)) \cup \underset{\text{ot.}}{V}(x,y)$

② Ukažte, že obraz $\begin{array}{l} \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2 \\ t \mapsto (t^2-1, t^3-t) \end{array}$ je afinní varieta.

Najděte její ideál.

$(x,y) \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists t: \begin{array}{l} t^2 - 1 - x = 0 \\ t^3 - t - y = 0 \end{array}$ (V okruhu pol. nad 1 proměnnou je každý ideál hlavní.)

$1 \notin (t^2 - 1 - x, t^3 - t - y) \iff$ jsou soudělné $\iff \mathrm{Res} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1-x \\ 1 & 0 & -1 & -y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1-x \\ 0 & 0 & -x & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\cancel{x} & +y \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1\cdot 1\cdot\left(y^2 + x^2(-1-x)\right) = y^2 - x^2 - x^3$$

$$\Longleftrightarrow\ y^2 - (x^2+x^3) = 0 \ \Longleftrightarrow\ y^2 = (x^2+x^3)$$

(3) Popište obraz zobrazení $f: \mathbb{A}^1 \dashrightarrow \mathbb{A}^2$

$$t \longmapsto \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right) \qquad t \neq \pm 1$$

$\exists x,y:\ \dfrac{1+t^2}{1-t^2} = x \qquad 1+t^2 - x + xt^2 = t^2(1+x) + 1 - x = 0$

$\dfrac{2t}{1-t^2} = y \qquad 2t - y + yt^2 = t^2 y + 2t - y = 0$

$$\begin{pmatrix} 1+x & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 1+x & 0 & 1-x \\ y & 2 & -y & 0 \\ 0 & y & 2 & -y \end{pmatrix}$$

$1 \in \left((x+1)t^2 + 1 - x,\ yt^2 + 2t - y\right)$

a) $(x=-1) \wedge (y=0)$ $\quad (2, 2t) = k[t]$

b) $(x=-1) \wedge (y\neq 0)$ $\quad (2, yt^2+2t-y) = k[t]$

c) $(x\neq -1) \wedge (y=0)$ $\quad ((x+1)t^2+1-x, 2t)$

leží právě pro $x=1$

d) $(x\neq -1) \wedge (y\neq 0)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 1+x & 0 & 1-x \\ 0 & 2 & -y & 0 \\ 2 & y & 2 & -y \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 1+x & 0 & 1-x \\ 0 & 2 & -y & 0 \\ 0 & y & 1+x & -y \end{pmatrix}$$

$$\det B = 2\cdot\left[(1+x)y^2 - 2(x^2-1) - (x-1)y^2\right] =$$
$$= 2\cdot\left[2y^2 - 2(x^2-1)\right] =$$
$$= 4\cdot(y^2 - x^2 + 1)$$

$$V(x^2 - y^2 - 1) \setminus \{(-1,0)\}$$

DÚ:

$f: \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^3$

$(s,t) \longmapsto (s^2-t^2, 2st, s^2+t^2)$ $\quad$ (obraz: $V(x^2+y^2-z^2)$ potřeba jít přes Gröb. bázi)

(4) v $k[x,y,z]$ uvažujme ideál $I = (xy^2+y^3, xz+yz)$
Spočtěte $\sqrt{I}$.

$xy^2+y^3 = y^2(x+y) \quad \Rightarrow \quad y(x+y) \in \sqrt{I}$
$xz+yz = z(x+y)$

dok. $y(x+y)\in\sqrt{I}$ — součin 2 ideálů

$\cancel{\sqrt{I}}\, J = \left(y(x+y), z(x+y)\right) = (y,z)\cdot(x+y)$

Nechť $f \in \sqrt{I}$: $(f^n \in I) \Rightarrow f^n \in J$
$\Rightarrow (x+y) \mid f^n \Rightarrow (x+y) \mid f \Rightarrow f = (x+y)\cdot f_1$
$f^n = (x+y)^n \cdot f_1^n$

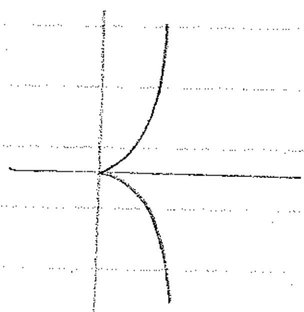
$f^n = (x+y)^n f_1^n = (x+y)\left[x^{n-1} + y(\dots)\right] f_1^n \in J$

$\Rightarrow (x+y)x^{n-1} f_1^n \in J$ (jelikož $J = (y,z)(x+y) \to x^{n-1} f_1^n \in (y,z)$)

$\Rightarrow f_1^n \in (y,z)$ - prvoideál, jelikož $\left(k[x,y,z]/(y,z) \cong k[x]\right)$
$\Rightarrow f_1 \in (y,z) \Rightarrow f \in J$

$J \subseteq \sqrt{I}$ z konstrukce J (oba generátory z $\sqrt{I}$)
$\sqrt{I} \subseteq J$ jsme nyní ukázali

(5) $\mathbb{A}^1 \longrightarrow C_1 = V(x^3-y^2)$
$t \longmapsto (t^2, t^3)$
je homeomorf. Dokažte



spojitost (z toho že je polynomiální)
zbývá: obraz. uz. je uz.
uz. v $\mathbb{A}^1$: $\mathbb{A}^1 \longrightarrow C_1$ uz.
konečná $\longrightarrow$ konečná (kon. sjedn. uz. bodů)

Racionální fce na proj. varietách

Jsou-li $f,g \in k^d[x_0,\dots,x_n]$ tehdy stupně d

$$\frac{f(\lambda x_0,\dots,\lambda x_n)}{g(\lambda x_0,\dots,\lambda x_n)} \overset{\text{homogennost}}{=} \frac{\lambda^d f(x_0,\dots,x_n)}{\lambda^d g(x_0,\dots,x_n)} = \frac{f(x_0,\dots,x_n)}{g(x_0,\dots,x_n)}$$

Podíl $\frac{f}{g}$ definuje zobr. $\mathbb{P}^n \dashrightarrow k$ $\left(\begin{array}{l} \text{když by } \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ (x_0 : \dots x_n) \longmapsto (g(x_0,\dots,x_n) : f(x_0,\dots,x_n)) \end{array} \right)$

Def.: Pro ired. proj. varietu $V \subseteq \mathbb{P}^n$ definujeme těleso rac. fcí na V jako

$$k(V) = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; \begin{array}{l} f,g \in k^d[x_0,\dots,x_n] \text{ pro nějaké } d \\ g \notin I(V) \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

$$\text{kde } \frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'} \iff f \cdot g' - f' \cdot g \in I(V)$$

Def.: Homogenní souř. okruh proj. variety je

$$S(V) = k[V^a] = k[x_0,\dots,x_n]/I(V)$$

$$\bigoplus k^d[\ ]/\bigoplus I_d = \bigoplus k^d[\ ]/I_d$$

se strukturou grad. okruhu $S(V) = \bigoplus_{d \geq 0} S^d(V)$

Lokalizace grad. okruhů: $S = \bigoplus_{d\geq 0} S_d$ grad. okruh

T … mn. homog. prvků, multiplikativní

$T^{-1}S$ má strukturu grad. ($\mathbb{Z}$-grad) okruhu

$$\deg \frac{f}{g} = \deg f - \deg g \quad \text{pro homog. } f$$

Definujeme $(T^{-1})S = \left\{ \frac{f}{g} \in T^{-1}S \;\middle|\; \deg \frac{f}{g} = 0 \right\}$

• pro prvoideál $P \subseteq S$ definujeme
$$S_{(P)} = \left((S \setminus P)^{-1}_{hom}\right) S \quad \left(\begin{array}{l}\text{přidám inverzi ke všem} \\ \text{homog. prvkům mimo } P\end{array}\right)$$

Věta: $k(V) \cong S(V)_{(0)}$ (inverze ke všem hom. nenul. prvkům)

$$\left[\frac{f}{g}\right] \longmapsto \frac{f+I(V)}{g+I(V)} \quad \text{(naopak stejně, nezávisí na repr.)}$$

Lemma: Nechť V je ired. proj. varieta, $V \not\subseteq V(x_0)$ 6.4.
Potom $k(V) \cong k(V_0)$
kde $V_0 = V \cap U_0$ je afinní varieta v $U_0 \cong \mathbb{A}^n$
$U_0 = \mathbb{P}^n \setminus V(x_0)$

Důkaz:
$$k(V) \longrightarrow k(V_0) \qquad V_0 \hookrightarrow V$$
$$\frac{f(x_0,\dots,x_n)}{g(x_0,\dots,x_n)} \longmapsto \frac{f(1,x_1,\dots,x_n)}{g(1,x_1,\dots,x_n)} \qquad (x_1,\dots,x_n) \longmapsto (1:x_1:\dots:x_n)$$
$$\dashleftarrow V$$
$$\left(\frac{x_1}{x_0},\dots,\frac{x_n}{x_0}\right) \longleftarrow (x_0:\dots:x_n)$$

$$k(V_0) \longrightarrow k(V)$$
$$\frac{p(x_1,\dots,x_n)}{q(x_1,\dots,x_n)} \longmapsto \frac{p\left(\frac{x_1}{x_0},\dots,\frac{x_n}{x_0}\right)\cdot x_0^N}{q\left(\frac{x_1}{x_0},\dots,\frac{x_n}{x_0}\right)\cdot x_0^N}$$

Př. $$\frac{x_1^3+x_2}{x_3} \longmapsto \frac{\left[\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^3+\frac{x_2}{x_0}\right]x_0^3}{\left(\frac{x_3}{x_0}\right)\cdot x_0^3} = \frac{x_1^3+x_2x_0^2}{x_3\cdot x_0^2}$$

$$\frac{f}{g} \longmapsto \frac{f\left(1,\frac{x_1}{x_0},\dots,\frac{x_n}{x_0}\right)x_0^N}{g\left(1,\frac{x_1}{x_0},\dots,\frac{x_n}{x_0}\right)x_0^N} = \frac{f}{g}$$

Def. Funkce $f \in k(V)$ je regulární v bodě $P \in V$, jestliže $\exists$ reprezentace $f = \frac{g}{h}$, kde $h(P) \neq 0$. ($h(P)$ není def., $h(P) \neq 0$ je def.)

$\operatorname{dom} f = \{P \in V \mid f \text{ je regulární v } P\}$ je ot. hustá podmn.

Lokální okruh (ireducibilní) proj. variety v bodě P je
$$\mathcal{O}_{V,P} = \{f \in k(V) \mid f \text{ je regulární v } P\}$$

$(\mathcal{O}_{V,P} = S(V)_{(m_P)})$

$\mathcal{O}_{V,P}$ má jediný max. ideál $M_P = \{f \in \mathcal{O}_{V,P} \mid f(P) = 0\}$

Lemma: $V \subseteq \mathbb{P}^n$ ired., $V \not\subseteq V(x_0)$ $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_{V,P} \cong \mathcal{O}_{V_0,P}$ pro lib. bod $P \in V_0$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{V,P} & & \\ \cap & & \\ K(V) & \xleftrightarrow{\cong} & K(V_0) \end{array}$$

Def. Okruh regulárních fcí: Nechť U je ot. podmn. ired. variety V
$\mathcal{O}(U) = \{f \in K(V) \mid U \subseteq \mathrm{dom}\}$
(je to opět svazek)

Věta: Je-li V ired. proj. varieta, pak $\mathcal{O}(V) \cong K$.
(Každá fce regulární na V je konstantní)

Racionální zobr. $V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ = třída ekvivalence $(m+1)$-tic
rac. fcí $f_0, \dots, f_m$
$(f_0 : \dots : f_m) : V \longrightarrow \mathbb{P}^m$ alespoň jedno $f_i \neq 0$

tj. $(f_0 : \dots : f_m) = (g_0 : \dots : g_m)$
$\Longleftrightarrow$
$f_i g_j = f_j g_i$ v $K(V)$

Racionální zobr. $V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ je regulární v bodě P, jestliže $\exists$ reprezentace $(f_0 : \dots : f_m)$ t.ž. $P \in \bigcap_{i=0}^{m} \mathrm{dom}\, f_i$ a $\exists j$ t.ž. $f_j(P) \neq 0$. $\mathrm{dom}\, f = \{P \mid f$ je reg. v $P\}$

Rac. zobr. $V \dashrightarrow W$ je rac. zobr. $f : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ t.ž. $f(\mathrm{dom}\, f) \subseteq W$.
Pro $U_1 \subseteq V$, $U_2 \subseteq W$ otevřené (a neprázd.) racionálním zobr. $f : U_1 \dashrightarrow U_2$ rozumíme rac. zobr. $\bar{f} : V \dashrightarrow W$.

$$\mathrm{dom}(f) = \{P \in \mathrm{dom}(\bar{f}) \mid f(P) \subseteq U_2\}$$

Dominantní rac. zobr. $f : V \dashrightarrow W$: $f(\mathrm{dom}(f))$ hustá ve W

Biracionální ekviv. $f: V \dashrightarrow W$ je dominantní rac. zobr., k němuž $\exists$ dominantní rac. zobr. $g: W \dashrightarrow V$ t.ž. $g \circ f = id_V$, $f \circ g = id_W$

Př. Nechť $U \subseteq V$ ot. neprázd. podmn. ired. proj. variety V.

$$\left.\begin{array}{lll} f: U \longrightarrow V & \text{inkluze} & g \circ f = id \\ g: V \dashrightarrow U & \text{"identita"} & f \circ g = id \end{array}\right\} \Rightarrow U \text{ a } V \text{ jsou birac. ekv.} \qquad dom(g) = U$$

Morfismus $f: U_1 \longrightarrow U_2$ je rac. zobr. t.ž. $dom(f) = U_1$ (zahrnuje $f(U_1) \subseteq U_2$)

Izomorfismus   zřejmé

Př. Hyperbola v $\mathbb{P}^2$ a $\mathbb{A}^2$ $y_1 y_2 = 1 \to y_1 y_2 = y_0^2$

$$H = \{(y_0 : y_1 : y_2) \mid y_1 y_2 - y_0^2 = 0\}$$
$$H_0 = H \cap U_0 \cong \mathbb{A}^2$$

Definujme morfismus
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & H \\ (x_0 : x_1) & \longmapsto & (x_0 x_1 : x_1^2 : x_0^2) \\ 1:1 & & \end{array}$$

jehož repre. jsou $\left(\frac{x_1}{x_0} : \frac{x_1^2}{x_0^2} : 1\right)$ a $\left(\frac{x_0}{x_1} : 1 : \frac{x_0^2}{x_1^2}\right)$

$$dom\, f = \{(x_0 : x_1) \mid x_0 \neq 0 \text{ nebo } x_1 \neq 0\} = \mathbb{P}^1$$

Inverze toho morfismu je

$$g: H \longrightarrow \mathbb{P}^1 \qquad (y_0 : y_1 : y_2) \mapsto (y_0 : y_1)$$

jehož repre. jsou $\left(1 : \frac{y_1}{y_0}\right), \left(\frac{y_0}{y_1} : 1\right)$
$\left(1 : \frac{y_1}{y_0}\right) = \left(1 : \frac{y_0}{y_2}\right)$

$dom\, g = H$ $(y_0 : y_1 : y_2)$

$$\left(1 : \frac{y_1}{y_0} : \frac{y_2}{y_0}\right) \longmapsto \left(1 : \frac{y_1}{y_0}\right) = (y_0 : y_1)$$

Tedy H a $\mathbb{P}^1$ jsou izomorfní $\tilde{f}: \mathbb{A}^1 \dashrightarrow H_0$ nas. morf.

$t \longmapsto (t, \frac{1}{t})$ $\operatorname{dom} \tilde{f} = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$

$\tilde{g}: H_0 \longrightarrow \mathbb{A}^1$

$(u,v) \longmapsto u$ $\operatorname{dom} \tilde{g} = H_0$

$$\Rightarrow \bar{f}: \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \longrightarrow H_0$$
$$\tilde{g}: H_0 \longrightarrow \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$$

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \dashrightarrow & U_2 \\ \cup & & \cup \\ U_1^\circ & \xrightarrow{\cong} & U_2^\circ \end{array}$$

Věta: Nechť U_1, U_2 jsou kvaziproj. variety. Násl. tvrzení jsou ekviv.

1) U_1, U_2 jsou biracionálně ekviv.
2) $\exists\, U_1^\circ \subseteq U_1$, $U_2^\circ \subseteq U_2$ ot. množ. a izom. $U_1^\circ \xrightarrow{\cong} U_2^\circ$

Dk. $2 \Rightarrow 1$

$$\begin{array}{ccc} U_1 & & U_2 \\ \text{birac. ekviv.} \uparrow & & \uparrow \text{birac. ekviv.} \\ U_1^\circ & \xrightarrow{\cong} & U_2^\circ \end{array}$$

$1 \Rightarrow 2$ $f: U_1 \dashrightarrow U_2$ inverzní domin.
$g: U_2 \dashrightarrow U_1$ rac. zobr.

$$U_1^\circ = \operatorname{dom} f \cap f^{-1}(\operatorname{dom} g)$$
$$U_2^\circ = \operatorname{dom} g \cap g^{-1}(\operatorname{dom} f)$$

Je potřeba $f(U_1^\circ) \subseteq U_2^\circ$, zřejmě $f(U_1^\circ) \subseteq \operatorname{dom} g$
chceme $f(U_1^\circ) \subseteq g^{-1}(\operatorname{dom} f)$
$$\Longleftrightarrow \underbrace{g(f(U_1^\circ))}_{U_1^\circ \text{ protože } g \circ f = id} \subseteq \operatorname{dom} f$$
$\square$

Věta: Kategorie (kvazi)proj. ired. variet s dominantními rac. zobr. je kontravariantně ekvivalentní kategorii konečně generovaných rozšíření tělesa k s homomorfismy těles zachovávajícími k.

$$V \longrightarrow k(V)$$
$$(f: V \dashrightarrow W) \longmapsto f^*: k(W) \to k(V)$$
(dokázáno v af. případě)

Důsledek: V, W jsou birac. ekviv. $\iff k(V) \cong k(W)$.

V je racionální $\iff k(V)$ je čistě transcendentní.

Věta: (o primitivním prvku)
Nechť K je konečné rozš. tělesa k charakteristiky 0.
Potom $\exists\, \gamma \in K$ t.ž. $K = k(\gamma)$.

Věta: Každá kvaziproj. varieta je birac. ekviv. s af. nadplochou
(tj. afinní varieta tvaru $V(f)$ kde f je jediný nekonst. polynom)

Důkaz: $k(V) \cong k(W)$ pro nějakou nadplochu W ozn. $K = k(V)$ 8.4.

$k \subseteq K$ kon. gen. rozš. těles
prvky $y_1, \dots, y_n$
$\exists$ podmn. $\{y_1, \dots, y_m\}$ t.ž. • je alg. nezávislá (nesplňuje žádnou pol. rovnici)
přeskládání BÚNO • $k(y_1, \dots, y_m) \subseteq K$ je kon. rozš.
$\Rightarrow K$ jednoduché, tj. lze předp. $n = m+1$
(případně přidáním $y_{m+1} = 0$)

y_{m+1} je algebraické nad $k(y_1, \dots, y_m)$
nechť f je min. pol. (ne nutně normovaný) - příp. vynásobením prvkem z $k[y_1, \dots, y_m]$ můžeme předp., že $f \in k[y_1, \dots, y_m]$ (např. násobkem jmenovatelů)
- příp. vydělením prvkem z $k[y_1, \dots, y_m]$ lze předp., že je primitivní (tj. NSD jeho koef. je 1)

Vezměme $W \subseteq \mathbb{A}^{m+1}$ určenou polynomem f: $W = V(f)$
Potřebujeme spočítat $k(W)$, což je podílové těleso

$$k[W] = k[y_1, \dots, y_m][x]/(f)$$
$$\downarrow$$
$$k(y_1, \dots, y_m)[x]/(f) = K$$

stačí ukázat, že toto zobr. je injektivní, pak $k[W] \subseteq K$
a obsahuje $y_1, \dots, y_m$, $x + (f) = y_{m+1} \Rightarrow K$ je podílové těleso $k[W]$

Nechť $g \in k[y_1,\dots,y_m][x]$ se zobrazí do $(f) \subseteq k(y_1,\dots,y_m)[x]$
tj. $\exists$ $g = \frac{h}{\lambda} \cdot f$ pro $h \in k[y_1,\dots,y_m][x]$ a $\lambda \in k[y_1,\dots,y_m]$
(volíme taky primitivní)

$\to$ $h \cdot f$ primitivní $\Rightarrow$ λ dělí všechny koef. v $h \cdot f$
$\Rightarrow$ λ je jednotka, $\lambda \in k$

$\lambda g \sim g = h \cdot f \in (f) \subseteq k[y_1,\dots,y_m][x]$

$\Rightarrow$ jádro je (f) a tedy $k[y_1,\dots,y_m][x]/(f) \to K$ je injektivní. $\square$

Segreho zobr.: $s_{n,m}: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N$, kde $N = (n+1)(m+1)-1$
je definováno takto:

$$\big((x_0:\dots:x_n),(y_0:\dots:y_m)\big) \longmapsto (x_0y_0 : \dots : x_iy_j : \dots : x_ny_m)$$

Obraz $\Sigma_{n,m} = s_{n,m}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ se naz. Segreho varieta.

Pozn: $s_{n,m}$ je "indukováno" $k^{n+1} \times k^{m+1} \longrightarrow k^{n+1} \otimes k^{m+1}$ (tenzorový součin)

Tvrzení: Segreho zobr. $s_{n,m}: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \Sigma_{n,m}$ je bijekce
a $\Sigma_{n,m}$ je projektivní varieta.

Důkaz: Souř. v $\mathbb{P}^N$ značme z_{ij}. Body $\Sigma_{n,m}$ splňují rovnice

$$z_{ij} \cdot z_{i'j'} = z_{ij'} \cdot z_{i'j}$$
$$x_iy_j \cdot x_{i'}y_{j'}$$

Nechť $Z \subseteq \mathbb{P}^N$ je proj. varieta zadaná těmito rovnicemi $\Sigma_{n,m} \subseteq Z$.
Pro každý bod $R \in Z$ najdeme (jediný) $(P,Q) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ splňující
$R = s_{n,m}(P,Q)$
Alespoň jedna souř. $R = (z_{00}:\dots:z_{nm})$ je nenulová, např. $z_{00} = 1$
Položme $P = (\overset{z_{00}}{1} : z_{10} : \dots : z_{n0})$
$Q = (\underset{z_{00}}{1} : z_{01} : \dots : z_{0m})$

$$s_{n,m}(P,Q) = (\cdots : \overset{z_{ij}\cdot z_{00}}{\overset{\|}{z_{i0}\cdot z_{0j}}} : \cdots) = R$$

$$\Rightarrow Z = \Sigma_{n,m} \qquad \square$$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{n,m} & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ \downarrow & & \\ \mathbb{P}^m & & \end{array}$$

$z_{p0}\cdot z_{qi} - z_{q0}\, z_{pi} = 0$ na $\Sigma_{n,m}$

$$(z_{00} : \cdots : z_{ij} : \cdots z_{nm}) \longmapsto (z_{00} : \cdots : z_{n0}) \sim (z_{0i} : \cdots : z_{ni})$$

$\Rightarrow$ projekce je regulární

Věta: Nechť V, W jsou proj. variety. Potom $V\times W \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \cong \Sigma_{n,m} \subseteq \mathbb{P}^N$ je proj. varieta. Jsou-li V, W ireducibilní, pak i $V\times W$ je ireducibilní.

Důkaz: $V = V(f_i)$ $\quad \deg f_i = d_i$
$W = V(g_j)$ $\quad \deg g_j = e_j$

Pro bod $((x_0 : \cdots : x_n), (y_0 : \cdots : y_m))$ platí

$$f_i(x_0, \dots, x_n) = 0 \iff \underbrace{f_i(x_0, \dots, x_n)\cdot y_\ell^{d_i}}_{\substack{\text{homogenní pol.} \\ \text{v prom. } x_i y_\ell = z_{i\ell}}} = 0 \quad \forall \ell = 0, \dots, m$$

Dostáváme hom. polynomy $F_{i\ell} = f_i \cdot y_\ell^{d_i}$ v proměnných z_{ij}, analogicky $G_{j\lambda}$.

$$V\times W = V\left(F_{i\ell}, G_{j\lambda}, z_{ij}\, z_{i'j'} - z_{i'j}\, z_{ij'}\right). \qquad \square$$

Ireducibilita se ukáže stejně jako u afinních. $\square$

Důsledek: Segreho varieta je ireducibilní.

($\mathbb{P}^n$ je ired., protože $S(\mathbb{P}^n) = k[x_1, \dots, x_n]$ je obor integrity)

Lemma: $\Delta \subseteq \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^m$ (diagonála $\{(P,P) \mid P \in \mathbb{P}^m\}$) je uzavřená

Dk. $((x_0 : \dots : x_m), (y_0 : \dots : y_m)) \in \Delta \iff x_i y_j - x_j y_i = 0$

$(z_{ij} - z_{ji} = 0)$ $\square$

Důsledek: • W projektivní varieta $\Rightarrow \underset{\Delta \cap W \times W}{\overset{\|}{\Delta}} \subseteq W \times W$ je uzavřená.

• $f, g : \underset{\text{kvaziproj. varieta}}{U} \longrightarrow W$ $\quad V \dashrightarrow W$, $U = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$

$\Rightarrow \{P \in U \mid f(P) = g(P)\}$ je uzavřená v U

$= (f,g)^{-1}(\Delta_W)$

$((f,g) : U \to W \times W, (f,g)^{-1}(\Delta_W))$

Věta: Projekce $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^m$ je uzavřená
(tj. obraz uz. podmn. je uz. podmn.)

Důkaz: Nechť $Z \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ je zadaná polynomy g_i, $Z = V(g_i)$
Pro bod $P \in \mathbb{P}^m$ platí $P \in \pi(Z)$

g_i homog. v x_l a v y_j } stejného stupně

$\overset{\forall_i}{\iff}$

$V(g_i(-,P)) \neq \emptyset$

$\iff$ (Hilb. věta o nulách)

$\sqrt{(g_i(-,P))} \not\supseteq (y_0, \dots, y_m)$

$\iff$

$\forall s \geq 1 : (g_i(-,P)) \not\supseteq (y_0, \dots, y_m)^s$ // ideál generovaný monomy stupně s

Položme $T_s = \{P \in \mathbb{P}^m \mid (g_i(-,P)) \not\supseteq (y_0, \dots, y_m)^s\}$

$$\pi(Z) = \bigcap_{s \geq 1} T_s$$

Stačí ukázat, že T_s je uz. $\forall s \geq 1$.
Nechť prostor hom. pol. stupně s má dimenzi d_s. Potom $P \in T_s$
$\iff$ lib. d_s ~~pol~~ hom. pol. z $(g_i(-,P))$ stupně s je lin. závislých.

$(g_i(-,P)) \cap k^s[y_0,\dots,y_m]$ je lineární obal

multiindex; stupeň monomu y^α, tj. ...

$$\{g_i(-,P)\cdot y^\alpha \mid \deg g_i(-,P) + |\alpha| = s\}$$

$P \in T_s \iff$ lib. d_s prvků $\{g_i(-,P)\cdot y^\alpha \mid \dots\}$ je lin. závislých, to lze vyjádřit pomocí nulovosti determinantů složených z koef. polynomů z té mn. Každý takový zápis na P polynomiální.

$\Rightarrow T_s$ je uzavřená.

Věta: $\pi: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^m$ je uz. zobr. 13.4.

Důsledek: Nechť X je proj. varieta a Y kvaziproj. varieta. Potom $\pi: X \times Y \to Y$ je uzavřené zobr.

Důkaz: $Z \subseteq X \times Y \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$

$$\overline{Z} \subseteq X \times \overline{Y} \Rightarrow \pi(Z) = \overbrace{\pi(\overline{Z})}^{\text{uz. v } \mathbb{P}^m} \cap Y \text{ je uz. v } Y$$

Věta: Nechť X je proj. varieta, $f: X \to Y$ morfismus. Potom $f(X) \subseteq Y$ je uz. podmn.

Důkaz: $\Gamma \subseteq X \times Y$ graf f

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \subseteq & X \times Y \\ \downarrow & \downarrow f\times id \\ \Delta \subseteq & Y \times Y \end{array}$$

$\Gamma = (f \times id)^{-1}(\Delta)$ vzor uz. je uz. (diagonála)

Obrazem $\Gamma \subseteq X \times Y \to Y$ je právě $f(X)$, proto právě $f(X)$ je uz. $\square$

Věta: Každá regulární fce $f: X \to k$ na ired. proj. varietě je konst.

Důkaz: $X \xrightarrow{f} k \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ je morfismus, který není surjektivní.

$k = \mathbb{A}^1$, $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}_1 \cup \{\infty\}$, $(1:\cdot)$, $(0:1)$

Jeho obrazem je uz. podmn. různá od $\mathbb{P}^1$, tj. konečná podmn.
(uzávěr $\mathbb{A}^1$ v $\mathbb{P}^1$ je celé $\mathbb{P}^1$)

ired. $\Rightarrow$ souvislá $\Rightarrow f(X)$ je souvislá $\Rightarrow f(X) = \{P\}$
ired. $\Rightarrow f(X)$ je ired.

Věta: Ired. proj. varieta X je afinní (izom. af. varietě) $\Longleftrightarrow$ X je bod $|X|=1$

Dk.: Nechť $X \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ je vložení (izo X na af. varietu v $\mathbb{A}^n$)
Složením s projekcemi $\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^1$

dostáváme konst. zobr. $X \hookrightarrow \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^1$
$\Rightarrow X \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ konst. $\Rightarrow |X| = 1$ $\square$

Veroneseho zobr. $\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N$

stupně d

, kde $N+1$ je počet všech homog. monomů v proměnných $x_0, \dots, x_n$ stupně d

$$(x_0 : \dots : x_n) \longmapsto (x_0^d : x_0^{d-1} x_1 : \dots : x_n^d)$$

Ukážeme, že je to vložení na podvarietu.

- morfismus : $(x_0^d : x_0^{d-1} x_1 : \dots : x_n^d) = \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n^d}{x_0^d}\right)$
  platí na podmn. $\mathbb{P}^n$, kde $x_0 \neq 0$
  analogicky pro $x_i \neq 0$
- obraz je proj. varieta (plyne z věty)
- inverze je morfismus :
  na podmn. obrazu, kde složka "x_0^d" je nenulová je inverze dána projekcí na složky $(x_0^d : x_0^{d-1} x_1 : \dots : x_0^{d-1} x_n) = (x_0 : \dots : x_n)$

$$(x_0 : \dots : x_n) = \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}\right) = \left(1 : \frac{x_0^{d-1} x_1}{x_0^d} : \dots : \frac{x_0^{d-1} x_n}{x_0^d}\right) = (x_0^d : x_0^{d-1} x_1 : \dots : x_0^{d-1} x_n)$$

analog. pro $x_i^d \neq 0$ $(x_i^{d-1} x_0 : \dots : x_i^{d-1} x_n) = (x_0 : \dots : x_n)$

Na obraze je vždy jedna ze složek $x_0^d, \dots, x_n^d$ nenulová $\Rightarrow$ morfismus

Nechť $f \in k^d[x_0, \dots, x_n]$

Potom varieta $V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ má ve Veroneseho vložení rovnici

$$f' = 0 \text{ v souřadnicích } x_0^d, \dots, x_n^d \text{ na } \mathbb{P}^N,$$

která je lineární. Jinak: $V(f)$ je průnik obrazu $\mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ s projektivní nadrovinou v $\mathbb{P}^N$

Důsledek: Je-li X ired. proj. varieta, X není bod, potom pro lib. nekonst. homogenní pol. f je $X \cap V(f) \neq \emptyset$ a $X \setminus V(f)$ je afinní varieta.

Důkaz: Díky Veroneseho vložení můžeme předp., že f je lineární

$X \cap V(f) = \emptyset$ by znamenalo, že $X \subseteq \mathbb{P}^n \setminus V(f) \cong \mathbb{A}^n$ je afinní

$\Rightarrow X$ je bod

$X \setminus V(f)$ "=" $X \cap \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{A}^n$ $\square$

Př. Věta neplatí pro afinní variety

$$X = \{x_1 = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2$$

$$f = x_1 + 1 \Rightarrow V(f) = \{x_1 = -1\} \text{ je disj. s } X$$

Lokální vlastnosti

Nechť $V \subseteq \mathbb{A}^n$ je ired. afinní varieta, $I = I(V)$, $P \in V$

Definujeme $I_P^{(1)} = \{df(P) \mid f \in I\} \subseteq k^1[x_1, \dots, x_n] = (k^n)^*$ duální prostor

$df(P) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \cdot x_i$ stačí vzít generátory I

$$\left(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2\right)^* \cong T_P V = \{x \in \mathbb{A}^n \mid df(P)(x - P) = 0 \ \forall f \in I\}$$
$$= P + V(I_P^{(1)})$$

$L' \subseteq L$

$(L')^* \Leftarrow L^*$

$= L^*/I_P^{(1)}(L')$

Nechť $f \in k^d[x_0, \dots, x_n]$
Potom varieta $V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ má ve Veroneseho vložení rovnici

$$f' = 0 \quad \text{v souřadnicích } x_0^d, \dots, x_n^d \text{ na } \mathbb{P}^N,$$

která je lineární. Jinak: $V(f)$ je průnik obrazu $\mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ s projektivní nadrovinou v $\mathbb{P}^N$

Důsledek: Je-li X ired. proj. varieta, X není bod, potom pro lib. nekonst. homogenní pol. f je $X \cap V(f) \neq \emptyset$ a $X \setminus V(f)$ je afinní varieta.

Důkaz: Díky Veroneseho vložení můžeme předp., že f je lineární
$X \cap V(f) = \emptyset$ by znamenalo, že $X \subseteq \mathbb{P}^n \setminus V(f) \cong \mathbb{A}^n$ je afinní
$\Rightarrow X$ je bod
$X \setminus V(f)$ "=" $X \cap \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{A}^n$ $\square$

Př. Věta neplatí pro afinní variety

$$X = \{x_1 = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2$$
$$f = x_1 + 1 \Rightarrow V(f) = \{x_1 = -1\} \text{ je disj. s } X$$

Lokální vlastnosti

Nechť $V \subseteq \mathbb{A}^n$ je ired. afinní varieta, $I = I(V)$, $P \in V$

→ duální prostor

Definujeme $I_P^{(1)} = \{df(P) \mid f \in I\} \subseteq k^1[x_1, \dots, x_n] = (k^n)^*$

$\| \; \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \cdot x_i$ stačí vzít generátory I

$$\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \cong T_P V = \{x \in \mathbb{A}^n \mid df(P)(x-P) = 0 \;\; \forall f \in I\}$$
$$= P + V(I_P^{(1)})$$

$L' \subseteq L$
$(L')^* \twoheadleftarrow L^*$
$\| \; L^* / I_P^{(1)}(L')$

$$T_P^* V = k^1[x_1,\dots,x_n]/I_P^{(1)} \cong (T_P V)^*$$

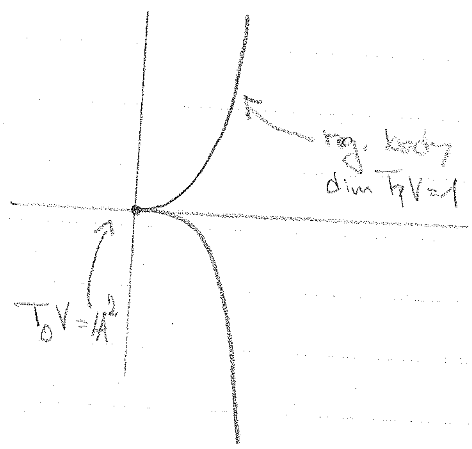
Lemma: Přímka $L \subseteq \mathbb{A}^n$ je obsažena v $T_P V \iff$
$\forall f \in I$: $f|_L$ má alespoň dvojnásobný kořen v P

Dk.: $f(P+tv)$ má 2 násobný kořen 0 $\iff$ $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(P+tv) = df(P)(v) = 0$ ($f(P)=0$)
tj. $P+v \in T_P V$

Def.: $\dim V = \min_{P\in V} \dim T_P V$ (V ired !)

Body $P \in V$, kde nastává minimum se nazývají regulární nebo hladké.
Jinak jsou singulární.

Př. Semikubická parabola $y^2 = x^3$



$f = y^2 - x^3$

$df(x_0,y_0) = -3x_0^2 \cdot x + 2y_0 \cdot y$

je nulová forma $\iff x_0 = y_0 = 0$

Tvr: Nechť f je ired. (nekonst.) polynom. Potom $\dim(V(f)) = n-1$. ($V = V(f)$)

Důkaz: $T_P V$ má buď dimenzi $n-1$ nebo n, přičemž $\dim V = n$ jedině
když $df(P) = 0 \ \forall P \in V$.

Předp. tedy, že $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ na V. To dává $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in I(V) = (f)$
To je možné pouze, když $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, protože má menší stupeň než f.
Potom je f konstantní, spor.

Věta: Regulární body tvoří otevřenou hustou podmn.

Důkaz: Položme $S_r(V) = \{ P \in V \mid \dim T_P V \geq r \}$

Ukážeme, že $S_r(V)$ je uzav. Potom reg. body jsou právě body $V \setminus S_{\dim V+1}(V)$, což je ot. a neprázdná.

Nechť $I(V) = (f_1, \dots, f_m)$. $\cancel{T_P^* V = [df_1(P), \dots, df_m(P)]}$ lin. obal

$T_P V = P + V(df_1(P), \dots, df_m(P))$ má dimenzi alespoň r

$\iff [df_1(P), \dots, df_m(P)]$ má dimenzi $\leq n-r$

$\iff$ lib. $n-r+1$ z $df_i(P)$ je lin. závislých

$\iff \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ má všechny minory řádu $n-r+1$ nulové,

což lze vyjádřit jako systém polynomiálních rovnic □

$m_P \subseteq k[V]$ — V ired. af. varieta

max. ideál odpov. bodu $P \in V$

$M_P \subseteq \mathcal{O}_{V,P}$ příslušný max. ideál

$\quad = \{ \frac{f}{g} \mid f \in m_P, g \notin m_P \}$

Věta: Existuje přirozený izomorfismus

$$m_P/m_P^2 \longrightarrow M_P/M_P^2 \longrightarrow T_P^* V \cong k[x_1, \dots, x_n]^1 / I_P^{(1)}$$

$$f + m_P^2 \longmapsto F + M_P^2 \longmapsto df(P)$$

Důkaz: $f \in I(V) \Rightarrow df(P) \in I_P^{(1)}$ tj. $0 \in T_P^* V$

Nechť $P = 0$ $\quad f \in m_P^2 \Rightarrow df(P) = 0$

Inverze $T_P^*V \to m_P/m_P^2$ pošle $\alpha \in k^1[x_1,\dots,x_n]$ na $\alpha + m_P^2$

je dobře def.: $\alpha \in I_P^{(1)}$, tj. $\alpha = df(P)$ pro $f \in I(V)$

Chceme $\alpha \in m_P^2$: $f - df(P)$ je polynom s nulovou abs. a lin. částí, tj. $f - df(P) \in m_P^2$

$$\alpha = df(P) \equiv f \equiv 0 \mod m_P^2$$

- složení je identita: $T_P^*V \longrightarrow m_P/m_P^2 \longrightarrow T_P^*V$

$$\alpha \longmapsto \alpha + m_P^2 \longmapsto d\alpha(P) = \alpha$$

- složení:

$$m_P/m_P^2 \longrightarrow T_P^*V \longrightarrow m_P/m_P^2$$
$$f + m_P^2 \longmapsto df(P) \longmapsto df(P) + m_P^2$$

opět $f - df(P) \in m_P^2$, tj. $f + m_P^2 = df(P) + m_P^2$
a složení je identita.

$m_P/m_P^2 \longrightarrow \mathcal{M}_P/\mathcal{M}_P^2$ je izomorfismus:

$$\frac{f}{g(P)} + m_P^2 \qquad \frac{f}{g} + \mathcal{M}_P^2$$

je inverze, protože $\frac{f}{g} + \mathcal{M}_P^2 = \frac{f}{g(P)} + \mathcal{M}_P^2$: $\frac{f}{g} - \frac{f}{g(P)} = \frac{\overset{m_P}{\overset{\cup}{f}}\,(\overset{m_P}{\overset{\cup}{g(P)-g}})}{g\,g(P)} \in \mathcal{M}_P^2$

Důsledek: Dimenze je invariant biracionální ekvivalence.

Důkaz: $\overset{\to \text{ ired. af variety}}{\bullet\ U \subseteq V}$ ot. hustá $\Rightarrow \dim U = \dim V$

$(V_0 \subseteq V$ mn. všech reg. bodů $V \Rightarrow U \cap V_0 \neq \emptyset)$

- $V_1 \overset{\text{birac. ekviv.}}{\dashrightarrow_f} V_2$ stačí $\dim U_1 = \dim U_2$

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \overset{f}{\dashrightarrow} & V_2 \\ \cup| & & \cup| \\ P \in U_1 & \xrightarrow{\cong} & U_2 \end{array}$$

$\mathcal{O}_{V_1,P} \cong \mathcal{O}_{V_2,f(P)} \Rightarrow \mathcal{M}_P/\mathcal{M}_P^2 \cong \mathcal{M}_{f(P)}/\mathcal{M}_{f(P)}^2$

tj. $\dim T_P U_1 = \dim T_Q U_2$; $\dim U_i = \min_{Q_i \in U_i} \dim T_{Q_i} U_i$

$Q_1 = P$, $Q_2 = f(P)$

Důsledek: Dimenze je rovna stupni transcendence $k(V)$ nad k (a ten je dobře definovaný)

$$k(x_1,\dots,x_m) \subseteq k(V) \quad \text{kon. rozšíření}$$

$x_1,\dots,x_m$ alg. nezávislé ; m - stupeň transcendence

Důkaz: V je birac. ekvivalentní nadploše $W \subseteq \mathbb{A}^{m+1}$

$$\dim V = \dim W = m.$$

---

posl. ired. variet

Ještě jiná definice dimenze: $\dim V = \max\{m \mid \exists\ \emptyset \subsetneq V_0 \subsetneq \dots \subsetneq V_m = V\}$

Blow-up: V ired. af. varieta
$f_0,\dots,f_m \in k[V]$ ne všechny nulové
$f = (f_0 : \dots : f_m) : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ s def. oborem
$\operatorname{dom} f = V \setminus V(f_0,\dots,f_m)$

graf $f \subseteq V \times \mathbb{P}^m$ (je uzavřený v $\operatorname{dom} f \times \mathbb{P}^m$)

Jeho uzávěr ve $V \times \mathbb{P}^m$ se nazývá blow-up variety V v $(f_0,\dots,f_m)$, značíme $\tilde{V}$.

$$\begin{array}{c} \tilde{V} \longrightarrow \mathbb{P}^m \\ \pi \big\downarrow \\ V \end{array}$$

← nad dom f je π izomorfismus ($\pi^{-1}(\operatorname{dom} f) \to \operatorname{dom} f$) ⇒ π je birac. ekvivalence

Blow-up je „univerzální způsob" jak dodefinovat f na celé V.

Dá se ukázat, že blow-up závisí pouze na ideálu $(f_0,\dots,f_m)$ generovaném $f_0,\dots,f_m$, nikoliv však pouze na $V(f_0,\dots,f_m)$.

Klasický případ: blow-up v bodě $P \in \mathbb{A}^n$ tj. v ideálu $(x_1, \dots, x_n)$

$$\widetilde{\mathbb{A}}^n \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$$

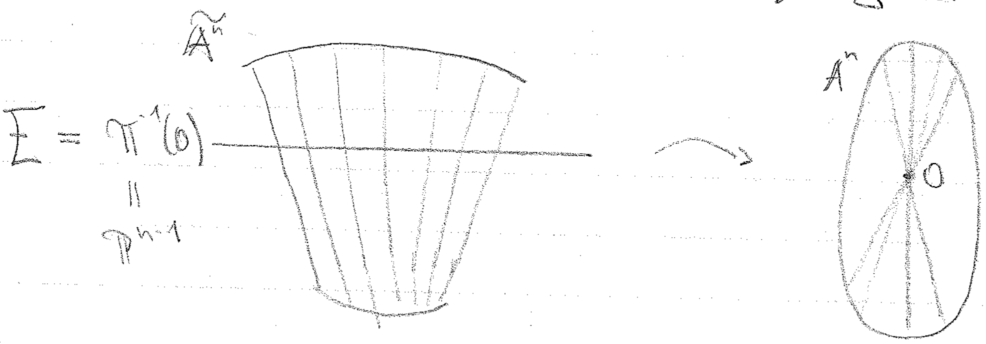
pro $P = 0$

$\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$

$$\widetilde{\mathbb{A}}^n = \{((x_1, \dots, x_n), (y_1 : \dots : y_n)) \mid \underbrace{x_i y_j = x_j y_i}_{\substack{\text{tím je určen graf} \\ (\text{nad } (x_1,\dots,x_n) \neq 0)}} \}$$

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1 : \dots : x_n) = (y_1 : \dots : y_n)$ $\quad x_i y_j = x_j y_i$

nad $P = 0$ leží $\{(y_1 : \dots : y_n) \mid 0 = 0\}$ tj. celé $\mathbb{P}^{n-1}$



Je-li $V \subseteq \mathbb{A}^n$ varieta, $\widetilde{V}$ je uzávěr $\pi^{-1}(V \setminus \{0\})$

$V = \{t \cdot v \mid t \in k\}$ $\quad v \in k^n \setminus \{0\}$ $\quad$ přímka v $\mathbb{A}^n$

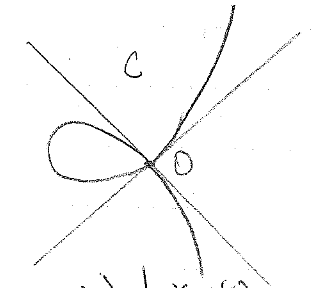
přímka určená vektorem v

$\pi^{-1}(V \setminus \{0\}) = \{(t \cdot v, [v]) \mid t \neq 0\}$

dostanu tečný prostor v tom bodě (v sing. bodě je to tečný kužel)

uzávěr je $\widetilde{V} = \{(t \cdot v, [v]) \mid t \in k\}$, $\widetilde{V} \cap E = \{(0, [v])\}$

Př. $x_2^2 = x_1^3 + x_1^2$

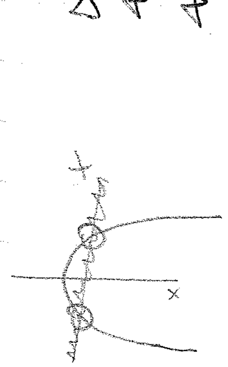


bod O je singulární protože $\dim C = 1$, $T_0 C = \mathbb{A}^2$ tedy $\dim T_0 C > \dim C$

graf f: $\{((x_1, x_2), \overset{[x_1 : x_2] =}{(y_1 : y_2)}) \mid x_1 \neq 0 \text{ nebo } x_2 \neq 0,\ x_2^2 = x_1^3 + x_1^2,\ x_1 y_2 = x_2 y_1\}$

afinní pokrytí $\mathbb{P}^1$ $\quad y_1 = 1,\ y_2 = t$: $\{(x_1, x_2, t) \in \mathbb{A}^3 \mid x_1 \neq 0 \text{ nebo } x_2 \neq 0,\ x_2^2 = x_1^3 + x_1^2,\ x_2 = t x_1\}$

$t^2 x_1^2 - x_1^3 - x_1^2 = 0$



$\cong \{(x_1, t) \in \mathbb{A}^2 \mid x_1 \neq 0,\ t^2 - x_1 - 1 = 0\}$ $\quad x_1^2 (t^2 - x_1 - 1) = 0$

$t^2 - x_1 - 1 = 0$

kdyby $x_2 = 0 \to x_1 = 0$ tedy $x_1 \neq 0$

$\tilde{C}$ má v afinním ~~prostor~~ podprostoru $y_1=1$ rovnici:

$t^2 - x_1 - 1 = 0 \quad (x_2 = t x_1)$

$\{(x_1,t) \mid x_1 = t^2-1\}$ část $\tilde{C}$

$(x_1,t) \xrightarrow{T} (x_1, t x_1)$

$\tilde{C} \cap E$ odpovídá $x_1=0$. 2 body $t=\pm 1$

a to jsou body $(0,(1:1)), (0,(1:-1))$

odpovídajícím dvěma tečnám v 0

tečný kužel $x_2^2 = x_1^2$ $\quad$ $x_2 = \pm x_1$ ... $\tilde{C} \cap E$

af. kužel $\quad$ proj. varieta

Př. Určete blow-up $x^2+y^d=0$ $\quad d \geq 2$

v počátku (kde má křivka singulární bod)

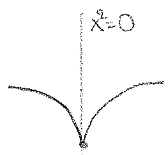
$$d(x^2+y^d)(x,y) = 2x\,dx + d\cdot y^{d-1}\,dy$$

nulové pouze pro $x=0,\ y=0$

$\tilde{\mathbb{A}}^2 = \{((x,y),(s:t)) \mid xt=ys\}$

$C = V(x^2+y^d)$, $\quad \pi^{-1}(C \setminus \{0\}) = \{((x,y),(s:t)) \mid \begin{smallmatrix} x\neq 0 \\ \text{nebo} \\ y \neq 0 \end{smallmatrix} \quad \begin{smallmatrix} xt=ys \\ x^2+y^d=0 \end{smallmatrix}\}$

tečný kužel



afinní záplata 1 (mapa): $\quad xt=y$, $\quad x^2+t^dx^d=0$

$s=1,\ x\neq 0$

izomorfní $\{(x,t) \mid x\neq 0,\ x^2(1+t^dx^{d-2})=0\}$

$\tilde{C}$ v této mapě $\{(x,t) \mid 1+t^dx^{d-2}=0\}$

$\tilde{C} \cap E$: $\quad x=0 \quad \emptyset$

$\mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1 \qquad (-s^3, -s^2, s) \longrightarrow (-s^3, -s^2)$

afinní mapa 2: $t=1$: $y \neq 0$, $x = ys$, $y^2 s^2 + y^d = 0$

$$\text{izo}: \{(y,s) \mid y \neq 0,\ y^2(s^2 + y^{d-2}) = 0\}$$

$$\tilde{C}: \{(y,s) \mid s^2 + y^{d-2} = 0\} \quad \text{je izo } V(x^2 + y^{d-2})$$

tak dlouho zmenšujeme exponent u y, až je < 2 a pak už tam nejsou sing. body

$\tilde{C} \cap E$: ⇝ $(0,0)$ jediný vzor počátku
$((0,0), (0:1))$

① Ukažte, že $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ je birac. ekv. $\mathbb{P}^{n+m}$ (tj. $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ je racionální) — 20.4.

$\mathbb{P}^n \cong \mathbb{A}^n$
$\mathbb{P}^m \cong \mathbb{A}^m$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, hook] & \mathbb{A}^{n+m} \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \arrow[r, dashed, "g"] & \mathbb{P}^{n+m}
\end{tikzcd}$$

$$g((x_0:\ldots:x_n)(y_0:\ldots:y_m)) = \left(\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right), \left(\frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_m}{y_0}\right)\right) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}, \frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_m}{y_0}\right)$$

$$= \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \ldots : \frac{x_n}{x_0} : \frac{y_1}{y_0} : \ldots : \frac{y_m}{y_0}\right) = (x_0 y_0 : x_1 y_0 : \ldots : x_n y_0 : x_0 y_1 : \ldots : x_0 y_m)$$

inverze $(z_0 : z_1 : \ldots : z_n : z_{n+1} : \ldots : z_{n+m}) \mapsto ((z_0 : z_1 : \ldots : z_n), (z_0 : z_{n+1} : \ldots : z_{n+m}))$

- $V \subseteq \mathbb{A}^n$

$\tilde{V} \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ uzávěr mn. $\{((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in V \setminus \{0\},\ x_i y_j = x_j y_i\}$

$$\rightsquigarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^{n-1} \longleftarrow \mathbb{A}^n$$

$y_1 = 1$
$x_j = x_1 y_j$

$$(x_1, x_1 y_2, \ldots, x_1 y_n, y_2, \ldots, y_n) \longleftarrow (x_1, y_2, \ldots, y_n)$$

② Spočtěte blow-up křivky $x^3+y^4=0$ v počátku $\mathbb{A}^2$

$$\tilde{C} = \left\{ ((x,y),(s:t)) \;\middle|\; \begin{matrix} (x,y)\in C\setminus 0, & xt=ys \\ (x\neq 0)\vee(y\neq 0), & x^3+y^4=0 \end{matrix} \right\}$$

a) $s=1$, ~~...~~ $y=xt$ $\quad x\neq 0 \ldots 1+xt^4=0$ počátku odp. $1+0\neq 0$

b) $t=1$: $\quad x=ys$

$$y^3s^3=-y^4 \qquad y\neq 0$$

$$s^3=-y$$

$$y+s^3=0 \qquad 1\cdot dy+3s^2ds\neq 0 \quad \text{proto už je to regulární}$$

$$y=0 \longrightarrow s=0 \;\; \text{počátku odpovídá} \;\; ((0,0),(0:1))$$

③ $x^3+y^5=0$

$$\tilde{C} = \left\{ ((x,y),(s:t)) \;\middle|\; \begin{matrix} (x,y)\in C\setminus 0, & xt=ys \\ (x\neq 0)\vee(y\neq 0), & x^3+y^5=0 \end{matrix} \right\}$$

$t=1$: $x=ys$

$$y^3s^3+y^5=0$$

$$y^3(s^3+y^2)=0 \qquad y\neq 0$$

$$s^3+y^2=0 \qquad 2y\,dy+3s^2ds \quad \text{singularita v } [0,0]$$

v dalším kroku už by se to spravilo

vzor počátku $y=0$: $s^3=0 \longrightarrow s=0$ odpovídá $((0,0),(0:1))$

④ $x^2y+xy^2-x^4-y^4=0$

$$\tilde{C} = \left\{ ((x,y),(s:t)) \;\middle|\; \begin{matrix} (x,y)\in C\setminus 0, & xt=ys \\ (x\neq 0)\vee(y\neq 0), & x^2y+xy^2-x^4-y^4=0 \end{matrix} \right\}$$

tečný kužel: $x^2y+xy^2=0$

$$xy(x+y)=0$$

a) $s=1$: $x t = y$

$$x^2 x t + x x^2 t^2 - x^4 - x^4 t^4 = 0$$
$$x^3 (t + t^2) - x^4 (1 + t^4) = 0 \qquad x \neq 0$$
$$t + t^2 = x(1 + t^4)$$

počátek $x = 0$: $t + t^2 = 0 \quad t(t+1) = 0$ < $((0,0),(1:0))$ je regulární; $((0,0),(1:-1))$ taky reg.

5) $x_1^2 - x_2 x_3 = 0$ v A^3

$\tilde{C} = \{(x_1, x_2, x_3), (t_1, t_2, t_3) \mid x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0 \vee x_3 \neq 0,\ x_1 t_2 = x_2 t_1,\ x_1 t_3 = x_3 t_1,$
$x_2 t_3 = x_3 t_2,\ x_1^2 - x_1 x_3 = 0 \}$

trochu kužel je ono samo, neboť je to homogenní

a) $t_1 = 1$: $x_2 = t_2 x_1$, $x_3 = t_3 x_1$

$$x_1^2 - t_2 x_1 t_3 x_1 = 0$$
$$x_1^2 (1 - t_1 t_3) = 0 \qquad x_1 \neq 0$$
$$t_1 t_3 = 1$$

počátek: $x_1 = 0$. odpovídá $((0,0,0),(1: r : \frac{1}{r}))$ $r \in \mathbb{R} \setminus 0$

tedy $((0,0,0),(r : r^2 : 1))$ ~~[illegible]~~ $r \neq 0$
všechny tyto body jsou regulární

$V(f)$ $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ plus $t_1, \dots, t_n$

$t_1 = 1$: $x_2 = x_1 t_2$ $\qquad f = f^{(d)} + hot$
$\vdots \qquad \vdots$ $\qquad$ hom. část nejnižš. stupně $\qquad$ členy vyššího stupně
$x_n = x_1 t_n$

$f(x_1, x_1 t_2, \dots, x_1 t_n) = 0 \qquad x_1 \neq 0$

$$f(x_1, x_1 t_2, \dots, x_1 t_n) = x_1^d \cdot f^{(d)}(1, t_2, \dots, t_n) + x_1^{d+1} \cdot \underset{k[x_1, t_2, \dots, t_n]}{g}$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{f^{(d)}(1, t_2, \dots, t_n)}_{\neq 0} + x_1 \cdot g = 0$$

$\rightsquigarrow$ vzor $0 \in V$ ve $\tilde{V}$: dosazením $x_1 = 0$: $f^{(d)}(1, t_2, \dots, t_n) = 0$ pro $t_1 = 1$

$f^{(d)}(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0$ na celém $\mathbb{P}^{n-1}$

tj. $\pi_V^{-1}(0) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ je projektivizace tečného kužele $C_P = V(f^{(d)})$

$\pi_V : \tilde{V} \to V$

V ired. proj. varieta. Uvažujme posl. $\emptyset = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_m = V$ (délka posl.) ired. proj. variet, definujeme $Kr\text{-}\dim(V) = \max\{m \mid \exists \text{ posl. délky } m\}$ Krullova dimenze

Věta: $\dim(V) = Kr\text{-}\dim(V)$

Důkaz: $\dim V \leq Kr\text{-}\dim V$: stačí nalézt posl. délky $m = \dim V$

$V \supseteq V_0 \neq \emptyset$ podmn. reg. bodů

Vezmeme $P \in V_0$ a $\alpha \in k^{(1)}[x_0, \dots, x_n]$ které je nenulové na $T_P V$, $\alpha(P) = 0$

$V_m = V$

V_{m-1} = ired. komponenta $V \cap V(\alpha)$ obsahující P

$T_P V_{m-1} = T_P V \cap \operatorname{Ker} \alpha$, indukcí vyrobíme dim $m-1$

zadefinovat schémat

Schémata

R ... okruh komutativní s 1

$\operatorname{Spec} R = \{ p \in R \mid p \text{ prvoideál} \}$ spektrum

$\operatorname{Spec} k[V]$

$k(p)$ ... podílové těleso R/p

$f \in R$ ... zadává zobr. $p \longmapsto \overbrace{f+p}^{f(p)} \in R/p \subseteq k(p)$

$f \in k[V]$: $\underset{\text{max. id.}}{m_p} \longmapsto f(p)$
$\underset{\text{kde } W \subseteq V}{I(W)} \longmapsto f|_W$

$Z(S) = \{ p \in \operatorname{Spec} R \mid f(p) = 0 \ \forall f \in S \} = \{ p \in \operatorname{Spec} R \mid S \subseteq p \}$
$S \subseteq R$ podmn. (ideál) $f \in p$

Lemma: (i) Jestliže (I_i) je mn. ideálů v R, pak $\bigcap Z(I_i) = Z(\sum_i I_i)$
(ii) $I_1, I_2 \subseteq R \Rightarrow Z(I_1) \cup Z(I_2) = Z(I_1 I_2)$
(iii) $I_1, I_2 \subseteq R$ Platí $Z(I_1) \subseteq Z(I_2) \Leftrightarrow \sqrt{I_2} \subseteq \sqrt{I_1}$
(iv) $\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq p} p$

Dk.: (i), (ii) analogicky jako pro variety $Z(I_1 I_2) \subseteq Z(I_1) \cup Z(I_2)$
$\not\ni p$ $f_1 \in I_1$ $f_1(p) \neq 0$ $\rightarrow f_1 f_2(p) \neq 0$
$f_2 \in I_2$ $f_2(p) \neq 0$

(iv) $I \subseteq p \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \sqrt{p} = p \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \bigcap_{I \subseteq p} p$

naopak: nechť $f \in \bigcap_{I \subseteq p} p$ a chceme, že $f^n \in I$. Uvažme f nenilpotentní (lze brát)

$R_f \supseteq \underbrace{R_f \cdot I}_{\text{ideál generovaný obrazem ideálu } I} = \left\{ \frac{g}{f^k} \mid g \in I \right\}$, víme: $f^n \in I \Leftrightarrow R_f \cdot I \ni 1$

Sporem, nechť $1 \notin R_f \cdot I$. Potom existuje maximální ideál $m \subseteq R_f$ t.ž. $R_f \cdot I \subseteq m$

$$\begin{tikzcd} & \overset{\varphi^{-1}(m)\ \text{prvoideál}}{p} \arrow[r, hook] \arrow[d] & R \arrow[d, "\varphi"] \\ R_f \cdot I \arrow[r, hook] & m \arrow[r, hook] & R_f \end{tikzcd}$$

Tvrdíme, že $I \subseteq p$

$(\varphi(I) \subseteq R_f \cdot I \subseteq m \Rightarrow I \subseteq \varphi^{-1}(m) = p)$

$x \cdot y \in P \Rightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in m$

$\Rightarrow$ BÚNO $\varphi(x) \in m$

$\Rightarrow x \in \varphi^{-1}(m) = p$

Podle předp. $f \in p \Rightarrow \frac{f}{1} \in m$, což je jednotka v R_f, spor

(iii) $\{p \mid I_1 \subseteq p\} \subseteq \{p \mid I_2 \subseteq p\} \iff \bigcap_{I_2 \subseteq p} p \subseteq \bigcap_{I_1 \subseteq p} p$ (přepis podle (iv))

$\Rightarrow$ triviální

$\Leftarrow$ Nechť $\underset{\substack{\| \\ \sqrt{I_2}}}{\bigcap_{I_2 \subseteq p} p} \subseteq \underset{\substack{\| \\ \sqrt{I_1}}}{\bigcap_{I_1 \subseteq p} p}$, nechť $I_1 \subseteq q \Rightarrow I_2 \subseteq \sqrt{I_2} \subseteq \sqrt{I_1} \subseteq q$

$q \in \operatorname{Spec} R$ prvoideál

Na $\operatorname{Spec} R$ zadávají mn $Z(I)$ topologii, kde $Z(I)$ jsou uzavřené.

Definujme pro $X = \operatorname{Spec} R$ a $f \in R$ otevřenou podmnožinu

$X_f := X \setminus Z(f)$. Každá ot. je sjednocením ot. mn. tvaru X_f.

Př. Popište topologii $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ (tj. ideály generované prvočísly a nulou)

$n \in \mathbb{Z} \rightarrow X_n = X \setminus Z(n) = \{(p) \in X \mid \underset{n \notin (p)}{p \nmid n}\}$

$0 \in X_n \iff 0 \notin Z(n) \iff n \notin 0 \iff n \neq 0$

$k((p)) = \mathbb{Z}/(p) = \mathbb{Z}/p$

$k(0) = \mathbb{Q}$

Př. Popište $X = \operatorname{Spec} k[x]/(x^2)$

$$\begin{array}{ccc} k[x] & & \\ | & \searrow & \\ & & \mathfrak{p} = (x) \\ | & \nearrow & \\ (x^2) & & \end{array}$$

(3 ideály ale jenom $\mathfrak{p}$ je prvoideál)

$\mathfrak{p} \in k[x]/(x^2)$

$\operatorname{Spec} k[x]/(x^2) = \{(x)\}$

$f(x) \longmapsto$

$k((x)) = k[x]/(x) \cong k$

$f \in k[x]/(x^2)$, $(x) \longmapsto f(0)$ Tímto není f určené.

Definice: R okruh, $X = \operatorname{Spec} R$. Pro každou ot. podmn. $U \subseteq X$ definujeme

$$\mathcal{O}_X(U) = \{ \varphi = (\varphi_p)_{p \in U} \mid \varphi_p \in R_p \text{ pro každé } p \in U$$
$$\text{a } \forall p \in U\ \exists V \ni p \text{ okolí a } f, g \in R \text{ takové, že}$$
$$\forall q \in V : \underbrace{g \notin q}_{q \in X_g},\ \varphi_q = \frac{f}{g} \}$$

Př. $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, Určete $\mathcal{O}_X(U)$ kde $U \subseteq X$ je otevřená

$$\mathcal{O}_X(U) = \{ \varphi : p \longmapsto \varphi_p \in \overset{\subseteq \mathbb{Q}}{\mathbb{Z}_{(p)}} \mid \text{lokálně } \varphi_q = \frac{m}{n} \text{ v okolí } p \}$$

$0 \longmapsto \varphi_0 \in \mathbb{Q}$ (invertuju vše kromě 0)

(až na kon. mnoho prvočísel)

$$= \{ \varphi : p \longmapsto \varphi_p \in \mathbb{Z}_{(p)} \mid \varphi_p = \frac{m}{n} \text{ globálně} \}$$
$$= \{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid \forall p \in U \text{ t.ž. } p \nmid n \}$$

Pozn. Lokální reprezentace $\varphi_q = \frac{f}{g}$ platí na ot. okolí $X_h \ni p$

Protože $X_h \subseteq X_g \iff Z(h) \supseteq Z(g) \iff \sqrt{(h)} \subseteq \sqrt{(g)} \implies h \in \sqrt{g}$

tj. $h^n \in (g)$, $h^n = g \cdot k$, $\varphi_q = \frac{fk}{gk} = \frac{fk}{h^n}$ na $X_{h^n} = X_h$

$$\mathcal{O}_X(U) = \{ \varphi = (\varphi_p)_{p \in U} \mid \varphi_p \in R_p \text{ a } \forall p \in U\ \exists f, g \in R \text{ t.ž. } g \notin p$$
$$\text{a } \varphi_q = \frac{f}{g} \text{ na } q \in X_g \}$$

Definice: Nechť X je topologický prostor. Předsvazek (na X) (kom. okruhů) je kontravariantní funktor

$$\mathcal{O}: \mathrm{Op}(X)^{op} \longrightarrow \mathrm{CommRing}$$

ot. podmn. X s jejich inkluzemi (kategorie kom. okruhů)

tj. komutativní okruh $\mathcal{O}(U)$ pro každou ot. podmn. $U \subseteq X$ a homomorfismy okruhů $\rho_{U,V}: \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ pro každou inkluzi $V \subseteq U$ t.ž.

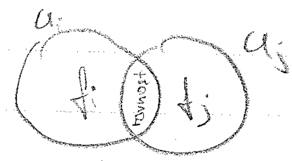
$$\rho_{U,U} = id, \quad \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V} = \rho_{U,W}$$

Definice: Předsvazek (na X) $\mathcal{O}$ se nazývá svazek, jestliže pro každou ot. podmn. $U \subseteq X$ a její ot. pokrytí (U_i) $\left(U = \bigcup_i U_i\right)$ platí

$$\mathcal{O}(U) \xrightarrow{\rho_{U,U_i}} \prod_i \mathcal{O}(U_i)$$

je injektivní s obrazem sestávajícím se z (f_i) t.ž.

$$\rho_{U_i, U_i \cap U_j}(f_i) = \rho_{U_j, U_i \cap U_j}(f_j)$$



Tvrzení: Nechť R je kom. okruh, $X = \mathrm{Spec}\, R$. Potom $U \longmapsto \mathcal{O}_X(U)$ je svazek na X.

Dk. Zřejmý z definice.

Tvrzení: (i) Pro každé $p \in X$ je stalk $\mathcal{O}_{X,p}$ izomorfní lokálnímu okruhu R_p
(ii) Pro každé $f \in R$ je okruh $\mathcal{O}_X(X_f)$ izomorfní lokalizaci R_f, zejména $\mathcal{O}_X(X) = R$.

Definice: Nechť $\mathcal{O}$ je ~~před~~svazek na top. prost. X a nechť $p \in X$. Potom stalk $\mathcal{O}$ v bodě p je

$$\operatorname{colim}_{U \ni p} \mathcal{O}(U)$$

disj. sjedn.

tj. $\bigsqcup_{U \ni p} \mathcal{O}(U) / \sim$ kde $(U,\varphi) \sim (V,\psi)$ jestliže $\exists\, p \in W \subseteq U \cap V$ t.ž. $\rho_{U,W}\varphi = \rho_{V,W}\psi$

Důkaz: (i) Máme homomorfismus okruhů 29.4.

$$\psi : \mathcal{O}_{X,p} \longrightarrow R_p \qquad \varphi : p \longmapsto \varphi_p \in R_p$$
$$(U,\varphi) \longmapsto \varphi_p \qquad \hat{U}$$

Ukážeme, že se jedná o bijekci

- ψ surjektivní: $\frac{f}{g} \in R_p$, tj. $g \notin p$
  Fce $\frac{f}{g}$ definovaná na X_g, tj.
  $(X_g, \frac{f}{g}) \in \mathcal{O}_{X,p}$ je vzor $\frac{f}{g} \in R_p$
- ψ injektivní: $(U,\varphi_1), (U,\varphi_2)$ nechť splňují $(\varphi_1)_p = (\varphi_2)_p$
  Případ. zmenšením U můžeme předp.,
  že $\varphi_1 = \frac{f_1}{g_1}$, $\varphi_2 = \frac{f_2}{g_2}$ na U

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} \text{ v } R_p \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \exists h \notin p : h(f_1 g_2 - f_2 g_1) = 0$$

Proto $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$ v R_q kdykoliv $h \notin q$, tj. na okolí $q \in X_h$ bodu p

Tedy $\varphi_1 = \varphi_2$ na X_h a určují stejný prvek $\mathcal{O}_{X,p}$

(ii) Chceme $\mathcal{O}_X(X_f) \cong R_f$
Máme homomorf. okruhů $\psi : R_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$

$$\frac{g}{f^r} \longmapsto \frac{g}{f^r} \qquad \left(p \longmapsto \frac{g}{f^r} \in R_f \longrightarrow R_p\right)$$

ψ injektivní: Nechť $\psi\left(\frac{g_1}{f^{r_1}}\right) = \psi\left(\frac{g_2}{f^{r_2}}\right)$, tedy pro každé $p \in X_f$
existuje $h \notin p$ t.ž. $h(g_1 f^{r_2} - g_2 f^{r_1}) = 0$. Definujme
ideál $I \subseteq R$ všech prvků, které anihilují $g_1 f^{r_2} - g_2 f^{r_1}$

$$I = \{h \in R \mid h(\qquad) = 0\}$$

Pro každé $p \in X_f$ obsahuje I prvek, který neleží v p, tj. $I \nsubseteq$
$Z(I) \cap X_f = \emptyset \Leftrightarrow Z(I) \subseteq Z(f) \Leftrightarrow$
$\sqrt{I} \ni f$ neboli $f^r \in I$

$\Rightarrow f^r(g_1 f^{r_2} - g_2 f^{r_1}) = 0 \Rightarrow \frac{g_1}{f^{r_1}} = \frac{g_2}{f^{r_2}}$ v R_f

Ψ surjektivní: Nechť $\varphi \in \mathcal{O}_X(X_f)$, pak $\exists g_i, h_i$ t.ž. $X_{h_i} \subseteq X_f$, $\bigcup X_{h_i} = X_f$ ← X_{h_i} to pokrývají
a $\varphi = \frac{g_i}{h_i}$ na X_{h_i}

Ukážeme, že X_f je pokryto kon. mnoha X_{h_i}

$$X_f \subseteq \bigcup_i X_{h_i} \quad \text{(přejdeme k doplňkům)}$$

$$Z(f) \supseteq \bigcap_i Z(h_i) = Z\left(\sum_i (h_i)\right)$$

$f^r \in \sum (h_i)$ tj. $f^r = \sum b_i h_i$ (konečný součet)

$\Rightarrow X_f$ je pokryto kon. mnoha X_{h_i} (těmi, kde $b_i \neq 0$)

Na $X_{h_i} \cap X_{h_j} = X_{h_i h_j}$ se $\frac{g_i}{h_i} = \frac{g_j}{h_j}$ a podle injektivity Ψ pro $X_{h_i h_j}$ platí:

$$(h_i h_j)^n (g_i h_j - g_j h_i) = 0$$

Protože máme pouze kon. mnoho h_i, lze volit n, které funguje pro všechny dvojice i, j.

nahradíme $\frac{g_i}{h_i} = \frac{\overbrace{g_i h_i^n}^{g_i'}}{\underbrace{h_i^{n+1}}_{h_i'}}$, potom $g_i' h_j' - g_j' h_i' = 0$

neboť $X_{h_i} = X_{h_i'}$

$f^r = \sum b_i h_i'$, položme $g = \sum b_i g_i'$

Potom $\frac{g}{f^r} = \frac{g_j'}{h_j'}$ na $X_{h_j'}$ neboť

$$g h_j' = \sum_i b_i g_i' h_j' = \sum_i b_i g_j' h_i' = f^r g_j'$$

$\Rightarrow \varphi = \Psi\left(\frac{g}{f^r}\right)$, Ψ surjektivní. $\square$

De

Def. Afinní schéma je $X = \mathrm{Spec}\, R$ + topologie + svazek $\mathcal{O}_X$ na X

Schéma je opět top. prostor + svazek, který "lokálně vypadá" jako afinní schéma

$X \cong Y$ (co to znamená?)

Lépe: co je morfismus $X \to Y$?

- $f: X \to Y$ spojité zobrazení
- každou ot. podmn. $U \subseteq Y$ homomorf. okruhů
$$f^*: \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$$

splňující ① $V \subseteq U$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(U) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\rho_{U,V}"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \arrow[d, "\rho_{f^{-1}(U), f^{-1}(V)}"] \\ \mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "f^*"] & \mathcal{O}_Y(f^{-1}(V)) \end{tikzcd}$$

(ii) pro $p \in X$ je homomorf. lokálních okruhů

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{Y,f(p)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,p} \\ \| & & \| \\ S_{f(p)} & & R_p \end{array} \quad \text{(lokální okruhy)}$$

tj. homo okruhů $(f_p^*)^{-1}(m_{X,p}) = m_{Y,f(p)}$

Definice: Lokálně okruhový prostor je topologický prostor X společně se svazkem okruhů $\mathcal{O}_X$ t.ž. stalky $\mathcal{O}_{X,p}$ jsou lokální okruhy, jejichž jediný max. ideál ozn. $m_{X,p}$ a podílové těleso $\mathcal{O}_{X,p} / m_{X,p} = k(p)$.

Morfismus LOP $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ je
- sp. zobr. $f: X \to Y$
- $f_U^*: \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ $\forall U \subseteq Y$ ot.

splňuje podmínky (i) a (ii)

Definice: Schéma je LOP lokálně izomorfní $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$

$\hookrightarrow$ $\exists$ pokrytí X ot. podmn. $U \subseteq X$ t.ž.

$(U, \mathcal{O}|_U) \cong (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$

- říkáme, že $(U, \mathcal{O}|_U)$ je afinní schéma

(cokoliv izo $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$)

Tvrzení: Nechť R, S jsou okruhy, $X = \operatorname{Spec} R$, $Y = \operatorname{Spec} S$. Potom existuje bijekce

$$\{\text{morfismy } X \to Y\} \xleftrightarrow{\cong} \{\text{homomorfismy } S \to R\}$$

Důkaz: $f : X \to Y$ morfismus, $f^*_Y : \underset{\overset{\|}{S}}{\mathcal{O}(Y)} \to \underset{\overset{\|}{R}}{\mathcal{O}_X(X)}$

V opačném směru: $\psi : S \to R$ homo okruhů určuje $f : X \to Y$

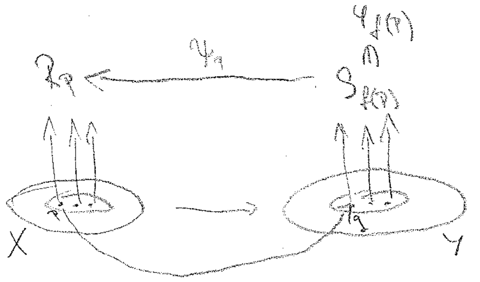
$\underset{\overset{\text{\rotatebox{90}{$\in$}}}{R}}{p} \mapsto \underset{\overset{\text{\rotatebox{90}{$\in$}}}{S}}{\psi^{-1}(p)} =: f(p)$

Pro lokalizace platí: $\underset{\overset{\|}{\mathcal{O}_{Y, f(p)}}}{S_{\psi^{-1}(p)}} \xrightarrow{\psi_p} \underset{\overset{\|}{\mathcal{O}_{X,p}}}{R_p} \supseteq m_{X,p} = \{\frac{f}{g} \mid f \in p, g \notin p\}$

$\psi_p^{-1}(m_{X,p}) = m_{Y, \psi^{-1}(p)}$, tedy ψ_p je homo lok. okruhů

$\mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$

$(\varphi : q \mapsto \varphi_q) \mapsto (f^*\varphi : p \mapsto \psi_p(\varphi_{f(p)}))$



Nechť Y je schéma. Potom schéma nad Y je schéma X společně s morfismem $X \to Y$. 4.5.

Morfismem nad Y rozumíme morfismus $X_1 \to X_2$ t.ž.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & X_2 \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

komutuje.

Př. Afinní schéma nad Spec k je $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} k$, ekvivalentně homomorfismus okruhů $k \to R$, tj. struktura k-algebry na R.
$1 \mapsto 1$

Morfismus afinních schémat nad Spec k je homomorfismus k-algeber

$$\begin{tikzcd} R & & S \arrow[ll] \\ & k \arrow[ul, squiggly] \arrow[ur, squiggly] & \end{tikzcd}$$

Př. Jak vypadají okruhy v případě $R = k[V]$ $\overset{\text{ired.}}{}$ tyto: R/p, $k(p)$, R_p

$p \in k[V]$ prvoideál, odpovídá ired. podvarietě $W \subseteq V$

$p = \{ f \in k[V] \mid f|_W = 0 \} = I_V(W)$ $(0 = I(V))$

- $R/p = k[V]/I(W) = k[W]$
- $k(p) = k(W)$ (podíl. těleso $k[W]$, těleso rac. funkcí na W)
- $R_p = \{ f \in k(V) \mid \operatorname{dom} f \cap W \neq \emptyset \}$ lokalizace
  $f = \frac{g}{h}$, $h \notin p$, $h|_W \neq 0$

$$\begin{tikzcd} & I(V) \arrow[d] \\ I(W) \arrow[d, Rightarrow] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & k[x_1, \dots, x_n] \arrow[d, Rightarrow] \\ I_V(W) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & k[V] \end{tikzcd}$$

$R_0 = k(V)$ (přidám inverze ke všem, tedy podílové těleso $k[V]$)

$$R_p / \underbrace{p R_p}_{\text{jediný max. ideál } R_p} \cong \text{podílové těleso } R/p$$

Př. Určete všechna (afinní) schémata nad Spec k "délky 2", tj. R má dimenzi 2 nad k (chceme algebry nad k dim 2 až na izomorfismus)

$R = k\{1, x\}$ $\quad 1 \cdot 1 = 1$ $\quad x^2 = ax + b \quad a, b \in k$
$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

$R = k[x]/(x^2 - ax - b)$

1) Kořeny pol. x^2-ax-b jsou různé $x_1 \neq x_2$
$R = k[V]$, kde $V = \{x_1, x_2\}$ $\quad R \cong k[X]/(x^2)$ (2 max. ideály) tedy různé

2) $x_1 = x_2$ $\quad R = k[X]/\left((x-x_1)^2\right) \cong k[X]/(x^2)$ (1 max. ideál)

Odpověď: dvojice různých bodů nebo 1 dvojnásobný bod

Př. To samé pro délku 3. Bude se hodit

Důsledek věty (která má název Nakayamovo lemma):
Pokud $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ leží v jediném maximálním ideálu (řekněme $m_0 = (x_1, \dots, x_n)$) a $\dim k[x_1, \dots, x_n]/I = d$, potom

$$m_0^d \subseteq I \subseteq m_0$$

Předp. rovnou, že R má jediný bod (max. ideál)

$R = k\{1, x, x^2\}$ $\qquad m_0^3 \subseteq I \subseteq m_0$
$\qquad (x^3) \subseteq I \subseteq (x) \Rightarrow I = (x^3),\ R = k[x]/(x^3)$

$R = k\{1, x, y\}$ $\qquad m_0^3 \subseteq I \subseteq m_0 \qquad R = k[x,y]/I$

$$I = (x^2 + ax + by,\ xy + cx + dy,\ y^2 + ex + fy)$$

$$(x^3, x^2y, xy^2, y^3) \subseteq I$$

Chceme: $I = (x^2 + ay, xy, y^2)$ po lin. transformaci

$I = (x^2 + \lambda, xy + \mu, y^2 + \nu)$ $\quad \lambda, \mu, \nu$ lin. formy
Předp. $[\lambda, \mu, \nu]$ má dim 2
Potom $[x\lambda, y\lambda, x\mu, y\mu, x\nu, y\nu]$ má dim 3

protože ~~x~~ $x\lambda = x\underbrace{(x^2+\lambda)}_{\in I} - \underbrace{x^3}_{\in\, m_0^3 \subseteq I} \in I$

Tedy $m_0^2 \subseteq I \Rightarrow \lambda = (x^2+\lambda) - x^2 \in I$

$\mu, \nu \in I$

$\Rightarrow m_0 = I \quad , \quad k[x,y]/I \cong k$ nemá dim 3

Předp. $[\lambda, \mu, \nu]$ má dim 1

Po změně souřadnic: $I = (x^2+\alpha y, xy+\beta y, y^2+\gamma y)$

Pokud alespoň 1 z α, β, γ je nenulové, tak

$xy, y^2 \in I \Rightarrow \beta = \gamma = 0$

(jinak $y \in I$, tj. $y=0$ v R)

Tedy $I = (x^2+\alpha y, xy, y^2)$

- $\alpha = 0$: $R \cong k[x,y]/(x^2, xy, y^2)$ (1)
- $\alpha \neq 0$: $R \cong k[x]/(x^3)$ $\quad y = -\frac{1}{\alpha}x^2$ (2)

Geometricky: dvojnásobný bod je bod společně s tečným směrem
trojnásobný bod: typu (1) je bod s tečnou rovinou
typu (2) je bod s tečným směrem stupně 2

$f \in (x^2) \Leftrightarrow f$ je v 0 nulový společně s 1. derivací

$f \in (x^2, xy, y^2)$ ve směru x, y

$f \in (x^3)$ 0 hodnota + 1. der. + 2 derivace

Tvrzení: Nechť V je afinní varieta $X = \operatorname{Spec} k[V]$

$D = \operatorname{Spec} k[x]/(x^2)$ dvojnásobný bod

Pak $\exists$ bijekce mezi morfismy $D \to X$ nad k

posílající jediný bod D na $P \in V$ a $T_P V$.

Př. ~~R je k-algebra~~ 6.5.

$R = k[V]$

$R = k[x_1, \dots, x_n]/I$ (aplikuj jen I) ← kdyby jen k-algebra, tak to neplatí

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} R \arrow[dr] & & \operatorname{Spec} k \arrow[ll] \arrow[dl, "id"] \\ & \operatorname{Spec} k & \end{tikzcd}$$

$V = k[\text{bod}]$

Ukažte, že morfismy $\operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} R$ nad $\operatorname{Spec} k$ jsou v bijekci s max. ideály R (tj. uzav. body $\operatorname{Spec} R$)

$$\begin{tikzcd} I = \operatorname{Ker} f \arrow[r, two heads] & R \arrow[r, two heads, "f"] & k \\ & k \arrow[u] \arrow[ur, "id"'] & \end{tikzcd}$$

jelikož $k \to R \to k$ je id, tak 1. musí být prostý, 2. surjektivní

$R = k \oplus (R/k)$

$k \cong (R/I)$

$I \dots$ max. ideál

f splňuje: $f(I) = 0$

$f(1_R) = 1_k$

$$\underset{\text{max. id.}}{I} \to R \to \boxed{R/I \cong k}$$

$R = \underbrace{I}_{0} \oplus \underbrace{k}_{1}$ hom. vp nad k určeno právě tím I

$k[t]/(t^2) \to k$, $k[t]/(t^2)$

V afinní (ired.) varieta

Př. $D = \operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$ „dvojnásobný bod"

$$\begin{tikzcd} D = \operatorname{Spec} k[t]/(t^2) \arrow[dr, dashed] & & \operatorname{Spec} k \arrow[ll] \arrow[dl, "\text{bod } P \in V"] \\ & \operatorname{Spec} k[V] & \end{tikzcd}$$

Morfismy $D \to \operatorname{Spec} k[V]$ (nad $\operatorname{Spec} k$) jsou v bijekci s prvky $T_P V$

$$\begin{tikzcd} k[t]/(t^2) \arrow[r, "\text{evaluace v } 0"] & k = k[t]/(t) \\ & k[V] \arrow[ul, dashed] \arrow[u, "\text{eval. v } P"'] \end{tikzcd}$$

$k[V] = k[x_1, \dots, x_n]/I(V)$

$$\begin{tikzcd}
I(V) \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "0"] & & \\
k[x_1,\dots,x_n] \arrow[rr] \arrow[d] & & k[t]/(t^2) \\
k[V] = k[x_1,\dots,x_n]/I(V) \arrow[urr, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

$$x_i \longmapsto a_i t + b_i \ , \quad \text{kde } b_i = x_i(P)$$

$$= d_q x_i(P)(v)t + x_i(P) \qquad v = (a_i) \in k^n$$

$\hookrightarrow$ derivace v bodě P ve směru v

Když je $f \in I(V)$, pak $f(P) = 0$, neboť $P \in V$, tedy $df(P)(v)t$ se nuluje, ale z kotečného T_P^*V se nuluje právě na T_PV, tedy $v \in T_PV$

$$f \longmapsto \underbrace{df(P)}_{T_P^*V}\underbrace{(v)}_{T_PV}t + f(P)$$

$f + g$ zřejmě snadno

$$f \cdot g \longmapsto (df \cdot g + dg \cdot f)(P)(v)t + fg(P)$$

$$(df(P)(v)t + f(P)) \cdot (dg(P)(v)t + g(P)) = \cancel{(df \cdot dg)(P)(v)\,t^2} \to 0$$

$$+ (dg \cdot f + g \cdot df)(P)(v)t + fg(P) \quad \checkmark$$

$$\{df(P) \mid f \in I(V)\} =: T_P^*V$$
$$\{v \in k^n \mid \alpha(v) = 0 \ \forall \alpha \in T_P^*V\} =: T_PV$$

• Nechť $X = \operatorname{Spec} R$ je afinní schéma.
Když $I \subseteq R$ je ideál, můžeme uvážit $\quad \varphi : R \longrightarrow R/I$

$$\operatorname{Spec} R \xleftarrow{\varphi^*} \operatorname{Spec} R/I$$

Na úrovni top. prost. jde o vložení uz. podprostoru:

- injektivita: $q \in R/I$ se pošle na $\varphi^{-1}(q) \subseteq R$ přitom prvoid.
  prvoid. v R/I jsou právě v bijekci (dané tímto zobr.)
  s prvoid. v R obsahujícími I
  obraz φ^* je přesně $Z(I)$ uz.

• uzavřenost: $J \supseteq I$ ideál $\quad \varphi^*(Z(\overbrace{J/I}^{\varphi(J)})) = Z(J)$

Říkáme, že Spec R/I je „uzavřené podschéma" Spec R.

Zejména Spec $k[x_1,\dots,x_n]/I$ je uz. podschéma Spec $k[x_1,\dots,x_n] \sim \mathbb{A}^n$

↑

I radikálový … afinní varieta

I neradikálový … něco nového, např. dvojnásobný bod D

$(X, \mathcal{O}_X)$ lokálně okruhový prostor

$U \subseteq X$ ot. podmn.

$(U, \mathcal{O}_X|_U)$ lokálně okruhový prostor

$V \subseteq U$ ot. $\quad (\mathcal{O}_X|_U)(V) = \mathcal{O}_X(V)$

Máme morfismus (vložení)

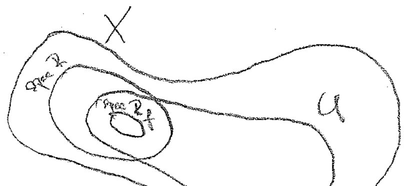
$$(U, \mathcal{O}_X|_U) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

$V \subseteq X$ otevřená

$$\mathcal{O}_X(U \cap V) \xleftarrow[\rho_{V, U\cap V}]{} \mathcal{O}_X(V)$$

Lemma: Nechť Spec $R = X$ je afinní schéma a $f \in R$.
Potom $(X_f, \mathcal{O}_X|_{X_f})$ je izomorfní (Spec R_f, $\mathcal{O}_{\text{Spec } R_f}$)
Zejména jde o afinní schéma.

Důsledek. Ot. podmn. schématu je opět schéma.



Důkaz: Máme bijekci

$$\{p \subseteq R \text{ prvoid.}, f \notin p\} \xrightarrow{\cong} \{q \subseteq R_f \text{ prvoid.}\}$$

$$p \longmapsto \left\{\frac{g}{f^n} \,\middle|\, g \in p\right\}$$

$$\left\{g \,\middle|\, \frac{g}{1} \in q\right\} = \varphi^{-1}(q) \longleftarrow q$$

$$\varphi: R \to R_f, \quad g \mapsto \frac{g}{1}$$

$q : \{ \frac{g}{f^n} \mid g \in p \}$ je prvoideal : je to ideal (generovaný $\varphi(p)$)

$$\frac{h_1}{f^{m_1}} \cdot \frac{h_2}{f^{m_2}} \in q \qquad \frac{h_1}{f^{m_1}} \cdot \frac{h_2}{f^{m_2}} = \frac{g}{f^n}$$

$$f^k (h_1 h_2 f^n - g f^{m_1+m_2}) = 0$$

$$h_1 h_2 f^{n+k} = g f^{m_1+m_2+k} \in P \text{ neboť } g \in P$$

P je prvoid. neobs. $f \Rightarrow h_1$ nebo $h_2 \in P$

$\frac{h_1}{f^{m_1}}$ nebo $\frac{h_2}{f^{m_2}} \in q \rightarrow q$ je prvoid.

$\varphi^* : \operatorname{Spec} R_f \longrightarrow \operatorname{Spec} R = X$

je injektivní zobr. s obrazem X_f

Chceme φ^* je ot. zobr. : $\frac{g}{f^n} \in R_f \qquad (\operatorname{Spec} R_f)_{\frac{g}{f^n}} = \{ q \in R_f \mid \frac{g}{f^n} \notin q$ ekvivalentní $\frac{g}{1} \notin q \}$

odpovídá ve $(\operatorname{Spec} R)_f$

těm prvoid., které neobs. g tj. $(\operatorname{Spec} R)_{fg}$

Jinak. $\varphi^* ((\operatorname{Spec} R_f)_{\frac{g}{f^n}}) = (\operatorname{Spec} R)_{fg}$

Pro reg. fce platí: $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_f} ((\operatorname{Spec} R_f)_{\frac{g}{f^n}}) \cong (R_f)_{\frac{g}{f^n}} \cong (R_f)_{\frac{g}{1}} \cong R_{fg}$

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R} ((\operatorname{Spec} R)_{fg}) \cong R_{fg}$$

Důkaz bude hotov použitím násl. lemmatu.

Lemma: Nechť $F : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ je hom svazků na top. prost. X.
Je-li F izo na nějaké bázi topologie X, pak je izo všude.

Dk. intuitivně zřejmý
prvky $\mathcal{O}(U)$ jsou to samé, co kompatibilní kolekce prvků $\mathcal{O}(U_i)$, kde U_i je nějaké pokrytí U.

Tvrzení: Nechť X je lib. schéma, $Y = \operatorname{Spec} R$ afinní schéma. Potom $\exists$ bijekce

$$\{\text{morfismy } X \to Y\} \longrightarrow \{\text{hom. } R = \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)\}$$

Důkaz: $X = \bigcup U_i$, $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ je afinní schéma
Zadat morfismus $X \to Y$ je to samé, co zadat kompatibilní homomorfismy $U_i \to Y$
(na úrovni top. prost. zřejmé
na úrovni svazků - princip předch. lemmatu)

$V \subseteq Y$ ot.

$$\mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \longleftarrow \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow$$

kompat. kolekce prvků z $\mathcal{O}_X(U_i \cap f^{-1}(V))$

Podle mé věty jsou morf. $U_i \to Y$ dány jednoznačně hom $R \to R_i = \mathcal{O}_{U_i}(U_i) = \mathcal{O}_X(U_i)$ které jsou kompat.
$\to$ zadávají jednozn. $R \to \mathcal{O}_X(X)$

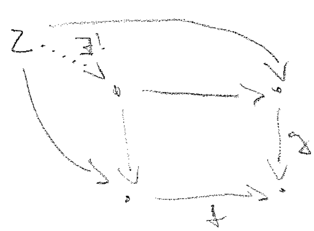
Def. Fibrovaný součin (pullback) 11.5.

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "g^*"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

se nazývá fibrovaný součin (X, Y podle S), jestliže pro každé dva morfismy $Z \xrightarrow{m} X$, $Z \xrightarrow{n} Y$ t.ž. $f \circ m = g \circ n$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "n"] \arrow[d, "m"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

$\exists!$ morfismus $k: Z \to X \times_S Y$ t.ž. $m = g^* \circ k$, $n = f^* \circ k$



(v množinách $X \times_S Y = \{(x,y) \mid f(x)=g(y)\} \subseteq X \times Y$)

Lemma: Fibrovaný součin $X \times_S Y$ vždy existuje (v kategorii schémat) a je jediný až na izomorfismus

Dk.: provedeme pouze pro afinní schémata

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed] & & \\
& X \times_S Y \overset{\mathrm{Spec}\ ?}{=} \arrow[r] \arrow[d] & Y = \mathrm{Spec}\, R_2 \arrow[d] \\
& X = \mathrm{Spec}\, R_1 \arrow[r] & S = \mathrm{Spec}\, T
\end{tikzcd}$$

Ekvivalentně
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Z(Z) & & \\
& ? \arrow[ul, dashed, "\mu"'] & R_2 \arrow[l] \arrow[ull, bend right, "\beta"'] \\
& R_1 \arrow[u] \arrow[uul, bend left, "\alpha"] & T \arrow[l, "\varphi"] \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

„duální" k pullbacku
(? bude pushout R_1, R_2 podle T v kategorii komutativních okruhů)

Položme $? = R_1 \otimes_T R_2$ s násobením

$$(x_1 \otimes x_2) \cdot (y_1 \otimes y_2) := x_1 y_1 \otimes x_2 y_2$$

Jednoduše se ověří, že jde o komutativní okruh a

$$R_1 \longrightarrow R_1 \otimes_T R_2 \qquad\qquad R_2 \longrightarrow R_1 \otimes_T R_2$$
$$x \longmapsto x \otimes 1 \qquad\qquad y \longmapsto 1 \otimes y$$

jsou homomorfismy okruhů.
Hom. μ jsme museli definovat

$$\mu(x \otimes y) = \mu((x \otimes 1) \cdot (1 \otimes y)) = \mu(x \otimes 1) \cdot \mu(1 \otimes y) =$$
$$= \alpha(x) \cdot \beta(y)$$

Z komutativity $\mathcal{O}_Z(Z)$ se ukáže, že jde vskutku o homomorf.

Př. X_1, X_2 schémata nad k

součin (v kategorii schémat nad k)

$$\begin{tikzcd} X \times_{\operatorname{Spec} k} Y \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[d] \\ X_1 \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

X_1, X_2 af. variety $\Rightarrow$ $X_1 \times_{\operatorname{Spec} k} X_2$ je jejich součin tak jak ho známe

Př.

$$\begin{tikzcd} X_1 \times_{\mathbb{A}^n} X_2 \arrow[r] \arrow[d] & X_2 = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]/I_2 \arrow[d] \\ X_1 = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]/I_1 \arrow[r] & \mathbb{A}^n = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n] \end{tikzcd}$$

$X_1 \times_{\mathbb{A}^n} X_2$ je „množinově průnik X_1 a X_2" (na úrovni max ideálů)

$$X_1 \times_{\mathbb{A}^n} X_2 \cong \operatorname{Spec}(R/I_1 \otimes_R R/I_2) \qquad R = k[x_1, \dots, x_n]$$

$$\cong \operatorname{Spec} R/(I_1 + I_2)$$

neboť $R/I_1 \otimes R/I_2 \longrightarrow R/(I_1 + I_2)$

$$(x + I_1) \otimes (y + I_2) \longmapsto xy + (I_1 + I_2)$$

$$(r + I_1) \otimes (1 + I_2) = (1 + I_1) \otimes (r + I_2) \longleftarrow r + (I_1 + I_2)$$

$$r(1 + I_1) \otimes (1 + I_2) \qquad r(1 + (I_1 + I_2))$$

Projektivní schémata

R graduovaný okruh, $R = \bigoplus_{d \geq 0} R^{(d)}$ $\quad R^{(d)} \cdot R^{(e)} \subseteq R^{(d+e)}$

$R_+ = \bigoplus_{d > 0} R^{(d)}$ je homogenní ideál v R, který se nazývá irelevantní ideál

$\operatorname{Proj} R = \{ \mathfrak{p} \subseteq R \mid \mathfrak{p}$ homogenní prvoideál, neobs. R_+ tj. $R_+ \not\subseteq \mathfrak{p} \}$

(můžeme chápat jako podmn. $\operatorname{Spec} R$, definice jako podprostor)

$Z(I) = \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} R \mid I \subseteq \mathfrak{p} \}$ opět tvoří systém uz. množin v topologii na $\operatorname{Proj} R$

• $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} R$

$$R_{(\mathfrak{p})} = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; g \notin \mathfrak{p},\ f, g \text{ homog. stejného stupně} \right\}$$

Definice $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} R}(U)$ je analogicky to pro af schémata

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} R}(U) = \left\{ \varphi = (\varphi_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U} \;\middle|\; \varphi_{\mathfrak{p}} \in R_{(\mathfrak{p})},\ \text{lokálně tvaru } \frac{f}{g} \text{ pro } f, g \text{ stejného stupně} \right\}$$

Tvrzení: Nechť R je graduovaný okruh, $X = \operatorname{Proj} R$

(i) pro každé $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} R$ platí $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \cong R_{(\mathfrak{p})}$

(ii) pro každý homog. prvek $f \in R_+$

nechť $X_f = X \setminus Z(f) = \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} R \mid f \notin \mathfrak{p} \}$

Tyto ot. mn. pokrývají X a platí $(X_f, \mathcal{O}_X|_{X_f}) \cong \operatorname{Spec} R_{(f)}$

kde $R_{(f)} = \left\{ \frac{g}{f^n} \;\middle|\; \deg g = n \cdot \deg f \right\}$

Zejména $(X = \operatorname{Proj} R, \mathcal{O}_X)$ je schéma.

Důkaz (ii) Nechť $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} R$, ukážeme, že leží v nějakém X_f.

Podle def $R_+ \not\subseteq \mathfrak{p}$ tj. $\exists f \in R_+$ t.ž. $f \notin \mathfrak{p} \iff \mathfrak{p} \in X_f$

$X_f \cong \operatorname{Spec} R_{(f)}$ na úrovni množin

$$\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} R \mid f \notin \mathfrak{p} \} \longleftrightarrow \{ \mathfrak{q} \subseteq R_{(f)} \text{ prvoid} \}$$

$$\mathfrak{p} \longmapsto \left\{ \frac{g}{f^n} \in R_{(f)} \;\middle|\; g \in \mathfrak{p} \right\}$$

$$\left\{ g \;\middle|\; \frac{g}{f^n} \in \mathfrak{q} \text{ pro nějaké } n \right\} \longleftarrow \mathfrak{q}$$

$\exists \ni \in E$

Př. $S = k[x_0, \dots, x_n]$ gradovaná k-algebra
$I \subseteq S$ homogenní ideál (S/I je opět grad. okruh)

Proj S/I nazýváme projektivním podschématem $\mathbb{P}^n$

I radikálový $\Rightarrow$ projektivní podvariety

Může platit Proj S/I_1 = Proj S/I_2 aniž by platilo $I_1 = I_2$.

Def. Nechť $I \subseteq S$ je homogenní ideál. Jeho saturace je homog. ideál
$$\overline{I} = \{ f \in S \mid x_i^m \cdot f \in I \text{ pro nějaké } m \text{ a všechna } i \}$$

Př. f homog. $I = (fx_0, \dots, fx_n) \not\ni f$
$\overline{I} = (f)$

Věta: Nechť $I, J \subseteq S = k[x_0, \dots, x_n]$ jsou homog. ideály, potom platí

(i) Proj S/I = Proj $S/\overline{I}$

(ii) Proj S/I = Proj S/J
$$\Longleftrightarrow$$
$$\overline{I} = \overline{J}$$

(iii) $I^{(d)} = \overline{I}^{(d)}$ pro $d \gg 0$

$$\begin{array}{ccc} \text{Proj } S/I & \longrightarrow & \\ \uparrow & & \text{Proj } S = \mathbb{P}^n \\ \text{Proj } S/\overline{I} & \longrightarrow & \end{array}$$

Důsledek: $\exists$ bijekce mezi projekt. podschématy $\mathbb{P}^n$ a saturovanými ($I = \overline{I}$) hom. ideály v $k[x_0, \dots, x_n]$

Def: X proj. podschéma $\mathbb{P}^n$. Definujeme $I(X)$ saturovaný hom. ideál odpovídající X.
Definujeme hom. souř. okruh proj. schématu X: $S(X) = S/I(X)$

5

Důkaz: (i) $\mathbb{P}^n$ je pokryto af. schématy $U_i = (\mathbb{P}^n)_{x_i}$
stačí tedy ukázat, že
$$U_i \cap (\operatorname{Proj} S/I) = U_i \cap (\operatorname{Proj} S/\overline{I})$$

ekvivalentně $\operatorname{Spec}(S/I)_{(x_i)} = \operatorname{Spec}(S/\overline{I})_{(x_i)}$

$\operatorname{Spec} S_{(x_i)}$

$$S_{(x_i)} \underset{\substack{x_i=1 \\ \text{homog.}}}{\cong} k[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$$

$$(S/I)_{(x_0)} = k[x_1, \dots, x_n] / I|_{x_0=1}$$

$$(S/\overline{I})_{(x_0)} = k[x_1, \dots, x_n] / \overline{I}|_{x_0=1}$$

$$I|_{x_0=1} = \overline{I}|_{x_0=1} \quad \text{anal. pro } x_i$$

(iii) $\overline{I} = (f_1, \dots, f_k)$ $\qquad \deg f_1 \leq l$

$\exists m \gg 0 : x_i^m f_i \in I$
a monom stupně alespoň $m(n+1)$ $\qquad a f_j \in I$

pro $d \geq l + m(n+1)$ platí $I^{(d)} = \overline{I}^{(d)}$

"$\subseteq$" zřejmé
"$\supseteq$" $\sum_j a_j f_j \in \overline{I}^{(d)}$ homog. pol. st. $d - \deg f_j \geq m(n+1)$

$\Rightarrow a_j f_j \in I \Rightarrow \sum_j a_j f_j \in I^{(d)}$

Př. $X \subseteq \mathbb{P}^1$ dvojnás. bod $I(X) = (x_1^2)$
$S(X)^d$ má bázi

Př. V $\mathbb{P}^3$ uvažujme "twistovanou kubickou křivku"

$$X = \{(s^3 : s^2 t : s t^2 : t^3) \mid (s:t) \in \mathbb{P}^1\}$$
(Veroneseho varieta $X \cong \mathbb{P}^1$)

$$I(X) = (x_0 x_2 - x_1^2, x_1 x_3 - x_2^2, x_0 x_3 - x_1 x_2)$$

$$Z(x_0 x_2 - x_1^2, x_1 x_3 - x_2^2) = X \cup \{(x_0 : 0 : 0 : x_3)\}$$

Spočítejme h_X

$$S(X)^{(d)} = k\left(\{\text{monomy stupně } d\} \middle| \begin{array}{l} m x_0 x_2 \sim m x_1^2 \\ m x_1 x_3 \sim m x_2^2 \\ m x_0 x_3 \sim m x_1 x_2 \end{array}\right)$$

třídy relace jsou v bijekci s čísly $\{0, \dots, 3d\}$

$$(x_{i_1}, \dots, x_{i_d})_\sim \quad \sim \quad \underset{\{0,\dots,3d\}}{\underset{\cap}{i_1 + \dots + i_d}}$$

třída

$h_X(d) = 3d + 1$

Lemma: Nechť X je proj. podschéma $\mathbb{P}^n$.

$Z(\sqrt{I(X)}) = \{p \in \mathbb{P}^n \mid I(X) \subseteq m_p\}$ je konečná.

Potom: (i) X je afinní, $X \cong \operatorname{Spec} R$ pro nějak. k-algebru R

(ii) R má konečnou dimenzi nad k, její dim se nazývá délka X (a je to „počet bodů X počítaných se schématickou násobností")

(iii) $h_X(d) = \dim_k R$ pro $d \gg 0$

Důkaz: (i) Lze najít nadrovinu $H \subseteq \mathbb{P}^n$ ($\mathbb{P}^n_\alpha = \mathbb{P}^n_{x_0}$) t.ž. H neprotíná X (resp. $Z(\sqrt{I(X)})$)

Potom $X = \underbrace{X \cap (\mathbb{P}^n \setminus H)}_{X_\alpha = \operatorname{Spec} S(X)_\alpha}$ je afinní

(ii) Nechť X obsahuje pouze 1 bod. Změnou souřadnic můžeme předpokládat, že tento bod je počátek $\mathbb{A}^n \cong \mathbb{P}^n \setminus H$

$X = \operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n]/I \qquad I = I(X)\big|_{x_0=1}$

$\sqrt{I} = (x_1,\dots,x_n) \qquad (Z_{\mathbb{P}^n}(\sqrt{I(X)}) = \{0\})$

Potom $x_1^\delta,\dots,x_n^\delta \in I$ a každý monom stupně alespoň $D = n\cdot\delta$ leží v I.

$R = k[x_1,\dots,x_n]/I$ má bázi složenou z (třídy) monomů stupně $< D$. Zejména má R kon. dim.

(iii) $S(X)^{(d)} = k^{(d)}[x_0,\dots,x_n]/I(X)^{(d)} \cong k[x_1,\dots,x_n]/I = R$ pro $d \geq D$

$f \longmapsto f|_{x_0=1}$

$x_0^{d-\deg g} \cdot g^h \longleftarrow g \quad \text{st } g < D$

$h_X(d) = \dim_k S(X)^{(d)} = \dim_k R$

Příště: redukce na případ, kdy má X pouze 1 bod

$h_{\mathbb{P}^n} = \binom{d+n}{n} = \frac{1}{n!} d^n \dots$

Tvrzení: Nechť X je m-rozměrné proj. podschéma $\mathbb{P}^n$
($m = \dim Z(I(X))$)
Potom $\exists!$ polynom $\chi_X \in \mathbb{Q}[d]$ t.ž. $h_X(d) = \chi_X(d)$ pro $d \gg 0$
Navíc (i) stupeň χ_X je m
(ii) vedoucí koef. χ_X je $\frac{1}{m!}$ krát kladné celé číslo

Definice. Nechť X je proj. podschéma $\mathbb{P}^n$. Stupeň $\deg X$ je $(\dim X)!$ krát vedoucí koef. χ_X ($\in \mathbb{Z}_+$)

Př. (i) X má dim 0: $\deg X = $ délka $X =$ "počet bodů X"
(ii) $\deg \mathbb{P}^n = 1$
(iii) stupeň twistované kubické křivky je 3

Př. Nechť $X = \operatorname{Proj} k[x_0, \dots, x_n]/(f)$, kde f je hom. pol. stupně $\deg f$
Počítejme $\deg X$:

$$S(X)^d = k^{(d)}[x_0, \dots, x_n] / f \cdot k^{(d-\deg f)}[x_0, \dots, x_n]$$

$$h_X(d) = \dim k^{(d)}[x_0, \dots, x_n] - \dim k^{(d-\deg f)}[x_0, \dots, x_n] =$$

$$= \binom{d+n}{n} - \binom{d - \deg f + n}{n} =$$

$$= \frac{1}{n!} d^n + \frac{1}{n!} d^{n-1}(n + \dots + 1) + lot$$

$$- \left(\frac{1}{n!} d^n + \frac{1}{n!} d^{n-1}(n - \deg f + \dots + 1 - \deg f) + lot \right)$$

$$= \frac{1}{n!} d^{n-1} \big(n + \dots + 1 - (n - \deg f + \dots + 1 - \deg f) \big) + lot$$

$$= \frac{1}{n!} d^{n-1} \cdot (n \cdot \deg f) + lot$$

$$= \frac{\deg f}{(n-1)!} d^{n-1} \rightsquigarrow \deg X = \deg f.$$

Def. Ideál $I \subseteq S$ je ireducibilní, jestliže 13.5.

$$I = J \cap J' \Rightarrow J = I \text{ nebo } J' = I$$

Lemma: Nechť S je Noetherovský okruh (graduovaný).
Potom každý ideál (homogenní) je konečným průnikem ireducibilních ideálů

Def. $I \subseteq S$ se nazývá primární, jestliže

$$xy \in I \Rightarrow \underset{(x \in \sqrt{I})}{x^n \in I} \text{ pro nějaké } n \text{ nebo } y \in I \quad \text{(je to komutativní)}$$

Lemma: Každý ired. ideál v Noether. okruhu je primární

Důkaz: $I \subseteq S$ ireducibilní $\rightsquigarrow$ přejdeme k S/I

$$xy = 0 \overset{?}{\Rightarrow} x^n = 0 \text{ nebo } y = 0$$

Trik: uvážíme posloupnost ideálů

$$\mathrm{Ann}(x) = \{ s \in S/I \mid sx = 0 \} \quad \text{(anihilátor } x\text{)}$$

$$\mathrm{Ann}(x) \subseteq \dots \subseteq \mathrm{Ann}(x^n) \subseteq \dots$$

Z Noetherovskosti $\mathrm{Ann}(x^n) = \mathrm{Ann}(x^{n+1})$ (inkluze mají „pevný bod")

$$z \in (x^n) \cap (y)$$
$$z = ax^n = by \quad / \cdot x$$
$$ax^{n+1} = bxy = 0$$

$$a \in \mathrm{Ann}(x^{n+1}) = \mathrm{Ann}(x^n)$$
$$z = ax^n = 0$$

Tedy $(x^n) \cap (y) = 0 \Rightarrow x^n = 0$ nebo $y = 0$ $\square$

Lemma: Nechť I je primární ideál. Potom $\sqrt{I}$ je prvoideál.

Důkaz: $xy \in \sqrt{I} \Rightarrow x^m y^m \in I \Rightarrow x^{m\cdot n} \in I$ nebo $y^{m} \in I$

tj. $x \in \sqrt{I}$ nebo $y \in \sqrt{I}$ $\square$

• X projektivní podschéma $\mathbb{P}^n$

$I(X)$ saturovaný homog. ideál v $k[x_0, \dots, x_n]$

$I(X) = \bigcap_k I_k$ kde I_k je ireducibilní

není úplně jednoznačný

$$I(X) \subseteq \overset{\text{prvoideál}}{p} \iff \sqrt{I(X)} \subseteq p \iff \bigcap_k \overset{\text{prvoideály}}{\sqrt{I_k}} \subseteq p \iff \exists k : \sqrt{I_k} \subseteq p$$

"$\Rightarrow$" $\prod_k \sqrt{I_k} \subseteq \bigcap_k \sqrt{I_k} \subseteq p$

$\Downarrow$

$\exists k : \sqrt{I_k} \subseteq p$

$\sqrt{}$ prvoideálu $I(X) = \bigcap_k I_k$ prvoideály $\sqrt{I_k}$
obsahují všechny „minimální prvoideály $I(X)$"
(min. prvoid. obs. $I(X)$)

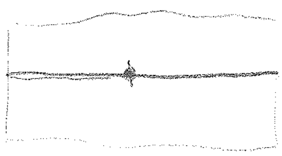
$V(\sqrt{I_k})$ ... ired. komponenty X

Pozn. systém ired. komponent nezávisí na volbě rozkladu

Př. $I = (x_1 x_2, x_2^2) = (x_1, x_2^2) \cap (x_2) \subseteq k[x_0, x_1, x_2]$

$\sqrt{(x_1, x_2^2)} = (x_1, x_2)$ ... $(1:0:0)$ počátek

$\sqrt{(x_2)} = (x_2)$ ... $(a:b:0)$ přímka obsahující počátek



$y = 0$

1. derivace v počátku nulová tedy dvojnás. kořen

Nula-rozměrná proj. podschémata $\mathbb{P}^n$

Nechť $I \subseteq k[x_0, \dots, x_n] = S$ leží pouze v kon. mnoha maximálních relevantních $\Rightarrow$ neleží v žádném nemaximálním prvoideálu
(takové leží v nekon. mnoha max. – body red. proj. variety $\dim > 0$)

$$I = \bigcap_k I_k \qquad \sqrt{I_k} = m_{p_k} \qquad x_1, \dots, x_n \in \sqrt{I_k}$$

$$x_1^l, \dots, x_n^l \in I_k$$

$$I_k \supseteq m_{p_k}^{d_k} \qquad d_k = n(l-1)+1$$

$$S/I_k \longleftarrow S/m_{p_k}^{d_k}$$

$$h_{S/I_k}(d) = \text{konst} \Leftarrow h_{S/m_{p_k}^{d}}(d) = \text{konst.}$$

- $I_k + I_k' = S$ (interpolace)

$$\begin{matrix} I_k & + & I_k' & = & S \\ \cup & & \Uparrow & & \\ m_{p_k}^{d_k} & + & m_{p_k'}^{d_k'} & = & S \end{matrix}$$

$$\begin{tikzcd} & I_k + I_k' = S & \\ I_k \arrow[ur, dash] & & I_k' \arrow[ul, dash] \\ & I_k \cap I_k' \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

$$0 \to S/(I_k \cap I_k') \longrightarrow S/I_k \oplus S/I_k' \longrightarrow S/(I_k + I_k') \longrightarrow 0$$

$$f \longmapsto (f, f)$$

$$(f, g) \longmapsto f - g$$

je exaktní.

$$\dim S^{(d)}/(I_k \cap I_k')^{(d)} = \dim S^{(d)}/I_k^{(d)} + \dim S^{(d)}/I_k'^{(d)}$$

$$h_{\underbrace{X_k \cup X_k'}_{\text{proj. schéma } S/(I_k \cap I_k')}}(d) = h_{X_k}(d) + h_{X_k'}(d) \quad \text{konst pro } d \gg 0$$

7

Tvrzení: Nechť X je proj. podschéma $\mathbb{P}^n$. Potom $\exists$ jediný polynom $\chi_X \in \mathbb{Q}[d]$ (numerický) t. ž. $h_X(d) = \chi_X(d)$ pro $d \gg 0$

$\chi_X(d) \in \mathbb{Z}$ pro $d \in \mathbb{Z}$, ($d \gg 0$)

Vedoucí koef. χ_X je $\frac{1}{m!}$ krát kladné číslo, kde m je stupeň χ_X (dimenze X)

Důkaz: Je-li každá ired. komponenta X dimenze 0, už máme hotovo.

Nechť X má dim nějaké ired. komponenty alespoň 1 a vedeme indukci vzhledem k této dimenzi.

Vezmeme f hom. pol., který není nulový na žádné ired. komponentě X

Ozn. $S = k[x_0, \dots x_n]$

$$0 \to S/I(X) \xrightarrow{f\cdot} S/I(X) \longrightarrow S/(I(X)+(f)) \longrightarrow 0$$

Exaktnost je zřejmá s výjimkou injektivity násobení f.

$$I(X) = \bigcap_k \overset{\text{prvoideál}}{I_k}$$

$$f^n \notin I_k \text{ pro žádné } n, k$$

$$\text{Nechť } g \in S,\ fg \in I(X) \Rightarrow fg \in I_k \overset{\text{prvoideál}}{\Longrightarrow} g \in I_k \Rightarrow g \in \bigcap I_k = I(X)$$

$$\Rightarrow g = 0 \text{ v } S/I(X)$$

$$h_X(d) = h_X(d - \deg f) + h_{X \cap Z(f)}(d)$$

Předp., že $\deg f = 1$. $= h_X(d) - h_X(d-1) = h_{X \cap Z(f)}(d)$

Použijeme IP na $X \cap Z(f)$ - má dimenzi ired. komponent menší

$p \supseteq I(X) + (f)$

$\Rightarrow \exists k: p \supseteq \sqrt{I_k},\ p \supseteq (f)$

$V(p) \subseteq \underbrace{V(\sqrt{I_k}) \cap V(f)}$

menší dim než (právě o 1) $V(\sqrt{I_k})$, protože $f \notin \sqrt{I_k}$

$$h_X(d) - h_X(d-1) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i \binom{d}{i}$$

koef. u $\frac{1}{(m-1)!} d^{m-1}$

$c_{m-1} \in \mathbb{Z}_+$

$d \gg 0$

stupeň $X \cap Z(f)$

$\Delta h_X(d-1)$

$$h_X(d) = c + \sum_{i=0}^{m-1} c_i \binom{d+1}{i+1}$$ se dk jednoduše indukcí. $\square$

Tvrzení: Nechť X_1, X_2 jsou m-rozměrné ($\mathcal{X}_{X_1}, \mathcal{X}_{X_2}$ mají st m) a nechť $\dim(X_1 \cap X_2) < m$.
Potom $\deg(X_1 \cup X_2) = \deg X_1 + \deg X_2$

Důkaz: $X_1 \cap X_2 = \operatorname{Proj}(S/(I(X_1) + I(X_2)))$

$I(X) = \bigcap_k P_k$

$X = \bigcup_k Z(P_k)$

$X_1 \cup X_2 = \operatorname{Proj}(S/(I(X_1) \cap I(X_2)))$

$\operatorname{Proj}(S/P_k)$

$$0 \to S/I(X_1) \cap I(X_2) \to S/I(X_1) \oplus S/I(X_2) \to S/I(X_1) + I(X_2) \to 0$$

$$\underbrace{h_{X_1}(d) + h_{X_2}(d)}_{\text{stupeň } m} = h_{X_1 \cup X_2}(d) + \underbrace{h_{X_1 \cap X_2}(d)}_{\text{st } m-1}$$ porovnáním koef u d^m

Př. $I = (\cancel{x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2})\ (x_0x_1x_2)$

$$V(I) = \left\{ (x_0 : x_1 : x_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_0 = 0 \text{ nebo} \\ x_1 = 0 \text{ nebo} \\ x_2 = 0 \end{array} \right\} = V(x_0) \cup V(x_1) \cup V(x_2)$$ geom.

$I = (x_0) \cap (x_1) \cap (x_2)$

$$\deg \operatorname{Proj}(S/I) = 3 \cdot \deg S/(x_0) = 3 \cdot 1 = 3$$

stupeň polynomu

Bezoutova věta: Nechť X je projektivní podschéma $\mathbb{P}^n$, nechť $f \in k[x_0,\dots,x_n]$ je homog. pol. t.ž. není nulový na žádné ired. komponentě X.

Potom $\deg(X \cap Z(f)) = \deg X \cdot \deg f$

Důkaz: $0 \to S/I(X) \xrightarrow{f\cdot} S/I(X) \to S/(I(X)+(f)) \to 0$

$$h_X(d) = h_X(d-\deg f) + h_{X\cap Z(f)}(d)$$

$$h_X(d) = \frac{\deg X}{m!} d^m + c_{m-1} d^{m-1} + lot$$

$$h_{X\cap Z(f)}(d) = h_X(d) - h_X(d-\deg f)$$

$$= \frac{\deg X}{m!} d^m + c_{m-1} d^{m-1} - \frac{\deg X}{m!}(d-\deg f)^m - c_{m-1}(d-\deg f)^{m-1} + lot$$

$$= \left(c_{m-1} + \frac{\deg X}{m!}\binom{m}{1}\deg f - c_{m-1}\right) d^{m-1} + lot$$

$$= \frac{\deg X \cdot \deg f}{(m-1)!} d^{m-1} + lot \qquad \square$$

20.5.

- $m_p^d \subseteq I \subseteq m_p$
  $m_{p'}^{d'} \subseteq I' \subseteq m_{p'}$

$$\begin{tikzcd} & I+I' \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ m_p^d & & m_{p'}^{d'} \end{tikzcd}$$

m_p^d leží pouze v jediném max. relevantním ideálu m_p, analogicky pro $m_{p'}^{d'}$, $I+I'$ nemůže ležet v žádném max. relevantním ideálu, tedy jediný max. ideál obsahující $I+I'$ je $(x_0,\dots,x_n)$ (ten irelevantní)

$$\sqrt{I+I'} = (x_0,\dots,x_n) \Rightarrow \overline{I+I'}^{\,(\text{saturace})} = (1) = k[x_0,\dots,x_n]$$

jediný max. ideál v okolí je I_p

Nechť $I = \bigcap \underset{\substack{\text{ireduc.} \\ \Downarrow \\ \text{primární}}}{I_k} = \bigcap\limits_{p \in \operatorname{Proj} S/I} I_p$ $\qquad m_p^d \subseteq I_p \subseteq m_p$

$$I_p = \bigcap_{\sqrt{I_k} = m_p} I_k$$

$$\begin{tikzcd}
I_p \arrow[dr, dash] & & \\
& I + m_p^{d_p} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
m_p^{d_p} & & I
\end{tikzcd}$$

mají stejnou saturaci

$$I = \bigcap I_p = \bigcap I + m_p^{d_p}$$

$$\deg S/I = \sum_{p \in \operatorname{Proj} S/I} \deg S/I + m_p^{d_p}$$

$$= \sum_{p \in \operatorname{Proj} S/I} \dim S_{(d_p)} / (I + m_p^{d_p})_{(d_p)}$$

kde $d_p(p) \neq 0$

Př. Určete stupeň ~~…~~

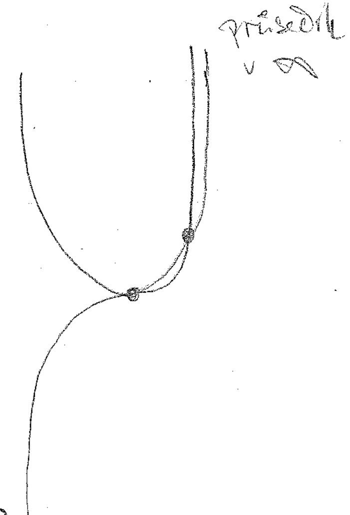
$$\operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2] \Big/ (\underbrace{x_0 x_2 - x_1^2}_{\text{parabola}}, \underbrace{x_0^2 x_2 - x_1^3}_{\text{kubická křivka}})$$

$$x_0 x_2 - x_1^2 = x_0^2 x_2 - x_1^3 = 0$$

$$x_0 = 1: \quad \underbrace{x_2 - x_1^2 = 0 \qquad x_2 - x_1^3 = 0}_{x_2 = x_1^2 = x_1^3}$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \qquad$ bod $[1; 1; 1]$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \qquad$ bod $[1; 0; 0]$



$$x_0 = 0: \quad -x_1^2 = -x_1^3 = 0$$

$x_2 =$ lib. tedy např. $1 \qquad$ bod $[0; 0; 1]$

bod $[1;0;0]$

$d=1$: $k[x_1,x_2]/(x_2-x_1^2, x_2-x_1^3, x_1,x_2) \Rightarrow \dim = 1$

$d=2$: $k[x_1,x_2]/(x_2-x_1^2, x_2-x_1^3, \underbrace{x_1^2, x_2^2}_{x_1 x_2}) = k[x_1,x_2]/(x_2, x_1^2)$, $\dim = 2$

$d=3$: $k[x_1,x_2]/(x_2-x_1^2, x_2-x_1^3, x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3)$

$= k[x_1,x_2]/(x_1^3, x_2, x_1^2) = k[x_1,x_2]/(x_2, x_1^2) \Rightarrow \dim = 2$

Obecně: $\left(k[x_1,\dots,x_n]/I+m_p^d = R/I+m_p^{d+1} \right)$

$$I+m_p^d = \underbrace{I+m_p^{d+1}} \qquad I+m_p^{d+2}$$

$$I+m_p(I+m_p^d) = I+m_p(I+m_p^{d+1})$$

stupeň v $[1;1;1]$

$k[x_1,x_2]/(x_2-x_1^2, x_2-x_1^3)+(x_1-1, x_2-1)^d$ $\quad y_1 = x_1-1$, $y_2 = x_2-1$

$\cong k[y_1,y_2]/((y_2+1)-(y_1+1)^2, (y_2+1)-(y_1+1)^3)+(y_1,y_2)^d$

(Počítejme v $k[y_1,y_2]/(y_1,y_2)^d$ ... pol. stupně $\leq d-1$)

$d=1$: $\dim=1$

$d=2$: $(y_2-y_1^2-2y_1, y_2-y_1^3-3y_1^2-3y_1)+(y_1,y_2)^2$

$=(y_2-2y_1, y_2-3y_1)+(y_1,y_2)^d$

$=(y_1,y_2)$ $\quad \dim=1$

Bod $[0;0;1]$ - lokalizace vzhledem k x_2

$$k[x_0,x_1] / (x_0-x_1^2, x_0^2-x_1^3) + (x_0,x_1)^d$$

$d=1$: $\dim = 1$

$d=2$: $(x_0-x_1^2, x_0^2-x_1^3) + (x_0,x_1)^2 = (x_0, x_1^2)$ $\quad \dim = 2$

$d=3$: $(x_0-x_1^2, x_0^2-x_1^3) + (x_0,x_1)^3 = (x_0-x_1^2, x_0^2, x_1^3) =$

$= (x_0x_1 - x_1^3, x_0^2, x_1^3) = (x_0x_1, x_0^2, x_1^3)$ $\quad \dim = 3$

$d=4$ (ve podstatě v opakujících polynomech) $\quad (x_0-x_1^2, x_0^2-x_1^3) =$

$= (x_0-x_1^2, x_1^3)$ je Gröbnerova báze

$$x_0-x_1^2$$

$$x_0^2 - \cancel{x_0x_1^2} \qquad x_0x_1 - \cancel{x_1^3}$$

$$x_0^3 \qquad x_0^2x_1 \qquad \cancel{x_0^2x_1} \qquad x_0x_1^2$$

$$\cancel{x_0^2} - x_1^3$$

$$\cancel{x_0^3} \qquad \cancel{x_0^2}x_1$$

$x_0-x_1^2$
x_0^2
x_0x_1
x_0^3
$x_0^2x_1$
$x_0x_1^2$
x_1^3
$(\dim 7)$

$$\dim I + m_0^4 \subseteq \underbrace{k[x_0,x_1] / (x_0,x_1)^4}_{\dim 10}$$

$\Rightarrow 10 - 7 = 3$ stupeň je 3

Př. $C \subseteq \mathbb{P}^3$

$$C = \{(s^3 : s^2t : st^2 : t^3) \mid (s:t) \in \mathbb{P}^1\} \cong \mathbb{P}^1$$

ired. proj. varieta

$\deg C = 3$

Ukážeme, že C nelze napsat jako $V(f,g)$

Kdyby to tak bylo, potom $3 = \deg f \cdot \deg g$

$\Rightarrow \deg f = 1$ (nebo $\deg g = 1$)

$\Rightarrow f$ je lineární, tj. C leží v nadrovině, což není pravda, spor.

$$C = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mid x_1^2 = x_0 x_2,\ x_2^2 = x_1 x_3,\ x_1 x_2 = x_0 x_3\}$$

$$V(x_1^2 - x_0 x_2,\ x_2^2 - x_1 x_3) = C \cup \underbrace{\{(a:0:0:b)\}}_{\deg 1}$$

Věta: Každý izomorfismus $f: \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ je lineární
(kolineace)

Důkaz: $H \subseteq \mathbb{P}^n$ nadrovina, $H = V(l)$, $L \subseteq \mathbb{P}^n$ přímka neležící v H

$H \cap L$ má právě 1 bod navíc násobnosti 1.

$1 = \deg H \cap L = \deg H \cdot \deg L$

$f(H \cap L) = f(H) \cap f(L)$ má opět násobnost 1
(protože se protínají transverzálně)

$1 = \deg f(H) \cap f(L) = \deg f(H) \cdot \underbrace{\deg f(L)}_{1}$

Tedy $f(H)$ je opět nadrovina. $f(H) = V(l \circ f^{-1})$

f zachovává lin. formy $\Rightarrow f$ je lineární. $\square$

Divizory na křivkách

Nechť C je ~~křivka~~ (projektivní), tj. 1-dim (ireducibilní) proj. varieta v $\mathbb{P}^n$.

Def: Divizor na C je celočíselná kombinace

$$a_1 P_1 + \dots + a_m P_m \quad \text{bodů } P_i \in C$$

$$\operatorname{Div} C = \mathbb{Z}(C)$$

(grupa divizorů na C je volná komut. grupa na množině bodů křivky C)

Stupeň divizoru je $a_1 + \dots + a_m \in \mathbb{Z}$

$$\deg : \operatorname{Div} C \to \mathbb{Z}$$

Nechť $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ je homog. pol., který nenulový na (žádné komponentě) C.

Definujme $(f) \in \operatorname{Div} C$ následovně:

$C \cap Z(f)$ je proj. podschéma dimenze 0

sestává z kon. mnoha bodů, každý má nějaký stupeň

$P_1, \dots, P_m$ $\qquad \deg S/(I(C) + I(f))_{P_i} = a_i$

$$(f) = \sum a_i P_i$$

Podle Bezoutovy věty $\deg (f) = \deg f$

Chtěli bychom definovat pro $\varphi = \frac{f}{g} \in K(C)^\times$

$$(\varphi) = (f) - (g)$$

Lemma: $(fg) = (f) + (g)$

Def.: Divizory tvaru (φ), kde $\varphi \in K(C)^\times$ nazýváme hlavní, tvoří podgrupu v $\mathrm{Div}\, C$:

$$\mathrm{Div}^0\, C = \{D \in \mathrm{Div}\, C \mid \deg D = 0\}$$

Definujeme: $\mathrm{Cl}\; C = \mathrm{Div}\, C / \text{hlavní divizory}$

$$\mathrm{Cl}^0\; C = \mathrm{Div}^0\, C / \text{— " —}$$

Věta: $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}$ nebo lépe $\mathrm{Cl}^0\, C = 0$.

Důkaz: Potřebujeme dk., že každý divizor stupně 0 je hlavní.

$$D = \sum a_i P_i \quad , \quad P_i = (x_i : y_i)$$

$$\varphi = \prod (\underbrace{x y_i - y x_i}_{\text{lin. fce v } x, y \text{ nulová na } P_i})^{a_i}$$

$$\sum a_i = 0 \Rightarrow \varphi \in K(C)$$

Info: $C \subseteq \mathbb{P}^2$ kubická křivka, $C = V(f)$ pro nějaký f kubický pol.

$$\underset{\{P - P_0\}}{\mathrm{Cl}^0\, C} \cong C \qquad P_0 \in C \text{ pevné}$$

$P_1 + \dots + P_m - Q_1 - \dots - Q_m \sim P_3 + \dots + P_m + Q - Q_3 - \dots - Q_m - P \sim \dots \sim P - Q \sim R - P_0$

vedeme P_1, P_2 přímku, ta protne C ve třetím bodě P

$P_1 + P_2 + P - Q_1 - Q_2 - Q$ je hlavní divizor

Na C je struktura kom. grupy

(viz Eliptické křivky)