Technické rezervy

Brno 2012

Osnova

Rezerva pojistného životních pojištění

- Tato rezerva je určena ke krytí budoucích závazků ze životních pojištění.
- Počítá se většinou tak, že od hodnoty budoucích závazků pojistitele se odečte hodnota budoucího pojistného.
- Jedná se o nejdůležitější technickou rezervu v rámci klasických životních pojištění.
- Rozdíl mezi pojistnou částkou a vytvořenou rezervou pojistného životních pojištění se nazývá rizikový kapitál.

- Podle **principu ekvivalence** se celková hodnota očekávaného pojistného musí rovnat celkové hodnotě očekávaného pojistného plnění, pokud příjmy i výdaje diskontujeme ke stejné časové základně.
- V průběhu pojištění tato rovnost neplatí.
- Uvažujeme-li pojištění pro případ smrti běžně placené stejnými splátkami, tak z pojistného se na krytí pojistného plnění v **prvích letech odčerpává málo**, protože pravděpodobnost úmrtí je malá.

- Pojistné vybrané v pozdějších letech kvůli vyšší pravděpdobnosti úmrtí už nestčí na krytí pojistného plnění, a proto musí pojišťovna **čerpat ze svých rezerv.**
- **Pojistná rezerva je suma,** kterou musí pojišťovna nahromadit **z přebytků v prvních letech** pojištění tak, aby mohla plnit svoje závazky i v budoucnosti.

Netto rezerva

- Nepočítá se zde se správními náklady a pracujeme pouze s netto hodnotami.
- Mějme pojištění se vstupním věkem x a pojistnou dobou n za roční pojistné $P_{x\overline{n}|}$, které vždy na počátku pojistného roku poskytuje na konci t-tého roku pojištění:
  - pojistné plnění ve výši a_t při dožití t-tého roku pojištění;
  - pojistné plnění ve výši b_t při úmrtí během t-tého roku pojištění.

Příklad

Uvažujme smíšené pojištění 40-ti leté osoby na dobu 20 let na pojistnou částku 10000Kč. Určete a_t a b_t vzhledem k t (platí, že $t = 0, 1, 2, ..., n$).

Prospektivní výpočet rezerv

- Vzhledem k tomu, jak je kalkulováno netto pojistné, musí platit

$$\begin{aligned}(a_1 \cdot D_{x+1} &+ ... + a_n \cdot D_{x+n} + b_1 \cdot C_x + ... + b_n \cdot C_{x+n-1}) \\ &- (P_{x\overline{n}|} \cdot D_x + ... + P_{x\overline{n}|} \cdot D_{x+n-1}) = 0\end{aligned}$$

- **Netto rezervu** nashromážděnou do konce t-tého roku pojištění ($t = 0, 1, ...n$) **označíme** symbolem ${}_tV_{x\overline{n}|}$, resp. ${}_tV_x$ pro trvalá pojištění.

Rozepsáním předchozího vzorce dostaneme vztah

$$
\begin{aligned}
{}_tV_{x\overline{n}|} &= (a_{t+1}\cdot p_{x+t}\cdot v + \ldots + a_n \cdot {}_{n-t}\,p_{x+t}\cdot v^{n-t} \\
&+ b_{t+1}\cdot q_{x+t}\cdot v + \ldots + b_n \cdot {}_{n-t-1|}\,q_{x+t}\cdot v^{n-t}) \\
&- (P_{x\overline{n}|} + P_{x\overline{n}|}\cdot p_{x+t}\cdot v + \ldots + P_{x\overline{n}|}\cdot {}_{n-t-1}\,p_{x+t}\cdot v^{n-t-1}) \\
&= \frac{\sum_{j=t+1}^{n}(a_j\cdot D_{x+j} + b_j\cdot C_{x+j-1})}{D_{x+t}} - \frac{P_{x\overline{n}|}\cdot\sum_{j=t+1}^{n} D_{x+j-1}}{D_{x+t}},
\end{aligned}
$$

- kde první zlomek je pojistné plnění na jednu pojistnou smlouvu očekávané od počátku $(t+1)$-ního roku a diskontované k tomuto okamžiku,
- druhý zlomek je pojistné na jednu pojistnou smlouvu očekávané od počátku $(t+1)$-ního roku a diskontované k tomuto okamžiku. Je ho možné psát ve tvaru $P_{x\overline{n}|}\cdot \ddot{a}_{x+t,\overline{n-t}|}$.

- Tento vzorec nazýváme ***prospektivní výpočet rezervy***. Znamená: *budoucí výdaje - budoucí příjmy*.
- Jestliže $t = 0$, pak platí ${}_0V_{x\overline{n|}} = 0$, což v praxi platí, protože výchozí **rezerva při uzavření pojistné smlouvy je nulová.**
- Pokud se jedná o **pojištění s jednorázovým pojistným**, pak druhý zlomek zmizí

$$ {}_tV_{x\overline{n|}} = \frac{\sum_{j=t+1}^{n} (a_j \cdot D_{x+j} + b_j \cdot C_{x+j-1})}{D_{x+t}} $$

Retrospektivní výpočet rezerv

- Znamená: *minulé příjmy - minulé výdaje*.
- Vypočteme podle vzorce

$$ {}_tV_{x\overline{n}|} = \frac{P_{x\overline{n}|} \cdot \sum_{j=1}^{t} D_{x+j-1}}{D_{x+t}} - \frac{\sum_{j=1}^{t}(a_j \cdot D_{x+j} + b_j \cdot C_{x+j-1})}{D_{x+t}}, $$

kde

- první zlomek je pojistné na jednu pojistno smlouvu očekávané do konce t-tého roku a zúročené k tomuto okamžiku,
- druhý zlomek je pojistné plnění na jednu pojistnou smlouvu očekávané do konce t-tého roku a zúročené k tomuto okamžiku.

Prospektivní netto rezervy pro některé druhy pojištění

- Budeme uvažovat jednotkovou pojistnou částku a jednotkový důchod, dále pak roční placení pojistného.
- **Pojištění pro případ dožití:** dosadíme $a_n = 1$, jinak $a_j = 0$ a $b_j = 0$. Odtud

$$
\begin{aligned}
{}_tV_{x\overline{n}|} &= \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - P_{x\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t,\overline{n-t}|} = \\
&= \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} \\
&= \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+n}}.
\end{aligned}
$$

- **Pojištění pro případ smrti:**

$$
\begin{aligned}
{}_tV_x &= A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} \\
&= 1 - \frac{D_x}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_{x+t}}{N_x};
\end{aligned}
$$

- **Dočasné pojištění pro případ smrti:**

$$
\begin{aligned}
{}_tV_{x\overline{n}|} &= A^1_{x+t,\overline{n-t}|} - P_{x\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t,\overline{n-t}|} \\
&= \frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}};
\end{aligned}
$$

- **Smíšené pojištění:**

$$
\begin{aligned}
{}_tV_{x\overline{n|}} &= A_{x+t,\overline{n-t|}} - P_{x\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x+t,\overline{n-t|}} \\
&= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t,\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x\overline{n|}}} = 1 - \frac{D_x}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}};
\end{aligned}
$$

- **Pojištění s pevnou dobou výplaty:**

$$
\begin{aligned}
{}_tV_{x\overline{n|}} &= v^{n-t} - P_{x\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x+t,\overline{n-t|}} \\
&= v^{n-t} - v^n \frac{D_x}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}};
\end{aligned}
$$

Pojištění odloženého doživotního důchodu:

$$ {}_tV_x = \begin{cases} {}_{k-t|}\ddot{a}_{x+t} - P_{x\overline{k|}} \cdot \ddot{a}_{x+t,\overline{k-t|}} = \frac{N_{x+k}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+k}} & \text{pro } t < k; \\ \ddot{a}_{x+t} = \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} & \text{pro } t \geq k. \end{cases} $$

Průběh netto rezerv

- V případě *dočasného pojištění pro případ smrti,* netto rezerva vždy nejprve roste a po dosažení určitého maxima opět klesá k nule.
- Ve *smíšeném pojištění* netto rezerva neustále roste.
- U pojištění *odloženého doživotního důchodu* nejprve rezerva roste a po dosažení maxima už jen klesá.

Příklad

30-ti letá osoba se pojistila pro případ smrti na pojistnou částku 100000 Kč. Pojistné zaplatila jednorázově. Jak velká je netto rezerva po 10. roce pojištění a po 40. roce pojištění?

Příklad

30-ti letá osoba se pojistila pro případ smrti na pojistnou částku 100000 Kč. Pojistné platí běžně. Jak velká je netto rezerva po 10. roce pojištění?

Rezrvy v neživotním pojištění

Rezerva na pojistná plnění

- Je určena na pojistná plnění z pojistných událostí:
  - hlášených do konce běžného účetního období, ale v běžném účetním období dosud nezlikvidovaných. Značíme **RBSN rezerva** (Reported But Not Settled). Mluvíme o otevřených pojistných nárocích.
  - vzniklých do konce běžného účetního období, ale v běžném účetním období dosud nehlášených. Značíme **IBNR rezerva** (Incurred But Not Reported).
- Pro odhad výše této rezervy se využívají matematicko-statistické metody.
- Zahrnuje také předpokládané výdaje spojené s likvidací pojistných událostí a snižuje se o předpokládanou výši vymahatelných pohledávek za pojistné plnění.

Trojúhelníková schémata

- Využívají se pro výpočet rezerv typu RBNS a IBNR.
- Vycházejí z uspořádání podkladových údajů za minulé roky podle roku vzniku pojistné události do trojúhelníkových schémat.
- V trojúhelníkovém schématu jsou celková dosud vyplacená pojistná plnění uspořádaná v řádcích podle roku vzniku pojistné události a ve sloupcích podle počtu let, které od vzniku pojistné události uplynuly.
- Obvykle se zde zohledňuje inflace.

Metoda Chain Ladder (Stupňová metoda)

- Trojúhelníkové schéma se doplňuje na obdélík následujícím způsobem:
  1) K dispozici máme údaje o inflaci v jednotlivých letech a údaje o pojistných plněních $P_{i,j}$, které byly vyplaceny v jednotlivých letech $j = 0, 1, ..., n$ uplynulých od roku vzniku $i = 1, 2, ..., n$ pojistné události.
  2) Vyplacené pojistné plnění $P_{i,j}$ přepočítáme podle měr inflace za jednotlivé roky na úroveň cen ke konci vývojového roku n.
  3) Takto upravené trojúhelníkové schéma přepočítáme na kumulativní trojúhelnkové schéma podle vztahů

$$C_{i,0} = P_{i,0}$$

$$C_{i,j+1} = P_{i,j+1} + C_{i,j} \quad \text{pro } j \geq i.$$

Metoda Chain Ladder (Stupňová metoda)

4) Určíme **koeficienty vývoje pojistného plnění** λ_j podle vztahů

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{C_{0,1} + C_{1,1} + \ldots + C_{n-1,1}}{C_{0,0} + C_{1,0} + \ldots + C_{n-1,0}};$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{C_{0,2} + C_{1,2} + \ldots + C_{n-2,2}}{C_{0,1} + C_{1,1} + \ldots + C_{n-2,1}};$$

$$\vdots$$

$$\hat{\lambda}_n = \frac{C_{0,n}}{C_{0,n-1}};$$

Metoda Chain Ladder (Stupňová metoda)

5) Doplníme trojúhelník **odhady plnění** $\hat{C}_{i,j}$ podle vztahů

$$\hat{C}_{n,1} = \hat{\lambda}_1 \cdot C_{n,0};$$

$$\hat{C}_{n,2} = \hat{\lambda}_2 \cdot \hat{C}_{n,1} = \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_1 \cdot C_{n,0};$$

$$\hat{C}_{n-1,2} = \hat{\lambda}_2 \cdot C_{n-1,1};$$

$$\vdots$$

$$\hat{C}_{n,n} = \hat{\lambda}_n \cdot \hat{\lambda}_{n-1} \cdot \dots \cdot \hat{\lambda}_1 \hat{C}_{n,0}.$$

Metoda Chain Ladder (Stupňová metoda)

6) Odhadneme **celkové rezervy na pojistné plnění** na konci n-tého roku. V posledním sloupci tabulky totiž dostaneme odhadnuté kumulativní rezervy v posledním vývojovém roce $\hat{C}_{i,n}$. Odhad celkovývh rezerv na konci n-tého roku na pojistné události vzniklé ve sledovaných letech dostaneme, když od hodnot v posledním sloupci tabulky odečteme hodnoty, které jsou na diagonále a tyto výsledky sečteme. Tedy platí

$$\text{celkové rezervy} = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i} \right).$$

Doplněný kumulativní vývojový trojúhelník

Rok vzniku i	Vývojový rok					
	0	**1**	**2**	$\cdots$	**n-1**	**n**
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$	$\cdots$	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$\cdots$	$C_{1,n-1}$	$\hat{C}_{1,n}$
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$\cdots$	$\hat{C}_{2,n-1}$	$\hat{C}_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$	$\hat{C}_{n-1,2}$	$\cdots$	$\hat{C}_{n-1,n-1}$	$\hat{C}_{n-1,n}$
n	$C_{n,0}$	$\hat{C}_{n,1}$	$\hat{C}_{n,2}$	$\cdots$	$\hat{C}_{n,n-1}$	$\hat{C}_{n,n}$

Příklad

Rok vzniku	Vývojový rok 0	1	2	3 a více
2008	5802220	4996790	2400010	3336010
2009	4945340	4992930	2922270	
2010	5511360	6090750		
2011	7460030			

Období	2008	2009	2010	2011
Inflace	3%	4%	2%	2%

Chyba odhadu

- To do jaké míry odpovídají naše odhady skutečnosti si můžeme zpětně ověřit výpočtem **relativní chyby odhadu.**
- Tabulky s údaji o vývoji nekumulativních a kumulativních pojistných plnění doplníme zpětně o jejich odhady podle vztahu

$$C_{i,j} = \lambda_j \cdot C_{i,j-1} \quad \text{pro } i = 0, 1, ..., n, \; j = 1, 2, ..., n.$$

- Potom platí

$$\text{relativní chyba odhadu} = \left| \frac{S - O}{S} \right| \cdot 100\%,$$

kde
  - S je skutečná výška kumulativního nebo nekumulativního vyplaceného pojistného,
  - O je odhad pojistného.

Separační metoda

- Tuto metodu **navrhl** v roce 1972 **Verbeek**, který ji aplikoval v zajištění na projekci počtu ohlášených škod.
- Výhodou je, že **součástí této metody je odhad míry inflace.**
- Existuje několik postupů této metody.
- **Východiskem je vývojový trojúhelník** s nekumulativním pojistným plněním $P_{i,j}$, které je rozdělené podle roku vzniku pojistné události i a podle vývojového roku j.
- Známe také počet škod n_i, které byly zaznamenány v roce vzniku i.

Separační metoda

- Předpokládá se, že kdyby neexisstovala inflace, pak **v každém vývojovém roce** j by byl z celkové škody, bez ohledu na rok vzniku plnění i, vyplacen **konstantní podíl** r_j a v celém sledovaném období by se neměnila průměrná **výška individuální škody** c.
- Symbolem λ_{i+j} označíme **výšku skutečné průměrné individuální škody** v roce $i+j$, kde i je rok vzniku škody a j je vývojový rok pojistných plnění.
- Hodnoty λ_{i+j} jsou konstantní pro všechny kombinace i, j pro které je součet $i+j$ konstantní.
- Za těchto předpokladů platí

$$P_{i,j} = n_i \cdot r_j \cdot \lambda_{i+j}$$

- Rozdíl v λ_{i+j} je způsoben změnou míry inflace.

Doplněný kumulativní vývojový trojúhelník

Rok vzniku i	n_i	**Vývojový rok** j				
		0	**1**	…	**n-1**	**n**
0	n_0	$n_0 r_0 \lambda_0$	$n_0 r_1 \lambda_1$		$n_0 r_{n-1} \lambda_{n-1}$	$n_0 r_n \lambda_n$
1	n_1	$n_1 r_0 \lambda_1$	$n_1 r_1 \lambda_2$		$n_1 r_{n-1} \lambda_n$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	n_n	$n_n r_0 \lambda_n$				

Separační metoda

- Z hodnot $P_{i,j}$ budeme odhadovat hodnoty $r_0,\ r_1,\ ...,r_n$ a pomocí nich hodnoty $\lambda_0,\ \lambda_1,\ ...,\lambda_n$.
- Pomocí těchto hodnot doplníme předchozí tabulku.
- Zřejmě platí že

$$r_0 + r_1 + ... + r_n = 1,$$

  kde n je mximální počet let potřebných na zlikvidování škody.
- Plnění na každé diagonále předcházející tabulky jsou vykonané ve stejném kalendářním roce. Proto z vývoje hodnot $\lambda_0,\ \lambda_1,\ ...,\lambda_n$ můžeme posoudit vývoj míry inflace.

Separační metoda

- Abychom odstranili vliv hodnot n_i na výšku plateb, budeme dále analyzovat matici standardních hodnot

$$S_{i,j} = \frac{P_{i,j}}{n_i} = r_j \lambda_{i+j}, \quad \text{pro } 0 \leq i, j \leq n.$$

- **Odhad hodnot r_j a λ_{i+j}** pro $j = 0, 1, ..., n$ a $0 \leq i + j \leq n$:
  - Označme d_i vstupy na i-té diagonále tabulky pro $i = 1, 2, ..., n$. Pak platí

$$\begin{aligned} d_n &= S_{n,0} + S_{n-1,1} + ... + S_{1,n-1} + S_{0,n} \\ &= r_0\lambda_n + r_1\lambda_n + ... + r_{n-1}\lambda_n + r_n\lambda_n \\ &= \lambda_n(r_0 + r_1 + ... + r_n) = \lambda_n. \end{aligned}$$

  - A tedy platí

$$\hat{\lambda}_n = d_n.$$

Separační metoda

- Jediný vstup v trojúhelníku v tabulce, který obsahuje r_n je $S_{0,n} = r_n \lambda_n$, ze kterého dostaneme odhad

$$\hat{r}_n = \frac{S_{0,n}}{\hat{\lambda}_n}$$

- Podobně

$$\begin{aligned} d_{n-1} &= S_{n-1,0} + S_{n-2,1} + ... + S_{0,n-1} \\ &= r_0 \lambda_{n-1} + r_1 \lambda_{n-1} + ... + r_{n-1} \lambda_{n-1} \\ &= \lambda_{n-1}(r_0 + r_1 + ... + r_{n-1}) = \lambda_{n-1}(1 - r_n). \end{aligned}$$

- A tedy platí

$$\hat{\lambda}_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{1 - \hat{r}_n}.$$

Separační metoda

- Z údajů ve vývojovém roce $(n-1)$ dostáváme odhad $\hat{r}_{n-1}$, platí
$$S_{0,n-1} + S_{1,n-1} = r_{n-1}\left(\lambda_{n-1} + \lambda_n\right)$$
$$\hat{r}_{n-1} = \frac{S_{0,n-1} + S_{1,n-1}}{\lambda_{n-1} + \lambda_n}.$$
- Takto pokračujeme, dokud nezískáme všechny odhady.

Separační metoda

- Pro $t > n$ odhadneme λ_t použitím předpokladů o vývoji inflace v dalších letech.
- Když ve sledovaném období předpokládáme konstantní průměrnou výšku individuální škody ve stabilní měně, pak $\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} - 1$ vyjadřuje **míru inflace** plnění v roce t.
- Odhad rezervy na nevyplacené plnění, které bude vylacené ve vývojovém roce k za škody vzniklé v roce i, kde $i = 0, 1, ..., n$ a $n < i + k \leq 2n$ je daný vztahem

$$\hat{P}_{i,k} = n_i \hat{r}_k \hat{\lambda}_{i+k}$$