Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003

Ústav pro informace ve vzdělávání

Praha 2004

Vydalo OECD anglicky a francouzsky pod názvy The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills /
Cadre d'évaluation de PISA 2003 – Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, science et résolution de problèmes.

Přeloženo z angličtiny v rámci projektu MŠMT ME 588.

Obsah

Cílem mezinárodního výzkumu OECD/PISA je vyvinout indikátory, které ukazují, do jaké míry připravily vzdělávací systémy zúčastněných zemí patnáctileté žáky k tomu, aby se stali aktivními a tvůrčími členy společnosti. Výzkum se neomezuje na hodnocení vědomostí, které si žáci osvojili, ale spíše chce zjišťovat, zda své znalosti umějí používat v situacích každodenního života.

Definice zkoumané oblasti

Oblast matematické gramotnosti ve výzkumu OECD/PISA se zaměřuje na hodnocení toho, zda jsou žáci schopni analyzovat, uvažovat a sdělovat myšlenky, když přistupují k matematickým problémům z různých oblastí a situací, formulují je, řeší a interpretují svá řešení. Výzkum OECD/PISA klade důraz na problémy reálného světa a neomezuje se na situace a úlohy, se kterými se zpravidla setkáváme ve školách. V reálném životě, například při nakupování, cestování, vaření, při řešení finančních záležitostí nebo posuzování politických událostí, se lidé běžně ocitají v situacích, kdy by jim užití kvantitativního myšlení, prostorové představivosti nebo jiných matematických dovedností pomohlo vyjasnit, zformulovat nebo vyřešit jejich problémy. Tyto způsoby použití matematiky jsou založeny na dovednostech, které si žáci osvojují a procvičují při řešení úloh, které se běžně objevují ve školních učebnicích. Navíc však vyžadují schopnost použít tyto dovednosti v méně strukturovaných kontextech, kde pokyny nejsou tak jasné a kde je třeba nejprve rozhodnout, jaké znalosti mohou být v daném případě užitečné a jak se mají aplikovat.

Výzkum matematické gramotnosti OECD/PISA zjišťuje, do jaké míry mohou být patnáctiletí žáci považováni za poučené a přemýšlivé občany a za rozumné spotřebitele. Občané každé země jsou stále více konfrontováni se spoustou úkolů, které obsahují kvantitativní, prostorové, pravděpodobnostní a další matematické pojmy. Například sdělovací prostředky (noviny, časopisy, televize, internet) jsou plné informací o počasí, ekonomice, medicíně, sportu apod., které jsou prezentovány ve formě tabulek, map nebo grafů. Občané jsou dnes bombardováni informacemi o takových jevech, jako je „globální oteplování a skleníkový efekt“, „populační exploze“, „ropné skvrny na moři“ nebo „mizející krajina“. V neposlední řadě musejí být občané schopni vyznat se ve formulářích a v jízdních řádech, platit účty, úspěšně provádět finanční transakce, hledat nejvýhodnější nabídky na trhu atd. Výzkum matematické gramotnosti OECD/PISA se zaměřuje na schopnost patnáctiletých žáků (tedy žáků ve věku, kdy zpravidla končí své povinné matematické vzdělávání) používat matematické znalosti a vědomosti k orientaci v těchto záležitostech a k plnění příslušných úkolů.

Matematická gramotnost je pro výzkum OECD/PISA definována takto:

> *Matematická gramotnost je schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana.*

Tuto definici pomůže blíže objasnit několik vysvětlujících poznámek.

Matematická gramotnost ...

Termín „matematická gramotnost“ byl zvolen proto, aby se zdůraznilo, že důraz je kladen na funkční používání matematických znalostí v mnoha rozmanitých situacích a kontextech, které vyžadují úsudek a vhled. K tomu je ovšem zapotřebí značný objem základních matematických znalostí a dovedností, a proto také ony tvoří součást definice matematické gramotnosti. Gramotnost v lingvistickém smyslu předpokládá bohatou slovní zásobu a základní znalosti gramatických pravidel, fonetiky a pravopisu, ale nemůže být redukována jen na to. Při komunikaci člověk tyto prvky tvořivě kombinuje, aby dostál požadavkům skutečných životních situací, v nichž se ocitá. Analogicky nelze matematickou gramotnost redukovat jen na znalost matematické terminologie, faktů a postupů a na dovednosti provádět určité operace a aplikovat určité postupy, i když je samozřejmě předpokládá. Matematická gramotnost představuje tvořivé kombinování těchto prvků v závislosti na požadavcích příslušné situace.

... svět ...

Termín „svět“ znamená přírodní, sociální a kulturní prostředí, ve kterém jednotlivec žije. Freudenthal (1983) uvádí: „Naše matematické pojmy, struktury a myšlenky byly vynalezeny jako nástroj k uspořádání jevů fyzikálního, sociálního a mentálního světa.“

... proniknout ...

Termín „proniknout“ není míněn jen jako používání matematiky při řešení matematických problémů, ale zahrnuje i osobní zaujetí ve smyslu komunikování, posuzování, zaujímání postoje a vytváření vztahu k matematice a dokonce i uznání a oblibu matematiky. Definice matematické gramotnosti by proto neměla být chápána tak, že se omezuje jen na funkční používání matematiky. Zahrnuje také připravenost k dalšímu studiu nebo estetické a rekreační prvky matematiky.

... životní ...

Výraz „životní“ zahrnuje soukromý život jedince, jeho pracovní a sociální vztahy k lidem v okolí a k příbuzným a jeho život jako člena určité společnosti.

Klíčovou schopností, která vyplývá z tohoto pojetí matematické gramotnosti, je schopnost vymezit, formulovat a řešit problémy z různých oblastí a kontextů a interpretovat jejich řešení s užitím matematiky. Tyto kontexty sahají od čistě matematických až k takovým, ve kterých není matematická struktura zpočátku zřejmá a je na řešiteli, aby ji v nich rozpoznal. Je třeba zdůraznit, že uvedená definice se netýká pouze matematických znalostí na určité minimální úrovni, ale jde v ní o používání matematiky v celé řadě situací, od každodenních a jednoduchých až po neobvyklé a složité.

Postoje a emoce spojené s matematikou, jako například sebedůvěra, zvídavost, zájem a touha něco umět nebo pochopit, nejsou součástí definice matematické gramotnosti, ale přesto jsou pro ni důležitým předpokladem. V zásadě je možné být matematicky gramotný i bez těchto postojů a emocí. Ve skutečnosti však ten, kdo nemá jistý stupeň sebedůvěry, zvídavosti, zájmu ani touhy umět a pochopit něco, v čem jsou obsaženy matematické prvky, může jen těžko projevovat matematickou gramotnost. Uvedené postoje a emoce jsou uznávány jako významný korelát matematické gramotnosti. Nejsou součástí zkoumání matematické gramotnosti, budou však sledovány v jiných částech výzkumu OECD/PISA.

Teoretický základ koncepce matematické části výzkumu OECD/PISA

Vymezení matematické gramotnosti pro výzkum OECD/PISA je v souladu s rozsáhlou integrující teorií o struktuře a užívání jazyka, která je rozpracována v současném sociálně kulturním bádání věnovaném gramotnosti. V práci Jamese Gee *Preamble to a Literacy Program* (1998) se termín „literacy“ (gramotnost) vztahuje k užívání jazyka lidmi. Schopnost číst, psát, poslouchat a mluvit v nějakém jazyce je nejdůležitějším nástrojem, který nám zprostředkuje sociální aktivity. Každý lidský jazyk a každý způsob užívání jazyka má komplikovanou *strukturu* propojenou složitým způsobem s množstvím *funkcí*. Má-li být člověk v nějakém jazyce gramotný, musí ovládat mnoho prostředků ze struktury tohoto jazyka a tyto prostředky umět používat k různým sociálním funkcím. Považujeme-li matematiku za jazyk, analogicky požadujeme, aby se žáci učili nejen strukturní prvky obsažené v matematickém vyjadřování (termíny, fakta, znaky a symboly, postupy a dovednosti provádět určité operace v jednotlivých matematických oborech a strukturu těchto prvků v jednotlivých oborech). Musejí se také naučit používat tyto prvky k řešení nerutinních problémů v rozmanitých situacích vymezených jejich sociálními funkcemi. Přitom strukturní aspekty v matematice netvoří jen znalost základních termínů, postupů a pojmů, které se běžně učí ve škole. Patří mezi ně i to, jak jsou tyto prvky strukturovány a užívány. Bohužel se tak může stát, že rozsáhlé znalosti základních matematických prvků nejsou provázeny povědomím o jejich struktuře a o tom, jak se používají k řešení problémů. Tyto teoretické pojmy včetně souladu mezi „strukturními prvky“ a „funkcemi“, na nichž spočívá koncepce matematické části výzkumu OECD/PISA, můžeme ilustrovat následujícím příkladem.

Příklad 1: Veřejné osvětlení

Městská rada se rozhodla, že v trojúhelníkovém parčíku postaví lampu veřejného osvětlení tak, aby osvětlovala celý park. Kde by měla lampa stát?

Tento komunální problém lze řešit pomocí obecné strategie, kterou používají matematici. V koncepci matematické části výzkumu OECD/PISA ji budeme nazývat *matematizace*. Matematizaci lze popsat v pěti krocích:

1. Začneme od problému situovaného do reality.

   Určit místo v parku, kde má stát lampa.

2. Vyjádříme jej pomocí matematických pojmů.

   Park lze znázornit jako trojúhelník a osvětlenou plochu jako kruh, v jehož středu stojí lampa.

3. Postupně vyloučíme z problému reálné prvky tak, že formulujeme předpoklady o podstatných prvcích problému, zobecňujeme a formalizujeme. Tím zvýrazníme matematickou podstatu situace a převedeme reálný problém na problém matematický, který věrně reprezentuje danou situaci.

   Problém je převeden na určení středu kružnice opsané trojúhelníku.

4. Řešíme matematický problém.

   Využijeme znalosti, že střed kružnice opsané trojúhelníku leží v průsečíku os souměrnosti stran trojúhelníku, a sestrojíme osy souměrnosti dvou stran trojúhelníku. Jejich průsečík je středem kružnice.

5. Matematické řešení převedeme zpět do jazyka reálné situace.

   Vztáhneme toto zjištění na reálný park a posoudíme smysluplnost výsledku. Například kdyby byl v jednom ze tří rohů parku tupý úhel, řešení nebude vyhovovat, protože lampa by se nacházela vně parku. Praktická využitelnost matematického řešení může být rovněž ovlivněna umístěním a velikostí stromů v parku.

Právě tyto procesy charakterizují, jak matematici v širším smyslu zpravidla *dělají matematiku*, jak lidé využívají matematiku v nejrůznějších povoláních a jak by poučení a přemýšliví občané měli používat matematiku k tomu, aby úspěšně a kvalifikovaně řešili problémy reálného světa. Naučit se *matematizovat* by mělo být hlavním vzdělávacím cílem pro všechny žáky.

V dnešní době i v dohledné budoucnosti potřebuje každá země matematicky gramotné občany, kteří se dokáží orientovat ve velmi složité a rychle se měnící společnosti. Množství dostupných informací exponenciálně roste a občané se musejí umět rozhodovat, jak s těmito informacemi zacházet. V celospolečenských diskusích se stále více argumentuje kvantitativními informacemi a jedním z příkladů, který ukazuje, že by občané měli být matematicky gramotní, je rostoucí potřeba hodnotit a posuzovat správnost závěrů a tvrzení formulovaných na základě výzkumných šetření a studií. Schopnost posuzovat správnost takových tvrzení je a bude čím dál více důležitou složkou odpovědnosti občana. Základní prvky používání matematiky v takto složitých situacích tvoří jednotlivé kroky procesu matematizace. Neschopnost používat matematický přístup může vést ke sporným osobním rozhodnutím, ke zvýšené vnímavosti k pseudovědám a v profesionálním i veřejném životě k rozhodování na základě chybných informací.

Matematicky gramotný občan si uvědomuje rychlost změn a jimi vyvolanou potřebu celoživotního vzdělávání. Nutnou podmínkou úspěšného zařazení do společnosti je kreativní, flexibilní a praktická adaptace na tyto změny. Dovednosti získané ve škole jistě nebudou stačit potřebám občanů po většinu jejich života v dospělosti.

Tyto požadavky se promítají také do nároků na pracovní sílu. Od dělníků se čím dál méně očekává, že budou celý život provádět monotónní fyzické práce. Místo toho se aktivně zapojují do sledování výstupů různých vysoce moderních strojů a zařízení, zpracovávají množství informací a účastní se týmového řešení problémů. Stále více povolání bude vyžadovat schopnost chápat, sdělovat, používat a vysvětlovat pojmy a postupy založené na matematickém myšlení. Základními stavebními kameny tohoto druhu matematického myšlení jsou jednotlivé kroky procesu matematizace.

Matematicky gramotní občané považují matematiku za dynamický, proměnlivý a významný obor, který často slouží jejich potřebám.

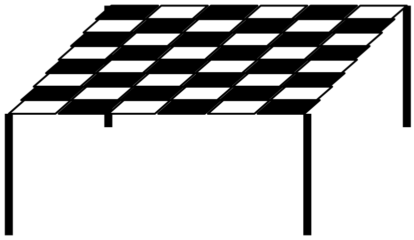
Základní otázkou výzkumu OECD/PISA je, jak hodnotit, zda jsou patnáctiletí žáci matematicky gramotní ve smyslu schopnosti *matematizovat*. U časově omezeného šetření je však hodnocení této schopnosti obtížné, protože kompletní provedení procesu od reality k matematice a zpět vyžaduje, zejména ve složitějších reálných situacích, spolupráci, nalezení vhodných zdrojů a dostatek času.

Pro ilustraci *matematizace* při řešení složitějšího problému jsme zvolili následující příklad, který řešili žáci v jedné třídě osmého ročníku (Romberg, 1994).

Příklad 2: Hra s mincemi

Na pouti házejí hráči mince na desku rozdělenou na čtverce. Když se mince dotkne čáry, hráč ji prohraje. Když se mince skutálí z desky, vrátí se zpět. Když však zůstane celá ležet uvnitř čtverce, vyhraje hráč minci zpět a k tomu ještě prémii.

Jaká je pravděpodobnost výhry v této hře?

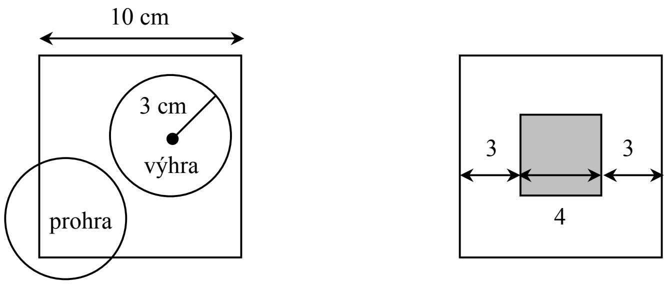


Tato úloha je zřetelně situována do reality. Žáci si nejprve uvědomili, že pravděpodobnost výhry závisí na poměru velikosti čtverců a mince (identifikace významných proměnných). Dále si uvědomili, že by se tato závislost asi lépe zkoumala pro jeden čtverec a jeden menší kruh (převedení reálného problému na matematický a získání odstupu od reality). Pak se rozhodli, že se budou zabývat jen jedním konkrétním případem (použití heuristiky – „když neumíš vyřešit daný problém, řeš takový případ, který svedeš“). Další činnost byla prováděna na tomto konkrétním případu. Zvolili poloměr mince 3 cm a stranu čtverce 10 cm. Uvědomili si, že pro výhru musí být střed mince alespoň 3 cm od každé strany, jinak její okraj bude ležet mimo čtverec. Množinu všech možností tedy představuje čtverec o straně 10 cm a množinu možností výhry čtverec o straně 4 cm, jak ukazuje obrázek 1.

Pravděpodobnost výhry byla vypočítána jako poměr obsahu příslušných čtverců: množiny možností výhry a množiny všech možností (pro uvedený případ $p = 16/100$). Pak se žáci zabývali mincemi jiných velikostí, zobecnili problém a vyjádřili jeho řešení v algebraickém tvaru. Nakonec rozšířili svá zjištění tak, že vypočetli poměry velikostí mincí a čtverců pro různé konkrétní situace, zhotovili si herní desky a empiricky testovali výsledky (převedení matematického řešení do jazyka reálné situace).

V tomto řešení je obsaženo všech pět složek *matematizace*. I když jde o složitý problém, všichni patnáctiletí žáci by měli znát matematické prvky potřebné k jeho řešení. Je ovšem pravda, že na řešení úlohy pracovali žáci v této třídě společně tři dny.

Obr. 1: Vyhraný hod a prohraný hod (vlevo), množina všech možností a množina možností výhry (vpravo)



K posouzení toho, zda patnáctiletí žáci umějí používat své matematické znalosti k řešení matematických problémů, s nimiž se ve světě setkají, bychom teoreticky měli shromáždit informace o jejich schopnosti *matematizovat* takovéto složité situace. To je však prakticky nemožné. Místo toho byly pro výzkum OECD/PISA vyvinuty úlohy, které jsou zaměřeny na jednotlivé složky tohoto procesu. V následující kapitole bude popsána strategie, která byla zvolena pro vytvoření vyváženého souboru testových úloh tak, aby vybrané úlohy pokryly všech pět složek *matematizace*. Na základě odpovědí žáků na tyto úlohy pak bude stanovena jejich úroveň matematické gramotnosti.

Uspořádání oblasti

Koncepce matematické části výzkumu OECD/PISA představuje základní principy a popis výzkumu, jehož cílem je zjistit, jak matematicky gramotní jsou patnáctiletí žáci čili zda a v jaké míře umějí patnáctiletí žáci používat matematiku kvalifikovaným způsobem, když jsou konfrontováni s problémy reálného světa. Pro podrobnější popis zkoumané oblasti se rozlišují tři složky matematické gramotnosti:

- *situace a kontexty*, do nichž jsou zasazeny problémy, které mají žáci řešit,
- *matematický obsah*, který by měl být použit při řešení problémů; pro účely výzkumu je uspořádán do několika *tematických okruhů*,
- *kompetence*, které se uplatňují při řešení problémů v procesu propojování reálného světa, v němž problémy vznikají, s matematikou.

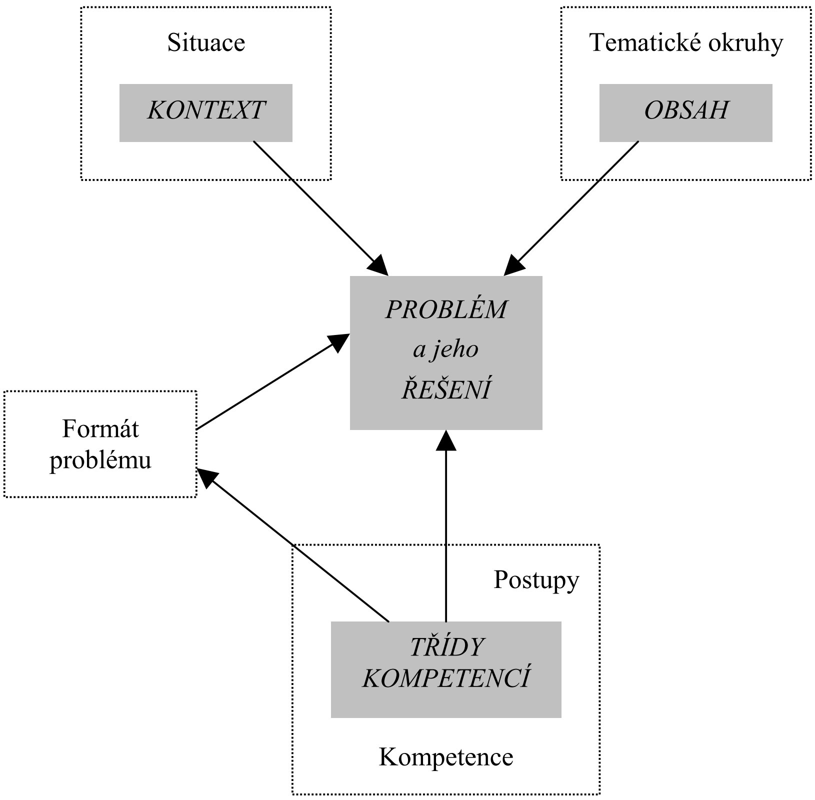
Uvedené složky budou blíže vysvětleny v následujících kapitolách. Jejich grafické znázornění představuje obrázek 2.

Úroveň matematické gramotnosti se projeví, když jsou matematické znalosti a dovednosti používány k řešení problémů. Problémy (a jejich řešení) se mohou vyskytovat v rozmanitých situacích a kontextech v rámci osobních zkušeností jednotlivce. Problémy, které jsou předmětem výzkumu OECD/PISA, vycházejí z reálného světa, a to dvěma způsoby. Problémy jednak existují v rámci určitých obecnějších situací, které mají vztah ke skutečnému životu žáků. Tyto situace jsou součástí reálného světa a na obrázku jsou znázorněny rámečkem vlevo nahoře. V rámci těchto situací mají problémy konkrétnější kontext. Ten znázorňuje šedě zbarvené pole uvnitř rámečku situací.

Ve výše uvedených příkladech je situací obec a kontexty tvoří osvětlení parku (příklad 1) a hra s mincemi (příklad 2).

Další složkou reálného světa, kterou bychom se měli zabývat v souvislosti s matematickou gramotností, je matematický obsah, který lze při řešení problému uplatnit. *Matematický obsah* můžeme vyjádřit pomocí čtyř kategorií. Pro účely výzkumu OECD/PISA jsou tyto kategorie označovány jako „tematické okruhy“ a patří mezi ně *kvantita*, *prostor a tvar*, *změna a vztahy* a *neurčitost*. Tento přístup k matematickému obsahu se poněkud liší od pojetí obsahu z pohledu tradiční výuky matematiky, které se odráží především v obsahových heslech učebních osnov. Zvolené tematické okruhy však přesto pokrývají rozsah matematických témat, o kterých předpokládáme, že je žáci probrali. Na obrázku 2 jsou tematické okruhy znázorněny rámečkem vpravo nahoře. Šedě zbarvené pole uvnitř tohoto rámečku vyjadřuje, že tematické okruhy jsou zdrojem obsahu použitého při řešení problému.

Obr. 2: Složky matematické gramotnosti ve výzkumu OECD/PISA



Šipky, které směřují od „kontextu“ a „obsahu“ k problému, znázorňují, že problém vzniká v rámci reálného světa (včetně matematiky).

Problém s parkem (příklad 1) vyžaduje geometrické znalosti z tematického okruhu prostor a tvar a problém s mincemi (příklad 2) navozuje (přinejmenším v úvodní fázi) kontakt s neurčitostí a vyžaduje aplikaci znalostí o pravděpodobnosti.

Matematické postupy, které žáci používají, když se pokoušejí řešit problémy, nazýváme *matematické kompetence*. Pro potřeby výzkumu OECD/PISA jsou uspořádány do tří *tříd kompetencí* na základě různých kognitivních procesů, které se uplatňují při řešení různých typů problémů. Tyto třídy odrážejí matematické postupy, které žáci zpravidla používají při řešení problémů vznikajících v interakci s reálným světem.

Složka matematické gramotnosti, která se vztahuje k postupům, je na obrázku 2 znázorněna jednak rámečkem, reprezentujícím obecné matematické kompetence, a jednak šedě zbarveným polem, které představuje tři třídy kompetencí. Dílčí kompetence potřebné k vyřešení problému souvisejí s povahou problému a použité kompetence se projeví v nalezeném řešení. Tuto interakci znázorňuje šipka směřující od tříd kompetencí k problému a jeho řešení.

Zbývající šipka vychází od tříd kompetencí směrem k formátu problému. Znázorňuje, že kompetence používané při řešení problému souvisejí i s formou zadání problému a jeho specifickými požadavky.

Je třeba zdůraznit, že tři popsané složky matematické gramotnosti mají různou povahu. Zatímco situace a kontexty vymezují oblasti problémů reálného světa a tematické okruhy vyjadřují způsob nahlížení na svět „matematickými brýlemi“, kompetence jsou samotným jádrem matematické gramotnosti. Žáci budou schopni řešit dané problémy jen tehdy, když budou vybaveni určitými kompetencemi. Hodnocení matematické gramotnosti v sobě zahrnuje hodnocení toho, jaké mají žáci matematické kompetence a zda je dovedou tvořivě používat v problémových situacích.

V následujících kapitolách budou jednotlivé složky matematické gramotnosti popsány podrobněji.

Situace a kontexty

Důležitým aspektem matematické gramotnosti je proniknutí do matematiky – používání a uplatňování matematiky v rozmanitých situacích. Bylo zjištěno, že při setkání s problémy, které vyžadují matematický přístup, závisí výběr matematických metod a reprezentací často na tom, v jaké situaci se problémy vyskytují.

Situace je tou částí žákova světa, do které jsou zasazeny různé úkoly. Od žáků má určitou vzdálenost. Žákům je nejbližší jejich osobní život, vzdálenější je školní prostředí, pak práce a volný čas, po nichž následuje obec a společnost. Nejvzdálenější jsou situace vědecké. Pro klasifikaci úloh ve výzkumu OECD/PISA byly zavedeny čtyři typy situací: osobní, vzdělávací/pracovní, veřejné a vědecké.

Kontext úlohy představuje její specifické zasazení do situace. Zahrnuje všechny konkrétní údaje použité při formulaci problému.

Vezměme si následující příklad:

Příklad 3: Bankovní účet

Na účet v bance uložíme 1 000 zedů. Máme dvě možnosti: BUĎ můžeme dostat 4% roční úrok, NEBO můžeme dostat od banky hned bonus 10 zedů a 3% roční úrok. Která možnost je výhodnější po jednom roce? Která po dvou letech?

Situací v této úloze jsou „finance a bankovnictví“, což je situace, která se vztahuje k obci a společnosti a z hlediska klasifikace výzkumu OECD/PISA by byla označena jako „veřejná“. Kontext této úlohy se týká peněz (zedů) a úrokových sazeb na bankovním účtu.

Tento typ problému by mohl být součástí vlastní zkušenosti jedince a jeho běžné životní praxe v reálném světě. Pro aplikaci matematiky představuje *autentický* kontext, neboť při řešení reálného problému v tomto kontextu by se skutečně použila matematika.[1] S něčím zcela jiným se setkáváme u většiny úloh, které jsou obsaženy ve školních učebnicích, kde je hlavním cílem procvičovat příslušné matematické učivo a nikoliv používat matematiku k řešení reálných problémů. Naopak při sestavování úloh pro výzkum OECD/PISA hraje *autenticita* používání matematiky důležitou roli, neboť úzce souvisí s definicí matematické gramotnosti.

Připomeňme ještě, že uvedená úloha obsahuje i některé umělé prvky – peníze jsou tu smyšlené. Tento fiktivní prvek je zde proto, aby žáci z některých zemí nebyli zvýhodněni.

Situaci a kontext problému můžeme posuzovat i podle vzdálenosti mezi problémem a matematikou, která je v něm obsažena. Pokud se úloha týká jen matematických objektů, symbolů a struktur a nevztahuje se k ničemu mimo matematický svět, je považována za úlohu s matematickým kontextem a v rámci klasifikace situací by byla označena jako „vědecká“. Úlohy, v jejichž kontextu je souvislost mezi problémem a příslušnou matematikou explicitně zformulována, budou do výzkumu OECD/PISA zařazeny pouze v omezeném rozsahu. Problémy, s nimiž mají žáci každodenní zkušenost, se spíše týkají objektů reálného světa a zpravidla nejsou formulovány explicitně matematicky. Tyto úlohy mají tzv. „nematematický“ kontext a žák musí kontext těchto problémů nejprve přeložit do matematického jazyka. Ve výzkumu OECD/PISA se obecně klade důraz na úlohy, se kterými bychom se mohli setkat v situacích reálného světa a které mají autentický kontext. Tím však není vyloučeno zařazení úloh s hypotetickým kontextem, pokud tento kontext obsahuje určité reálné prvky, není příliš vzdálen od situací reálného světa a použití matematiky při řešení problému je autentické. Ukazuje to následující příklad úlohy s hypotetickým „nematematickým“ kontextem:

[1] Termín „autentický“ zde nemá vyjadřovat to, že matematické úlohy jsou v nějakém smyslu opravdové nebo skutečné. V rámci matematické části výzkumu OECD/PISA se termín „autentický“ používá pro označení situace, ve které použití matematiky skutečně vede k vyřešení existujícího problému. Jinými slovy, nejedná se o umělý problém, který je pouze prostředkem sloužícím k procvičování matematického učiva.

Příklad 4: Měnový systém

Dal by se zavést měnový systém založený jen na hodnotách 3 a 5? Jaké částky by se daly vyplácet? Byl by takový systém vhodný?

Tato úloha by byla označena jako „vědecká“. Její hodnota nespočívá v blízkosti reálnému světu, ale v tom, že je matematicky zajímavá a vyžaduje kompetence, které souvisejí s matematickou gramotností. Jednou z nejsilnějších stránek matematiky je ostatně možnost jejího použití k výkladu hypotetických scénářů a ke zkoumání potenciálních systémů a situací, které lze ve skutečnosti jen těžko realizovat.

Souhrnně řečeno, pro výzkum OECD/PISA jsou nejcennější takové úlohy, se kterými bychom se mohli setkat v nejrůznějších situacích reálného světa a které mají autentický kontext, tj. při řešení příslušného problému by se skutečně uplatnila matematika. Pro hodnocení úrovně matematické gramotnosti jsou preferovány úlohy s nematematickým kontextem, neboť jde o úlohy, které mají nejblíže k problémům každodenního života.

Matematický obsah – čtyři tematické okruhy

Matematické pojmy, struktury a myšlenky byly vynalezeny jako nástroj k uspořádání jevů přírodního, sociálního a mentálního světa. Školní osnovy matematiky jsou logicky členěny podle obsahových hesel (např. aritmetika, algebra, geometrie), která odrážejí historicky vzniklé obory matematického myšlení. Tato obsahová hesla rovněž usnadňují tvorbu strukturovaného učebního plánu. V reálném světě však jevy vedoucí k aplikaci matematiky nejsou tak logicky uspořádány. Problémy jen zřídka vznikají takovým způsobem a v takovém kontextu, že by k jejich pochopení a řešení stačilo aplikovat znalosti z jediného obsahového hesla. Výše uvedený problém s mincemi (příklad 2) je příkladem problému, který spadá do několika různých matematických oblastí.

Jelikož cílem výzkumu OECD/PISA je hodnotit schopnosti žáků řešit reálné problémy, je v něm rozsah zkoumaného obsahu vymezen s využitím fenomenologického přístupu k popisu matematických pojmů, struktur a myšlenek. Jinými slovy jde o to popsat obsah v souvislosti s jevy a s typy problémů, pro něž byl vytvořen. Tento postup umožňuje orientovat výzkum tak, aby byl v souladu s definicí zkoumané oblasti a přitom pokryl matematický obsah v takovém rozsahu, jaký je zpravidla předmětem jiných výzkumů matematických znalostí a národních osnov matematiky.

Fenomenologický pohled na matematický obsah není nový. Matematika je tímto způsobem popsána ve dvou známých publikacích: *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy* (Steen, 1990) a *Mathematics: The Science of Patterns* (Devlin, 1994). Můžeme se však setkat s mnoha způsoby pojmenování tohoto přístupu i jednotlivých fenomenologických kategorií. V koncepci matematické části výzkumu OECD/PISA 2003 budeme používat termín „tematické okruhy“.

Můžeme vymezit mnoho matematických tematických okruhů. Jen ve výše uvedených publikacích najdeme pojmy jako struktura, rozměr, kvantita, neurčitost, tvar, změna, počítání, zdůvodňování a komunikace, pohyb a změna, symetrie a pravidelnost nebo poloha. Které tematické okruhy bychom měli používat v koncepci matematické části výzkumu OECD/PISA? Z hlediska zaměření výzkumu na oblast matematické gramotnosti je podstatné, aby vybrané problémové okruhy vycházely z historického vývoje matematiky, pokrývaly dostatečnou šířku a hloubku a šly až k samým základům matematiky a zároveň aby přijatelným způsobem odrážely tradiční hesla matematických osnov.

Po staletí byla matematika převážně vědou o číslech spolu s poměrně konkrétní geometrií. V období do roku 500 př.n.l. byl v Mezopotámii, Číně a Egyptě budován pojem čísla a byly rozvíjeny operace s čísly a kvantitami včetně kvantit vzniklých geometrickým měřením. Období 500 př.n.l. – 300 n.l. bylo érou řecké matematiky, která se zaměřovala především na studium geometrie jako axiomatické teorie. Řekové se zasloužili o nové pojetí matematiky jako jednotné vědy o číslech a tvarech. Další významný pokrok nastal v letech 500 – 1300 v islámském světě, Indii a Číně, kdy vznikla algebra jako jedno odvětví matematiky. Tím bylo založeno studium vzájemných vztahů. Nezávislým objevem infinitesimálního počtu (změna, růst a limita) Newtonem a Leibnizem v 17. století se matematika stala integrovanou vědou o číslech, tvarech, změnách a vztazích.

19. a 20. století přinesly explozi matematických vědomostí a obrovský nárůst jevů a problémů, které se daly studovat matematickými prostředky, mimo jiné i náhodnost a neurčitost. Tento rozvoj způsobil, že odpovědět na otázku „Co je matematika?“ je čím dál obtížnější. Dnes na počátku nového tisíciletí považují mnozí matematiku za vědu o strukturách (v obecném smyslu). Také tematické okruhy pro výzkum OECD/PISA můžeme volit tak, aby odrážely tento vývoj: struktury v *kvantitě*, struktury ve *tvaru a prostoru* a struktury ve *změně a vztazích* jsou ústředními a základními pojmy v každém popisu matematiky a tvoří jádro každého kurikula, ať už na střední škole nebo na univerzitě. Být matematicky gramotný však znamená více. Podstatná je i schopnost zacházet s neurčitostí z matematického a vědeckého hlediska. Z tohoto důvodu se staly základy teorie pravděpodobnosti a statistiky čtvrtým tematickým okruhem, který byl nazván *neurčitost*.

Ve výzkumu OECD/PISA 2003 se používají následující tematické okruhy, které vycházejí z historického vývoje, pokrývají obor a odrážejí hlavní kapitoly školního kurikula:

- *kvantita,*
- *prostor a tvar,*
- *změna a vztahy,*
- *neurčitost.*

Tyto čtyři okruhy člení matematický obsah na dostatečně mnoho oblastí, aby bylo možné úlohami pokrýt celé kurikulum, a zároveň na dostatečně málo oblastí, aby to nebránilo zaměřit se na problémy vycházející z reálných situací.

Každý tematický okruh obsahuje soubor jevů a pojmů, které jsou smysluplné a se kterými se můžeme setkat v mnoha různých situacích. Tematický okruh můžeme v podstatě chápat jako druh obecného pojmu, který představuje jistou zobecněnou dimenzi matematického obsahu.

Z toho plyne, že tematické okruhy nelze od sebe ostře odlišit.[2] Představují spíše určitý úhel pohledu, hledisko, u něhož rozeznáváme jádro a neurčité obrysy, které připouštějí průnik s jinými okruhy. Každé dva tematické okruhy se tedy v zásadě mohou překrývat. Čtyři tematické okruhy použité ve výzkumu OECD/PISA 2003 jsou stručně vymezeny v následujících odstavcích. Jejich podrobnější rozpracování je obsaženo v příloze.

Kvantita

Tento tematický okruh je zaměřen na potřebu kvantifikace pro účely uspořádání světa. K jeho významným aspektům patří chápání relativní velikosti, rozpoznávání číselných struktur a užívání čísel k vyjadřování kvantity a kvantifikovatelných vlastností objektů reálného světa (počty, míry). Okruh *kvantita* se dále týká zpracování a chápání čísel reprezentovaných různým způsobem.

Důležitým aspektem tematického okruhu *kvantita* je kvantitativní uvažování. Základními složkami kvantitativního uvažování jsou: význam čísel, reprezentace čísel různými způsoby, porozumění významu operací, cit pro velikost čísel, matematická kultura výpočtů, počítání zpaměti a odhady.

Prostor a tvar

Všude kolem nás se setkáváme se strukturami: v mluvené řeči, v hudbě, ve filmu, v dopravě, u staveb, v umění. Za struktury můžeme považovat i tvary: domy, kancelářské budovy, mosty, mořské hvězdice, sněhové vločky, plány měst, jetelové lístky, krystaly, stíny. Geometrické struktury mohou sloužit jako poměrně jednoduché modely různých jevů a jejich studium je možné a vhodné na všech úrovních (Grünbaum, 1985).

Při studiu tvarů a konstrukcí hledáme podobnosti a rozdíly tak, jak analyzujeme formy a rozpoznáváme tvary v různých zobrazeních a v různých dimenzích. Zkoumání tvarů úzce souvisí s pojmem „uchopení prostoru“. Chceme-li se v našem životním prostoru pohybovat s větším porozuměním, měli bychom se jej naučit znát, zkoumat a ovládat (Freudenthal, 1973).

Abychom toho dosáhli, musíme porozumět základním vlastnostem předmětů a jejich vzájemné poloze. Musíme si uvědomit, jak vidíme a proč vidíme tak, jak vidíme. Musíme se naučit orientaci v prostoru, v konstrukcích a tvarech. Znamená to pochopit vztah mezi tvary a jejich obrazy nebo vizuálními reprezentacemi, například vztah mezi reálným městem a jeho fotografiemi nebo plány. Obsahem tematického okruhu *prostor a tvar* je i chápání toho, jak lze trojrozměrné objekty zobrazit v rovině, jak se tvoří stíny, co je perspektiva a jak se projevuje.

[2] Což ovšem není možné ani u tradičních obsahových hesel.

Změna a vztahy

Každý přírodní jev je projevem změny a ve světě kolem nás pozorujeme mnoho dočasných i trvalých vztahů mezi jevy. Jedná se například o organismy měnící se během růstu, cykly ročních období, příliv a odliv, cykly nezaměstnanosti, změny počasí nebo změny burzovních indexů. Některé z těchto proměnných procesů lze popsat nebo modelovat jednoduchými matematickými funkcemi: lineárními, exponenciálními, periodickými, logaritmickými, a to buď diskrétními, nebo spojitými. Mnoho vztahů však patří do jiných kategorií a k určení typu vztahu je často zapotřebí analyzovat data. Matematické vztahy často vyjadřujeme pomocí rovnic nebo nerovností, setkáváme se však i s obecnějšími vztahy (např. ekvivalence, dělitelnost, inkluze).

Funkcionální myšlení (tj. myšlení na úrovni vztahů) je jedním z nejpodstatnějších cílů výuky matematiky (MAA, 1923). Vztahy lze vyjádřit nejrůznějšími způsoby: symbolicky, algebraicky, graficky, tabulkově nebo geometricky. Různá vyjádření slouží různým účelům a mají různé vlastnosti. Převody mezi reprezentacemi mají proto při řešení úloh často zásadní význam.

Neurčitost

Současná „informační společnost“ nás zahrnuje spoustou informací, které jsou často prezentovány jako přesné, odborné a zaručené. V běžném životě jsme však konfrontováni s nejasnými volebními výsledky, hroutícími se mosty, burzovními krachy, nespolehlivými předpověďmi počasí, chybnými prognózami populačního růstu, nefungujícími ekonomickými modely a s mnoha dalšími projevy neurčitosti našeho světa.

Okruh *neurčitost* zahrnuje dvě příbuzná témata: data a náhoda. Tyto jevy jsou předmětem matematického studia ve statistice a počtu pravděpodobnosti. Komentáře ke školním osnovám z poslední doby shodně doporučují, aby statistika a pravděpodobnost dostaly mnohem větší prostor než v minulosti (Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools, 1982; LOGSE, 1990; MSEB, 1990; NCTM, 1989; NCTM, 2000).

Mezi specifické matematické pojmy a činnosti, které jsou pro tuto oblast důležité, patří sběr dat, analýza dat, prezentace a znázorňování dat, pravděpodobnost a vyvozování závěrů.

V následující kapitole se budeme věnovat nejdůležitější složce matematické gramotnosti: výkladu kompetencí, které žáci prokazují při řešení problémů. Ve výzkumu OECD/PISA jsou tyto kompetence nazývány matematické postupy.

Matematické postupy

Úvod: matematizace

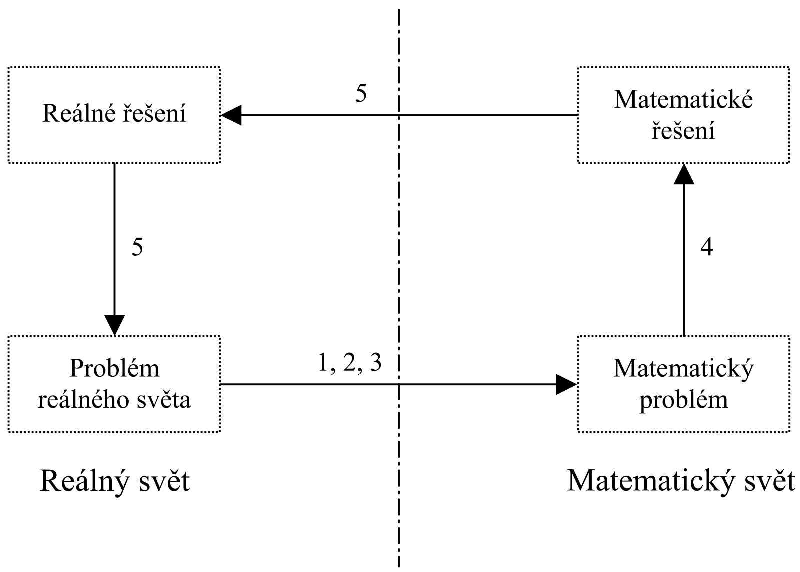
Výzkum OECD/PISA hodnotí schopnosti žáků efektivně analyzovat, uvažovat a sdělovat myšlenky, když v různých situacích přistupují k matematickým problémům, formulují je, řeší a interpretují svá řešení. Řešení problémů vyžaduje, aby žáci používali znalosti a dovednosti, které získali ve škole i na základě svých životních zkušeností. Základní proces, který žáci uplatňují při řešení problémů reálného života, se v rámci výzkumu OECD/PISA nazývá „matematizace".

Ve svém stěžejním díle *Matematické základy přírodní filosofie* uvádí Newton cosi, co připomíná matematizaci:

> *Máme však v úmyslu sledovati jen kvantitu a vlastnosti tohoto účinku jevů a aplikovati to, co zjistíme v jednoduchých případech, jako principy, dle nichž můžeme matematickým způsobem odhadovati jejich účinky v složitějších případech (Newton, 1687).*

V předchozí diskusi o teoretickém základu koncepce matematické části výzkumu OECD/PISA bylo vymezeno pět kroků matematizace. Tyto kroky jsou znázorněny na obrázku 3.

Obr. 3: Cyklus matematizace



1. Přistoupení k problému situovanému do reality.
2. Uspořádání problému s využitím matematických pojmů a určení jeho matematické podstaty.
3. Postupné opouštění reality při provádění postupů jako formulování předpokladů, zobecňování, formalizování. Tím se zdůrazní matematické aspekty situace a reálný problém se převede na matematický problém, který věrně reprezentuje situaci.
4. Řešení matematického problému.
5. Posouzení smyslu matematického řešení s ohledem na reálnou situaci včetně určení mezí platnosti řešení.

Jak naznačuje obrázek 3, těchto pět kroků můžeme rozdělit do tří etap.

Matematizace začíná převodem problému z reality to matematiky. Tento proces obsahuje následující činnosti:

- určení matematické podstaty problému situovaného do reality,
- vyjádření problému jiným způsobem včetně jeho uspořádání s využitím matematických pojmů, formulování příslušných předpokladů,
- pochopení vztahu mezi jazykem problému a symbolickým nebo formálním jazykem potřebným k porozumění matematické podstatě problému,
- nalezení zákonitostí, vztahů a struktur,
- rozpoznání aspektů, které jsou izomorfní se známými problémy,
- převedení problému do matematiky, tj. na matematický model (de Lange, 1987, s. 43).

Když žák převedl problém do matematické podoby, může celý proces pokračovat v rámci matematiky. Žáci si budou klást otázky jako „Existuje...?“, „Pokud ano, tak kolik?“, „Jak najdu...?“ a budou přitom využívat známé matematické dovednosti a pojmy. Budou se pokoušet vypracovat svůj model problémové situace, upravit ho, nalézt zákonitosti, odhalit souvislosti a vytvořit dobrou matematickou argumentaci. Tato etapa procesu matematizace je obvykle označována jako deduktivní část cyklu modelování (Schupp, 1988; Blum, 1996). Mohou se v ní však uplatnit nejen přísně deduktivní postupy. Tato část procesu matematizace obsahuje:

- používání různých způsobů vyjádření a přecházení mezi nimi,
- používání symbolického, formálního a technického jazyka a operací,
- zdokonalování a upravování matematických modelů, jejich kombinování a propojování,
- argumentaci,
- zobecňování.

Poslední fáze řešení problému se týká posouzení celého procesu matematizace i výsledku řešení. Žáci zde musejí kriticky zhodnotit výsledek a ověřit celý postup. Takové posuzování provází všechny etapy procesu matematizace, obzvlášť důležité je však v jeho závěrečné fázi. Proces kontroly a hodnocení má následující složky:

- pochopení rozsahu a omezení matematických pojmů,
- posouzení matematických argumentů, vysvětlení a zdůvodnění výsledků,
- sdělení postupu a řešení,
- kritické zhodnocení modelu a jeho omezení.

Tato etapa je na obrázku 3 označena číslicí „5“ v místech, kde proces matematizace přechází od matematického řešení k reálnému a kde se opět vrací k původnímu problému reálného světa.

Kompetence

Předcházející oddíl byl zaměřen na hlavní pojmy a činnosti spojené s matematizací. Má-li žák úspěšně zvládnout matematizaci v různých situacích, kontextech i tematických okruzích, musí být vybaven určitými matematickými kompetencemi, jejichž souhrn můžeme chápat jako komplexní matematickou kompetenci. Jednotlivé kompetence mohou být osvojeny na různé úrovni. Různé etapy matematizace využívají kompetence různým způsobem, jak z hlediska toho, jaké kompetence se v nich uplatňují, tak i co do požadované úrovně jejich ovládání. Ve výzkumu OECD/PISA je použito osm charakteristických matematických kompetencí, které vycházejí z práce Nisse (1999) a jeho dánských kolegů. Podobné formulace lze najít i v mnoha dalších pracích (viz Neubrand *et al.*, 2001). Některé termíny však různí autoři užívají v různém smyslu.

1. *Matematické myšlení.* Zahrnuje kladení otázek charakteristických pro matematiku („Existuje...?“, „Pokud ano, tak kolik?“, „Jak najdeme...?“), znalost typů odpovědí, které matematika na tyto otázky nabízí, rozlišování různých typů výroků (definice, věty, domněnky, hypotézy, příklady, podmíněná tvrzení), chápání rozsahu a omezení daných matematických pojmů a zacházení s nimi.

2. *Matematická argumentace.* Zahrnuje znalost povahy matematických důkazů a jejich odlišnosti od jiných způsobů matematického zdůvodňování, sledování a hodnocení řetězců matematických argumentů různého typu, cit pro heuristiku („Co se může nebo nemůže stát a proč?“), vytváření a vyjadřování matematických argumentů.

3. *Matematická komunikace.* Zahrnuje schopnost vyjadřovat se různými způsoby k záležitostem s matematickým obsahem, a to ústně i písemně, a schopnost rozumět písemným i ústním sdělením o těchto záležitostech.

4. *Modelování.* Zahrnuje strukturování modelované oblasti nebo situace, převádění reality do matematických struktur, interpretování matematických modelů v jazyce reality, práci s matematickým modelem, ověřování, posuzování a analýzu modelu, kritický pohled na model a jeho výsledky, prezentaci modelu a jeho výsledků (včetně omezení platnosti těchto výsledků), sledování a řízení procesu modelování.

5. *Vymezování problémů a jejich řešení.* Zahrnuje vymezování, formulování a definování různých typů matematických problémů („čistých“, „aplikovaných“, „otevřených“ nebo „uzavřených“) a řešení různých typů matematických problémů nejrůznějšími způsoby.

6. *Reprezentace.* Zahrnuje dekódování a kódování, převádění, interpretování a rozlišování různých forem reprezentace matematických objektů a situací, porozumění vzájemným vztahům mezi různými reprezentacemi, volbu některé z různých forem reprezentace a přecházení mezi reprezentacemi podle situace a účelu.

7. *Užívání symbolického, formálního a technického jazyka a operací.* Zahrnuje dekódování a interpretování symbolického a formálního jazyka, chápání jeho vztahu k přirozenému jazyku, překládání z přirozeného jazyka do symbolického nebo formálního, práci s výroky a výrazy obsahujícími symboly a vzorce, používání proměnných, řešení rovnic a provádění výpočtů.

8. *Užívání pomůcek a nástrojů.* Zahrnuje znalost různých pomůcek a nástrojů (včetně prostředků výpočetní techniky), které mohou pomoci při matematické činnosti, a dovednost používat je s vědomím hranic jejich možností.

Pro výzkum OECD/PISA nejsou vyvíjeny testové úlohy, které by hodnotily uvedené kompetence samostatně. Matematické kompetence se totiž vzájemně překrývají a matematická činnost obvykle vyžaduje současné využití mnoha z nich. Snaha o hodnocení jednotlivých kompetencí by vedla k umělým úlohám a ke zbytečnému rozdrobení oblasti matematické gramotnosti. Jednotlivé kompetence, které žáci projeví, se budou žák od žáka výrazně lišit. Je to zejména důsledek toho, že vše, co se naučili, získali na základě zkušenosti „s individuální výstavbou vědomostí vznikající v procesu interakce, komunikace a spolupráce“ (De Corte, Greer & Verschaffel, 1996, s. 510). Výzkum OECD/PISA předpokládá, že většinu matematických znalostí získávají žáci ve škole. K ovládnutí oboru dochází postupně. Formálnější a abstraktnější způsoby myšlení a reprezentace se dostaví až později jako důsledek aktivního zapojení do činností určených k rozvíjení neformálního myšlení. Matematická gramotnost se tedy vytváří jako důsledek zkušeností včetně interakcí v nejrůznějších společenských situacích a kontextech.

K tomu, abychom mohli v mezinárodním měřítku efektivně popsat a dokumentovat dovednosti žáků, jejich silné i slabé stránky, potřebujeme určitou strukturu. Jednou z dobře srozumitelných a prakticky uskutečnitelných možností, jak ji získat, je popsat třídy kompetencí založené na typech kognitivních požadavků, které jsou zapotřebí k řešení různých matematických problémů.

Třídy kompetencí

Výzkum OECD/PISA popisuje kognitivní činnosti ve třech třídách kompetencí: *reprodukce*, *integrace* a *reflexe*, které budou popsány v následujících odstavcích. V popisu bude vždy uvedeno, jak se v každé třídě projevují jednotlivé výše uvedené kompetence.

Třída reprodukce

Kompetence v této třídě zahrnují reprodukci probraných a procvičených znalostí. Jsou to ty kompetence, které jsou nejčastěji sledovány ve standardizovaných zkouškách a ve školních testech. Jedná se o znalosti faktů a běžných způsobů reprezentace problémů, rozeznávání ekvivalentů, vybavení si běžných matematických objektů a vlastností, provádění rutinních postupů, aplikaci standardních algoritmů a technických dovedností, práci s výrazy obsahujícími symboly a vzorce ve standardní formě a provádění výpočtů.

1. *Matematické myšlení.* Zahrnuje kladení nejzákladnějších otázek („Kolik?“) a znalost příslušných typů odpovědí („Tolik“), rozlišování mezi definicemi a tvrzeními, porozumění matematickým pojmům a zacházení s nimi v takových kontextech, ve kterých byly osvojeny nebo procvičeny.

2. *Matematická argumentace.* Zahrnuje provádění a zdůvodňování standardních kvantitativních postupů včetně provádění výpočtů a formulování výsledků.

3. *Matematická komunikace.* Zahrnuje porozumění jednoduchým matematickým záležitostem a ústní i písemné vyjadřování k nim, například reprodukci názvů a základních vlastností známých objektů nebo citování výpočtů a výsledků, zpravidla ne více než jedním způsobem.

4. *Modelování.* Zahrnuje rozpoznání, vybavení, aktivaci a využívání dobře strukturovaných známých modelů, převádění těchto modelů (a jejich výsledků) do reality a naopak a elementární sdělování výsledků modelu.

5. *Vymezování problémů a jejich řešení.* Zahrnuje vymezování a formulování problémů, při kterých se v podstatě jedná o rozpoznání a reprodukci standardních a procvičených čistých nebo aplikovaných problémů v uzavřeném formátu, a řešení těchto problémů standardními postupy, zpravidla pouze jedním způsobem.

6. *Reprezentace.* Zahrnuje dekódování, kódování a interpretování známých a procvičených standardních reprezentací dobře známých matematických objektů. Přecházení mezi reprezentacemi se uplatní pouze tehdy, je-li toto přecházení osvojenou součástí dané reprezentace.

7. *Užívání symbolického, formálního a technického jazyka a operací.* Zahrnuje dekódování a interpretování základního symbolického a formálního jazyka v dobře známých kontextech a situacích, práci s jednoduchými výroky a výrazy obsahujícími symboly a vzorce, používání proměnných, řešení rovnic a provádění výpočtů rutinními postupy.

8. *Užívání pomůcek a nástrojů.* Zahrnuje znalost a používání běžných pomůcek a nástrojů v takových kontextech a situacích a takovými způsoby, které jsou blízké těm, ve kterých bylo používání těchto pomůcek a nástrojů zavedeno a procvičeno.

Úlohy určené k hodnocení kompetencí ze třídy *reprodukce* lze charakterizovat těmito klíčovými deskriptory: reprodukce probrané látky a provádění rutinních operací.

Příklady úloh ze třídy reprodukce

Příklad 5

Vyřeš rovnici $7x - 3 = 13x + 15$

Příklad 6

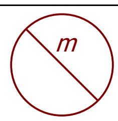
Kolik je průměr čísel 7, 12, 8, 14, 15, 9?

Příklad 7

Napiš 69 % jako zlomek.

Příklad 8

Úsečka *m* se nazývá: _______________ kružnice.



Příklad 9

Na účet v bance uložíme 1 000 zedů na 4% úrok. Kolik zedů bude na účtu za jeden rok?

Hranici třídy *reprodukce* si lépe objasníme porovnáním s úlohou, která do této třídy nepatří. Vezměme si úlohu z příkladu 9 a porovnejme ji s výše uvedenou úlohou z příkladu 3 (s. 13), která se také týká bankovního účtu. Pro většinu žáků však nepředstavuje jednoduchou aplikaci rutinního postupu, ale vyžaduje provedení řetězce úvah a posloupnosti výpočtů, což pro kompetence ze třídy *reprodukce* není charakteristické.

Třída integrace

Kompetence ze třídy *integrace* navazují na třídu *reprodukce* v tom smyslu, že se uplatňují při řešení problémů v situacích, které již nejsou jednoduchou rutinou, ale přesto jsou víceméně známé.

Vedle kompetencí popsaných v souvislosti s třídou *reprodukce* se ve třídě *integrace* uplatní následující kompetence:

1. *Matematické myšlení.* Zahrnuje kladení otázek („Jak najdeme...?“, „Jaká matematika je zde obsažena?“) a znalost příslušných typů odpovědí, poskytnutých ve formě tabulek, grafů, obrázků, v algebraickém tvaru apod., rozlišování mezi definicemi a tvrzeními a mezi různými typy tvrzení, porozumění matematickým pojmům a zacházení s nimi v kontextech, které se mírně liší od těch, ve kterých byly osvojeny a procvičeny.

2. *Matematická argumentace.* Zahrnuje jednoduché matematické zdůvodňování bez rozlišování mezi důkazy a jinými způsoby matematického zdůvodňování a argumentace, sledování a hodnocení řetězců matematických argumentů různého typu a cit pro heuristiku (např. „Co se může nebo nemůže stát a proč?“, „Co známe a co chceme zjistit?“).

3. *Matematická komunikace.* Zahrnuje porozumění a ústní i písemné vyjadřování k matematickým záležitostem, které sahají od reprodukce názvů a základních vlastností známých matematických objektů přes vysvětlování výpočtů a výsledků (obvykle více než jedním způsobem) až k vysvětlování záležitostí, které se týkají vzájemných vztahů. Dále zahrnuje porozumění ústním i písemným sdělením jiných osob o těchto záležitostech.

4. *Modelování.* Zahrnuje strukturování modelované oblasti nebo situace a převádění reality do matematických struktur v kontextech, které nejsou příliš složité, pro žáky však nejsou běžné. Dále zahrnuje interpretování modelů (a jejich výsledků) v jazyce reality a naopak a některé aspekty komunikace o výsledcích modelu.

5. *Vymezování problémů a jejich řešení.* Zahrnuje vymezování a formulování problémů za hranicemi pouhé reprodukce procvičených standardních čistých nebo aplikovaných problémů v uzavřeném formátu, řešení těchto problémů standardními postupy, ale také samostatnější způsoby řešení problémů, které vyžadují propojování různých matematických oblastí a různých forem reprezentace a komunikace (schémat, tabulek, grafů, slov, obrázků).

6. *Reprezentace.* Zahrnuje dekódování, kódování a interpretování známých a méně známých reprezentací matematických objektů, schopnost zvolit si některou z různých forem

reprezentace, přecházení mezi reprezentacemi, převádění a rozlišování mezi různými formami reprezentace.

7. *Užívání symbolického, formálního a technického jazyka a operací.* Zahrnuje dekódování a interpretování základního symbolického a formálního jazyka v méně známých kontextech a situacích, práci s výroky a výrazy obsahujícími symboly a vzorce, používání proměnných, řešení rovnic a provádění výpočtů známými postupy.

8. *Užívání pomůcek a nástrojů.* Zahrnuje znalost a používání běžných pomůcek a nástrojů v takových kontextech a situacích a takovými způsoby, které se liší od těch, ve kterých bylo používání těchto pomůcek a nástrojů zavedeno a procvičeno.

Úlohy spojené s touto třídou kompetencí obvykle vyžadují, aby žáci prokázali, že dovedou propojovat látku z různých tematických okruhů, resp. z různých hesel učebních osnov, a že umějí uvést do vzájemných souvislostí různé reprezentace problému.

Úlohy určené k hodnocení kompetencí ze třídy *integrace* lze charakterizovat těmito klíčovými deskriptory: integrování, propojování a mírné rozšiřování probrané a procvičené látky.

Příklady úloh ze třídy integrace

Prvním příkladem úlohy ze třídy *integrace* je úloha „Bankovní účet“, uvedená výše jako příklad 3 (s. 13). Následují další příklady úloh z této třídy.

Příklad 10: Vzdálenost

Marie bydlí dva kilometry od školy, Martin pět.

Jak daleko od sebe bydlí Marie a Martin?

Když byla tato úloha předložena k posouzení učitelům, mnozí namítali, že je příliš snadná – je hned vidět, že odpověď je 3. Jiná skupina učitelů soudila, že to není vhodná úloha, protože na ni neexistuje odpověď – měli na mysli, že neexistuje jediná číselná odpověď. Třetí reakce zněla, že úloha není vhodná, protože připouští mnoho možných odpovědí, neboť bez další informace nemůžeme říci více, než že bydlí od sebe něco mezi 3 a 7 kilometry. Malá skupina učitelů soudila, že to je vynikající úloha, protože k jejímu vyřešení je potřeba pochopit otázku, navíc jde o řešení skutečného problému, protože žák nemá k dispozici žádnou strategii, a jedná se o pěknou matematiku, i když tu není žádné vodítko, jak budou žáci problém řešit. Právě poslední interpretace řadí tuto úlohu ke třídě kompetencí *integrace*.

Příklad 11: Pizzy

Pizzerie nabízí dvě kulaté pizzy stejné tloušťky v různých velikostech. Malá má průměr 30 cm a stojí 30 zedů. Velká má průměr 40 cm a stojí 40 zedů. [© PRIM, Stockholm Institute of Education]

Která pizza je cenově výhodnější? Svou odpověď zdůvodni.

Příklad 12: Nájem kanceláře

V zemi, kde je měnovou jednotkou *zed*, vyšly v novinách tyto dva inzeráty:

Budova A	**Budova B**
K pronajmutí jsou tyto kancelářské prostory	K pronajmutí jsou tyto kancelářské prostory
85 – 95 m^2 475 *zedů* za měsíc	35 – 260 m^2 90 *zedů* za 1 m^2 za rok
100 – 120 m^2 800 *zedů* za měsíc	

Jistá společnost má zájem pronajmout si v této zemi na jeden rok kancelář o ploše 110 m^2.
Ve které budově (A, nebo B) by si měla kancelář najmout, aby nájemné bylo nižší? Zapiš postup řešení. [© IEA/TIMSS]

Obě tyto úlohy vyžadují, aby žáci přeložili situaci reálného světa do matematického jazyka, vytvořili matematický model, který umožňuje provést náležité porovnání, ověřili, zda nalezené řešení vyhovuje kontextu původní otázky, a zformulovali výsledek. To vše jsou činnosti spojené s třídou *integrace*.

Třída reflexe

Kompetence této třídy se vztahují ke schopnostem žáka uvažovat o postupech potřebných k řešení problému. Týkají se žákových schopností plánovat strategie řešení a aplikovat je na problémové situace, které obsahují více prvků a mohou být „originálnější“ (méně známé) než situace typické pro třídu *integrace*. Ke kompetencím ze třídy *integrace* přidává třída *reflexe* následující:

1. *Matematické myšlení.* Zahrnuje kladení otázek („Jak najdeme...?“, „Jaká matematika je zde obsažena?“, „Co tvoří podstatné prvky tohoto problému nebo situace?“), znalost příslušných typů odpovědí, poskytnutých ve formě tabulek, grafů, obrázků, v algebraickém tvaru, uvedených jako specifikace klíčových bodů apod., rozlišování mezi definicemi, větami, domněnkami, hypotézami a tvrzeními o zvláštních případech, uvažování o rozdílech mezi těmito typy výroků nebo jejich aktivní vyjádření, porozumění matematickým pojmům a zacházení s nimi v kontextech, které jsou nové nebo složité, chápání rozsahu a omezení daných matematických pojmů a zobecňování výsledků.

2. *Matematická argumentace.* Zahrnuje jednoduché matematické zdůvodňování včetně rozlišování mezi důkazy a jinými způsoby matematického zdůvodňování a argumentace, sledování, posuzování a samostatné vytváření řetězců matematických argumentů různého typu a používání heuristiky (např. „Co se může nebo nemůže stát a proč?“, „Co známe a co chceme zjistit?“, „Které vlastnosti jsou podstatné?“, „Jaký je vzájemný vztah mezi těmito objekty?“).

3. *Matematická komunikace.* Zahrnuje porozumění a ústní i písemné vyjadřování k matematickým záležitostem, které sahají od reprodukce názvů a základních vlastností známých matematických objektů přes vysvětlování výpočtů a výsledků (obvykle více než jedním způsobem) až k vysvětlování záležitostí, které obsahují složité vztahy včetně logických vztahů. Dále zahrnuje porozumění ústním i písemným sdělením jiných osob o těchto záležitostech.

4. *Modelování.* Zahrnuje strukturování modelované oblasti nebo situace, převádění reality do matematických struktur v kontextech, které mohou být komplexní nebo velmi odlišné od toho, co je žákům dobře známé, interpretování matematických modelů (a jejich výsledků) v jazyce reality a naopak, shromažďování informací a dat, sledování procesu modelování a ověřování výsledného modelu. Dále zahrnuje posuzování modelu na základě jeho analýzy a kritického zhodnocení a schopnost účastnit se složitějších forem komunikace o modelech a modelování.

5. *Vymezování problémů a jejich řešení.* Zahrnuje vymezování a formulování problémů daleko za hranicemi pouhé reprodukce procvičených standardních čistých nebo aplikovaných problémů v uzavřeném formátu, řešení těchto problémů standardními postupy, ale také samostatnější způsoby řešení problémů, které vyžadují propojování různých matematických oblastí a různých forem reprezentace a komunikace (schémat, tabulek, grafů, slov, obrázků). Dále zahrnuje uvažování o různých strategiích a řešeních.

6. *Reprezentace.* Zahrnuje dekódování, kódování a interpretování známých a méně známých reprezentací matematických objektů, schopnost zvolit si některou z různých forem reprezentace, přecházení mezi reprezentacemi, převádění a rozlišování mezi různými formami reprezentace. Dále zahrnuje tvořivé kombinování a vytváření nestandardních reprezentací.

7. *Užívání symbolického, formálního a technického jazyka a operací.* Zahrnuje dekódování a interpretování symbolického a formálního jazyka v neznámých kontextech a situacích, práci s výroky a výrazy obsahujícími symboly a vzorce, používání proměnných, řešení rovnic a provádění výpočtů. Dále zahrnuje schopnost zacházet se složitějšími výroky a výrazy nebo s neznámým symbolickým či formálním jazykem, porozumění tomuto jazyku a překládání z tohoto jazyka do přirozeného jazyka.

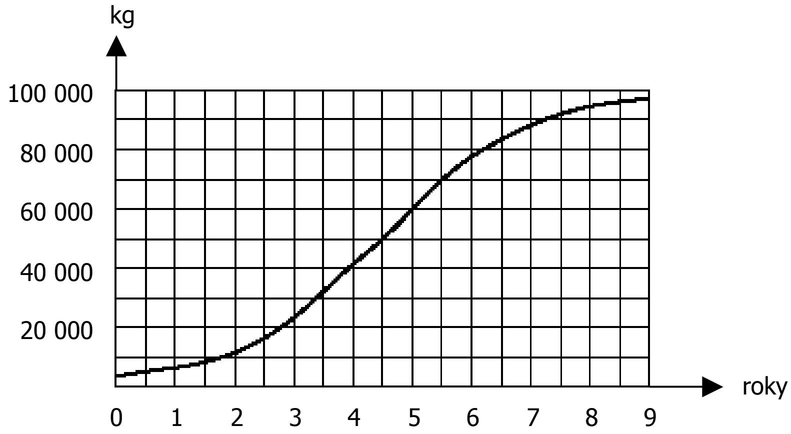
8. *Užívání pomůcek a nástrojů.* Zahrnuje znalost a používání různých známých i neznámých pomůcek a nástrojů v takových kontextech a situacích a takovými způsoby, které se mohou velmi lišit od těch, ve kterých bylo používání těchto pomůcek a nástrojů zavedeno a procvičeno. Dále zahrnuje povědomí o hranicích možností těchto pomůcek a nástrojů.

Úlohy určené k hodnocení kompetencí ze třídy *reflexe* lze charakterizovat těmito klíčovými deskriptory: vyspělé uvažování, rozvinutá schopnost argumentace, abstrakce a zobecňování, modelování v nových kontextech.

Příklady úloh ze třídy reflexe

Příklad 13: Přírůstek ryb

Do vodní nádrže byly vypuštěny ryby. Graf ukazuje model hmotnostního přírůstku ryb v nádrži.



Předpokládejme, že rybář chce vyčkat pár let a poté začít s rybolovem v nádrži. Kolik let by měl rybář čekat, pokud chce od té doby každoročně ulovit co největší počet ryb? Vysvětli svou odpověď.

Je zřejmé, že tato úloha vyhovuje definici řešení matematického problému v autentickém kontextu. Žáci budou muset vymyslet vlastní strategii a argumentaci pro dosti složitý a neobvyklý problém. Složitost problému je částečně dána tím, že je třeba uvážlivě kombinovat informace poskytnuté jednak graficky a jednak textově. Dalším faktorem, který přispívá ke složitosti problému, je to, že žáci bezprostředně nevidí žádnou odpověď a musejí sami přijít s dobrou strategií řešení. Budou muset interpretovat graf a přitom si uvědomit, že rychlost růstu dosahuje maxima po pěti letech. Aby byli úspěšní, budou muset své řešení posuzovat již v jeho průběhu, a ověřovat tak zdar své strategie. Úloha dále vyžaduje, aby žáci uvedli svou argumentaci a náznak „důkazu“. Jednou z možností je použít metodu pokus-omyl: podívejme se, co se stane, když počkáme například tři roky. A odtud pokračujeme dále. Počkáme-li do konce pátého roku, můžeme pak mít každoročně bohatý úlovek – 20 000 kg ryb. Když nebudeme čekat tak dlouho a začneme lovit o rok dříve, můžeme vylovit jen 17 000 kg, a budeme-li čekat příliš dlouho (šest let), můžeme vylovit jen 18 000 kg ryb ročně. Optimálního výsledku tedy dosáhneme, když rybolov zahájíme po pěti letech.

Příklad 14: Rozpočet na obranu

Rozpočet na obranu určité země v roce 1980 činil 30 milionů dolarů. Celkový rozpočet v tom samém roce byl přitom 500 milionů dolarů. V následujícím roce činil rozpočet na obranu 35 milionů dolarů, zatímco celkový rozpočet 605 milionů dolarů. Inflace v těchto dvou letech byla 10 %.

A. Jsi pozván(a), abys přednášel(a) pacifistické společnosti. Tvým záměrem je zdůvodnit, že rozpočet na obranu země v tomto období klesl. Vysvětli, jak bys to udělal(a).

B. Jsi pozván(a), abys přednášel(a) na vojenské akademii. Tvým záměrem je zdůvodnit, že rozpočet na obranu v tomto období vzrostl. Vysvětli, jak bys to udělal(a).

[Zdroj: de Lange & Verhage (1992). Použito se svolením.]

Tato úloha byla důkladně zkoumána na šestnáctiletých žácích (de Lange, 1987, s. 87-90). Jedná se o velmi dobrý příklad úlohy ze třídy *reflexe*: žáci bezprostředně rozpoznali aspekt gramotnosti a často dokázali v určitém smyslu zobecňovat. Jádrem řešení je totiž uvědomit si, že klíčovými matematickými pojmy tu jsou absolutní a relativní růst. Inflaci lze samozřejmě vynechat, čímž problém zpřístupníme i mladším žákům, aniž bychom přišli o hlavní konceptuální myšlenku v pozadí problému. Problém však ztratí na obtížnosti, a tedy i na požadované matematizaci. Jinou možností, jak problém „zjednodušit", je prezentovat data ve formě tabulky nebo schématu. Tyto aspekty matematizace pak žáci už nemusejí provádět a mohou jít rovnou k jádru věci.

Přehled matematických postupů v matematické části výzkumu OECD/PISA

Obrázek 4 schematicky znázorňuje třídy kompetencí a hlavní rozdíly mezi nimi.

Obr. 4: Znázornění tříd kompetencí

Matematická gramotnost

Třída reprodukce

- standardní reprezentace a definice
- rutinní výpočty
- rutinní postupy
- řešení rutinních problémů

Třída integrace

- modelování
- převádění a interpretace při řešení standardních problémů
- používání většího počtu dobře definovaných postupů

Třída reflexe

- řešení a formulování komplexních problémů
- promýšlení a vhled
- originální matematický přístup
- používání většího počtu komplexních postupů
- zobecňování

Charakteristiky kompetencí z předchozích stran lze použít ke klasifikaci matematických úloh a tedy i k jejich zařazení do některé ze tříd kompetencí. Jedna možnost spočívá například v provedení analýzy požadavků dané úlohy pro každou z osmi kompetencí. Na základě toho je pak možné rozhodnout, které ze tří tříd kompetencí nejlépe odpovídá popis požadavků této úlohy pro každou kompetenci.

Pokud bude některá z kompetencí ohodnocena tak, že spadá do třídy *reflexe*, bude i celá úloha zařazena do této třídy. Pokud nebude žádná kompetence vyhovovat třídě *reflexe*, ale jedna nebo více kompetencí budou posouzeny tak, že odpovídají třídě *integrace*, bude úloha zařazena do třídy *integrace*. V ostatních případech bude úloha zařazena do třídy *reprodukce*, protože všechny kompetence byly ohodnoceny tak, že odpovídají popisu pro tuto třídu.

Hodnocení matematické gramotnosti

Charakteristiky úloh

V předcházejících kapitolách jsme vymezili oblast matematické gramotnosti výzkumu OECD/PISA a popsali jsme její strukturu. Zde se budeme podrobněji zabývat některými aspekty úloh používaných k hodnocení žáků. Nejprve popíšeme povahu úloh a pak se budeme zabývat jejich formáty.

Povaha úloh v matematické části výzkumu OECD/PISA

Výzkum OECD/PISA je mezinárodním testem gramotnosti patnáctiletých žáků. Všechny použité testové úlohy by měly být vhodné pro populaci patnáctiletých žáků v zemích OECD.

Úlohy zpravidla obsahují úvodní část, po které následuje vlastní otázka. Pro úlohy, které nemohou být vyhodnocovány automaticky, jsou navíc vypracovány podrobné pokyny, podle kterých jsou vyhodnocovány vyškolenými osobami. Tyto pokyny zajistí, že žákovské odpovědi budou ve všech zúčastněných zemích vyhodnoceny spolehlivě a jednotně.

Jeden z předcházejících oddílů této publikace byl věnován popisu situací, do nichž mohou být úlohy matematické části výzkumu OECD/PISA zasazeny. Pro cyklus OECD/PISA 2003 byly zvoleny tyto typy situací: osobní, vzdělávací/pracovní, veřejné a vědecké. Úlohy vybrané do testů matematické gramotnosti OECD/PISA 2003 pokrývají všechny čtyři uvedené typy situací.

Preferovány jsou takové kontexty úloh, které lze považovat za *autentické*. To znamená, že pro výzkum OECD/PISA mají nejvyšší hodnotu úlohy, se kterými bychom se v nějaké podobě mohli setkat v reálném světě a které mají kontext, v němž je užití matematiky při řešení problému autentické. Jako prostředek k hodnocení matematické gramotnosti jsou preferovány problémy s „nematematickým“ kontextem, který má vliv na řešení a jeho interpretaci.

Každá úloha by se měla vztahovat převážně k jednomu z tematických okruhů (fenomenologických kategorií problémů), které jsou popsány na jiném místě tohoto textu. Úlohy pro výzkumný cyklus OECD/PISA 2003 jsou zvoleny tak, aby byly dobře zastoupeny všechny čtyři tematické okruhy.

Úlohy by měly být založeny na jednom nebo několika matematických postupech popsaných v této koncepci a měly by se převážně vztahovat k jedné třídě kompetencí.

Při tvorbě a výběru úloh pro testové nástroje výzkumu OECD/PISA 2003 jsou velmi pečlivě zvažovány slovní formulace, aby k úspěšnému proniknutí do úloh nebylo nutné číst textové pasáže s vysokými nároky na čtenářské dovednosti. Formulace otázek by měly být přímé a co možná nejjednodušší. Pozornost je věnována také tomu, aby kontexty úloh některé žáky kulturně neznevýhodňovaly.

Úlohy vybrané pro testové nástroje výzkumu OECD/PISA pokrývají široké rozpětí obtížnosti, aby postihly očekávané široké rozpětí dovedností všech testovaných žáků. Také všechny stěžejní prvky této koncepce (zejména jednotlivé třídy kompetencí a tematické okruhy) jsou zastoupeny úlohami s co nejširším rozpětím obtížnosti. Obtížnost úloh byla stanovena na základě rozsáhlého pilotního šetření ještě před jejich výběrem pro hlavní šetření OECD/PISA 2003.

Formáty úloh

Při vývoji testových nástrojů je vždy nutno pečlivě zvážit vliv formátů úloh na výkon žáka, a tedy i na definici toho, co je testem hodnoceno. Tato otázka je obzvláště závažná u rozsáhlých projektů jako OECD/PISA, kde široký nadnárodní kontext testování významně omezuje rozsah vhodných formátů pro použité testové úlohy.

Matematická gramotnost je ve výzkumu OECD/PISA hodnocena prostřednictvím kombinace úloh různých formátů: otevřených úloh s tvořenou odpovědí, uzavřených úloh s tvořenou odpovědí a úloh s výběrem odpovědi. V testových nástrojích pro výzkum OECD/PISA 2003 je každý z těchto typů zastoupen přibližně ve stejném počtu.

Na základě zkušeností získaných při vytváření a užívání testových úloh pro výzkumný cyklus OECD/PISA 2000 lze říci, že úlohy s výběrem odpovědi jsou nejvhodnější pro hodnocení kompetencí ze třídy *reprodukce* a *integrace*. V příkladu 15 je uvedena úloha s výběrem odpovědi z omezeného počtu nabízených možností, kterou lze zařadit ke třídě kompetencí *integrace*. Při řešení tohoto problému musejí žáci přeložit problém do matematického jazyka, navrhnout model, který by reprezentoval periodickou povahu popsaného jevu a rozšířit ho tak, aby mohli výsledek přiřadit k jedné z daných možností.

Příklad 15: Tulení spánek

Tuleň musí dýchat dokonce i tehdy, když spí. Martin pozoroval tuleně po dobu jedné hodiny. Na začátku jeho pozorování se tuleň potopil na dno moře a usnul. Za 8 minut vyplaval z mořského dna zvolna na hladinu a nadechl se. Za 3 minuty se vrátil zpět na mořské dno. Martin si všiml, že celý tento proces probíhal velmi pravidelně.

Po jedné hodině se tuleň nacházel:

A na dně

B na cestě ke hladině

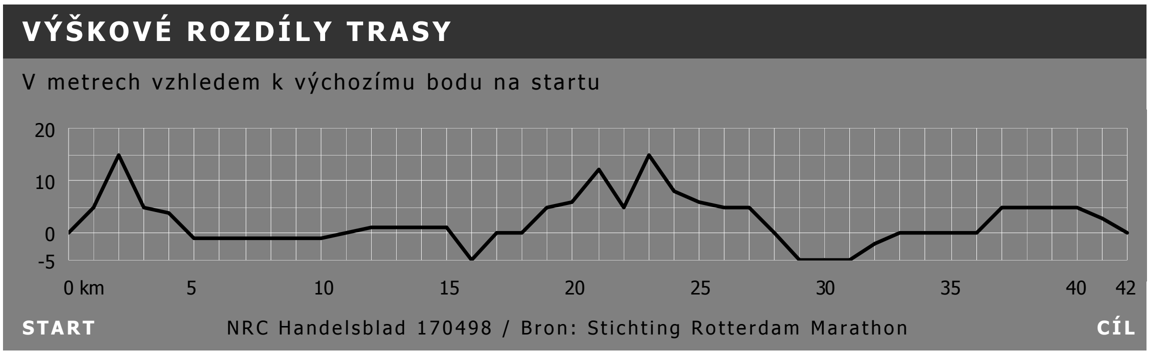
C na hladině, kde se nadechoval

D na cestě ke dnu

Pro cíle vyššího řádu a hodnocení komplexnějších postupů by však měly být používány spíše jiné formáty úloh. V uzavřených úlohách s tvořenou odpovědí jsou kladeny podobné otázky jako v úlohách s výběrem odpovědi, žáci však musí odpověď sami vytvořit. Správnost této odpovědi pak může být snadno posouzena. Například úloha z příkladu 16 má jednu správnou odpověď a mnoho možných nesprávných odpovědí. U tohoto formátu úloh není příliš pravděpodobné, že žáci budou odpovědi hádat, a také není nutno vytvářet distraktory (alternativní možnosti odpovědi), které ovlivňují výsledky měření.

Příklad 16: Rotterdamský maraton

Tegla Loroupe vyhrála v roce 1998 maraton v Rotterdamu. „Bylo to snadné," řekla, „běželo se po rovině." Zde vidíte graf výškových rozdílů rotterdamského maratonského běhu:



Kolik byl rozdíl mezi nejvyšším a nejnižším bodem trasy?

____________ m

Otevřené úlohy s tvořenou odpovědí po žácích vyžadují rozsáhlejší odpověď a proces tvorby odpovědi často zahrnuje kognitivní činnosti vyššího řádu. Takové úlohy často požadují, aby žák nejen napsal odpověď, ale aby také zaznamenal svůj postup nebo vysvětlil, jak k odpovědi došel. Hlavním rysem otevřených úloh s tvořenou odpovědí je, že dávají žákům možnost, aby prokázali své dovednosti na řešeních s různou úrovní matematické složitosti. Příkladem otevřené úlohy s tvořenou odpovědí je následující úloha:

Příklad 17: Indonésie

Indonésie je ostrovní země, která leží mezi Malajsií a Austrálií. Následující tabulka uvádí údaje o rozloze a počtu obyvatel Indonésie a jejich rozmístění na šesti nejdůležitějších ostrovech.

Ostrov	Rozloha (km^2)	Procento z celkové rozlohy	Počet obyvatel v roce 1980 (tis.)	Procento z celkového počtu obyvatel
Jáva / Madura	132 187	6,94	91 281	61,93
Sumatra	473 606	24,85	27 981	18,99
Kalimantan (Borneo)	539 460	28,31	6 721	4,56
Sulawesi (Celebes)	189 216	9,93	10 377	7,04
Bali	5 561	0,29	2 470	1,68
Irian Jaya	421 981	22,14	1 145	0,78
Celkem	1 905 569	100,00	147 384	100,00

Jedním z mnoha problémů Indonésie je nerovnoměrné rozmístění obyvatel na ostrovech. Z tabulky je vidět, že na Jávě, která zaujímá méně než 7 % celkové rozlohy, žije téměř 62 % obyvatel.

Sestroj graf (nebo grafy), který zobrazuje nerovnoměrné rozmístění obyvatel Indonésie.

[Zdroj: de Lange & Verhage (1992). Použito se svolením, upraveno.]

Otevřené úlohy s tvořenou odpovědí představují zhruba třetinu všech úloh v matematické části výzkumu OECD/PISA. Odpovědi na tyto úlohy vyhodnocují vyškolené osoby, neboť vyhodnocování mnohdy vyžaduje odborné posouzení. Hodnocení žákovských odpovědí se provádí podle pokynů. Vzhledem k tomu, že navzdory jednotným pokynům se různé osoby při vyhodnocování těchto úloh nemusejí vždy shodnout, budou provedeny testy spolehlivosti, které umožní stanovit míru odlišností. Zkušenosti s takovými typy testů ukazují, že lze vytvořit jasné pokyny pro vyhodnocování a získat spolehlivé výsledky.

Ve výzkumu OECD/PISA se dále používají takové formáty úloh, kdy na jeden úvodní text navazuje několik otázek, zpravidla se vzrůstající obtížností. Úlohy tohoto formátu žákům umožňují hlouběji proniknout do problému nebo do kontextu. Prvních několik otázek je obvykle s výběrem odpovědi nebo uzavřených s tvorbou odpovědi, za nimi pak následují otevřené otázky s tvořenou odpovědí. Tento formát lze použít pro hodnocení všech tříd kompetencí.

Jedním z důvodů pro použití formátů se společným úvodním textem je to, že umožňují vytvořit reálné úlohy, které dobře odrážejí různorodost situací reálného života. Dalším důvodem je efektivní využití času určeného k testování – zkrátíme tak totiž dobu, kterou žáci potřebují k tomu, aby „pronikli do situace“. Při konstrukci úloh a pokynů pro vyhodnocování odpovědí se dbá na to, aby v rámci každé úlohy byly jednotlivé otázky na sobě nezávislé. Dbá se i na minimalizaci zkreslení, které by mohlo být způsobeno užitím menšího počtu situací.

Struktura testu

Testové nástroje matematické části výzkumu OECD/PISA 2003 vyžadují celkem 210 minut testovacího času. Úlohy vybrané pro testování matematické gramotnosti jsou uspořádány do sedmi bloků, na které připadne vždy 30 minut testovacího času. Bloky úloh jsou zařazeny do jednotlivých testových sešitů na základě návrhu, který zajišťuje jejich vyváženou rotaci.

Celkový testovací čas je co nejrovnoměrněji rozložen mezi čtyři tematické okruhy (*kvantita*, *prostor a tvar*, *změna a vztahy*, *neurčitost*) a mezi čtyři situace popsané v této koncepci (*osobní*, *vzdělávací/pracovní*, *veřejné* a *vědecké*). Rozdělení úloh do tří tříd kompetencí (*reprodukce*, *integrace* a *reflexe*) je v poměru 1 : 2 : 1. Zhruba třetina úloh je s výběrem odpovědi, třetinu tvoří uzavřené úlohy s tvořenou odpovědí a třetinu otevřené úlohy s tvořenou odpovědí.

Prezentace úrovně matematické gramotnosti

K prezentaci dat získaných z odpovědí žáků v testech OECD/PISA bude vytvořena škála matematické gramotnosti, která bude rozdělena na pět úrovní způsobilosti (Masters & Forster, 1996, Masters, Adams & Wilson, 1999). Tuto škálu dostaneme z výstupních dat užitím Item Response Theory. Celková škála bude použita k popisu výsledků žáků z jednotlivých zúčastněných zemí na každé z pěti úrovní způsobilosti a poskytne referenční rámec pro mezinárodní srovnání.

Uvažuje se rovněž o vytvoření několika dílčích škál. Tyto dílčí škály by mohly být založeny na třech třídách kompetencí nebo na čtyřech tematických okruzích. Rozhodnutí o vytvoření dílčích škál bude učiněno na základě různých podkladů včetně psychometrických analýz provedených na datech z výzkumu OECD/PISA. K tomu je třeba zajistit, aby z každé kategorie, která se může stát potenciálním základem některé z dílčích škál, byl do testových nástrojů zařazen dostatečný počet úloh. Úlohy v každé z těchto kategorií by také měly pokrývat dostatečně široké rozpětí obtížnosti.

Třídy kompetencí představují pojmové kategorie charakterizované vzrůstajícími kognitivními požadavky a vzrůstající složitostí, neodrážejí však přesně hierarchii způsobilosti žáků, která je založena na obtížnosti úloh. Pojmová složitost je jen jednou složkou obtížnosti úloh, která ovlivňuje úroveň výkonu žáka. K dalším složkám obtížnosti patří míra obeznámenosti s kontextem nebo problémem, možnost naučit se nebo procvičit danou problematiku apod. Tak například úloha s výběrem odpovědi, která vyžaduje kompetence ze třídy *reprodukce* (např. otázka „Na kterém z následujících obrázků je kvádr?“ s obrázky míče, plechovky, krabice a čtverce), může být velmi jednoduchá pro žáky, kteří si osvojili význam používaných pojmů, ale velmi obtížná pro ty, kteří s nimi nejsou dostatečně obeznámeni. Avšak přestože si lze představit poměrně obtížné úlohy ze třídy *reprodukce* i poměrně jednoduché úlohy ze třídy *reflexe* a přestože by do testových nástrojů měly být v rámci každé třídy zařazeny úlohy s pokud možno co nejširším rozpětím obtížnosti, lze předpokládat pozitivní korelaci mezi třídami kompetencí a obtížností úloh.

Obtížnost úloh, a tedy i nároky na matematickou způsobilost, mohou zvyšovat následující faktory:

- Typ a úroveň požadované interpretace a reflexe: povaha požadavků vyplývajících z kontextu problému, míra zřetelnosti matematických požadavků nebo naopak rozsah, v jakém musejí žáci sami přijít s vlastní matematickou konstrukcí problému, rozsah požadovaného vhledu, komplexního uvažování a zobecňování.
- Typ požadovaných dovedností při práci s reprezentacemi: v nejmenší míře se tyto požadavky vyskytují v problémech, kde je použit jen jeden způsob reprezentace, a nejvíce se uplatňují v problémech, kde žáci musejí přecházet mezi různými způsoby reprezentace nebo sami hledat příslušné způsoby reprezentace.
- Typ a úroveň požadovaných matematických dovedností: pohybují se v rozsahu od jednoduchých problémů, které po žácích vyžadují jen reprodukci základních matematických faktů a provádění jednoduchých výpočtů, až ke komplexním problémům, které vyžadují pokročilejší matematické znalosti, komplexní rozhodování, zpracování informací, dovednosti řešit problémy a modelovat.
- Typ a míra požadované matematické argumentace: tyto požadavky vzrůstají od problémů, kde není vůbec třeba argumentovat, přes problémy, v nichž mohou žáci uplatnit známé argumenty, až k problémům, kde musejí matematické argumenty sami vytvářet, chápat argumentaci jiných osob nebo posuzovat správnost uvedených argumentů a důkazů.

Na nejnižší úrovni způsobilosti žáci zpravidla uplatňují jednoduché postupy, mezi něž patří orientace v běžných kontextech a čistě matematicky formulovaných problémech, reprodukce známých matematických faktů nebo postupů a užití jednoduchých početních dovedností.

Na vyšších úrovních způsobilosti žáci zpravidla řeší složitější úkoly s větším počtem kroků, kombinují různé informace, interpretují různé reprezentace matematických pojmů a informací a dokáží určit relevantní a důležité prvky a vztahy mezi nimi. Při řešení problémů pracují zpravidla s poskytnutými matematickými modely nebo formulacemi, které jsou často v algebraické formě. K řešení dospívají prostřednictvím postupů nebo výpočtů s menším počtem kroků.

Na nejvyšší úrovni způsobilosti jsou žáci ve svém přístupu k matematickým problémům tvořivější a aktivnější. Zpravidla interpretují složitější informace a provádějí postupy s více kroky. Často sami formulují problém a vytvářejí vhodný model, který přispívá k jeho řešení. V neobvyklém kontextu dokáží identifikovat a aplikovat příslušné nástroje a vědomosti. Podobným způsobem uplatňují svůj vhled při hledání vhodné strategie řešení a projevují další kognitivní činnosti vyššího řádu jako například zobecňování, zdůvodňování nebo argumentování při sdělování a objasňování výsledků.

Pomůcky a nástroje

Ve výzkumu OECD/PISA mohou testovaní žáci používat vlastní kalkulátory a jiné nástroje tak, jak je běžně používají ve škole.

Tento přístup k používání kalkulátorů umožňuje autentičtější hodnocení toho, co žáci umějí a čeho mohou dosáhnout, a poskytuje věrohodnější srovnání výkonnosti vzdělávacích systémů. Rozhodnutí, zda žáci mohou používat kalkulátory, se v zásadě neliší od jiných politických rozhodnutí v oblasti výuky a vzdělávání, která jsou prováděna v rámci jednotlivých vzdělávacích systémů a nemohou být pod kontrolou OECD/PISA.

Žáci, kteří jsou zvyklí mít po ruce kalkulátor, který v případě potřeby používají při řešení úloh, by byli znevýhodněni, kdyby tato pomůcka nebyla povolena.

Závěr

Cílem výzkumu OECD/PISA je vyvinout indikátory, které ukáží, jak efektivně naučily zúčastněné země patnáctileté žáky používat matematiku jako aktivní, přemýšliví a inteligentní lidé. K tomu připravila OECD/PISA hodnocení, které se zaměřuje na zjišťování toho, do jaké míry umějí žáci používat to, co se naučili.

Tato koncepce poskytuje definici matematické gramotnosti a představuje kontext jejího hodnocení v rámci cyklu OECD/PISA 2003, které členským zemím OECD umožní posoudit některé významné výstupy jejich vzdělávacích systémů. Zvolená definice matematické gramotnosti je v souladu s definicemi čtenářské i přírodovědné gramotnosti a odráží orientaci výzkumu OECD/PISA na hodnocení schopnosti žáků stát se aktivními a plnohodnotnými členy společnosti.

Podobně jako v ostatních oblastech výzkumu OECD/PISA jsou hlavními složkami matematické gramotnosti kontexty pro užití matematiky, matematický obsah a matematické postupy. Všechny tyto složky přímo vyplývají z definice gramotnosti. Při výkladu kontextů a obsahu byly zdůrazněny ty aspekty problémů, které oslovují žáky jako občany, kdežto výklad postupů zdůraznil kompetence, které žáci musí při řešení těchto problémů uplatnit. Tyto kompetence byly rozděleny do tří tzv. „tříd kompetencí“, které usnadňují uvažování o způsobech, jimiž se komplexní kognitivní procesy projevují v rámci strukturovaného programu hodnocení.

Důraz, který klade matematická část výzkumu OECD/PISA na porozumění a užívání matematických znalostí při řešení problémů, které vznikají v rámci každodenních zkušeností, představuje ideál, který různé vzdělávací systémy na světě naplňují v různé míře. Výzkum OECD/PISA se snaží připravit pestrou paletu matematických úloh s různým rozsahem poskytnutých návodů a s různou strukturou, přitom však preferuje autentické problémy, při jejichž řešení musejí žáci samostatně uvažovat.

Příloha: Rozpracování tematických okruhů

Kvantita

K uspořádání světa, v němž žijeme, nutně potřebujeme kvantifikaci. Potřebujeme vyjádřit, co je to „velký“ a „malý“, „dlouhý“ a „krátký“, „mnoho“ a „málo“, „více“ a „méně“. Kvantifikace nám umožňuje rozeznávat struktury ve světě kolem nás: slovem „pětice“ nazýváme soubory pěti jablek, pěti lidí, pěti aut, pěti věcí. Přirozená čísla (1, 2, 3, ...) jsou prostředkem, jak tyto struktury uchopit a popsat. Přirozená čísla jsou východiskem pro počítání a pro hledání jemnějších struktur jako například sudý a lichý.

Pro malé děti však nejsou přirozená čísla prvním setkáním s pojmem *kvantity*. Děti rozeznávají „velké“ a „malé“ kvalitativním způsobem bez přiřazování čísel. To se týká jak předmětů různých velikostí (rozliší velkou sušenku od malé sušenky), tak různě velkých skupin předmětů (tři předměty jsou méně než sedm předmětů).

V každodenním životě je nejdůležitějším způsobem používání čísel měření velikostí. Pomocí měr se kvantifikuje délka, obsah, objem, výška, rychlost, hmotnost, tlak vzduchu nebo hodnota peněz.

Významným aspektem zacházení s kvantitami je kvantitativní uvažování. Patří k němu:

- chápání významu čísel,
- chápání významu operací,
- cit pro velikost čísel,
- kultura výpočtů,
- počítání zpaměti,
- odhadování.

Pod pojem „význam operací“ patří i schopnost provádět operace, které obsahují porovnávání, poměry a procenta. Chápání významu čísel znamená i porozumění takovým aspektům jako relativní velikost, různé reprezentace čísel, ekvivalentní formy čísel a jejich používání k popisu vlastností světa.

Kvantita zahrnuje také „cit“ pro velikosti čísel a odhadování. Abychom uměli posoudit věrohodnost numerických výsledků, musíme mít široké znalosti kvantit (měr) reálného světa. Je průměrná rychlost auta 5, 50, nebo 500 km/h? Žije na světě 6 milionů, 600 milionů, 6 miliard, nebo 60 miliard lidí? Jak vysoká je věž? Jak široká je řeka? Zvláště důležitá je schopnost odhadovat rychle řády velikostí, zejména s ohledem na rostoucí užívání elektronických výpočetních prostředků. Je nutno umět odhadnout, že 33 . 613 je něco kolem 20 000. K tomu, abychom získali takové dovednosti, nemusíme příliš cvičit provádění tradičních písemných algoritmů, ale musíme být schopni pružně a pohotově aplikovat znalosti řádů čísel a počítání s jednocifernými čísly (Fey, 1990).

Vhodné užití smyslu pro význam čísel umožňuje žákům řešit úlohy vyžadující přímé, inverzní i kombinované proporcionální uvažování. Dokáží odhadnout rychlost změny, zdůvodnit výběr dat nebo úroveň přesnosti vyžadovanou v operacích a modelech, které používají. Dokáží prozkoumat alternativní algoritmy a ukázat, proč fungují a v kterých případech selhávají. Dokáží modelovat problémy s daty reálného světa pomocí operací a vztahů mezi operacemi a ovládají numerické vztahy založené na operacích a porovnáních (Dossey, 1997).

Do tematického okruhu *kvantita* patří i „elegantní" kvantitativní úvahy jako například ta, která je uvedena v následujícím příkladu nazvaném Gauss. Tvořivost spojená s pojmovým porozuměním by měla být u patnáctiletých žáků oceňována.

Příklady

Gauss

Učitel Karla Friedricha Gausse (1777-1855) uložil třídě, aby sečetli dohromady všechna čísla od 1 do 100. Asi chtěl žáky na nějakou dobu zaměstnat. Gauss měl však skvěle vyvinuté kvantitativní uvažování a přišel na trik urychlující řešení. Uvažoval takto:

> *Napíšeme součet dvakrát, jednou v rostoucím pořadí a jednou v klesajícím:*
> *1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100*
> *100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1*
>
> *Když sečteme oba součty po sloupcích, dostaneme:*
> *101 + 101 + ... + 101 + 101*
>
> *Protože v tomto součtu je stokrát 101, je jeho hodnota:*
> *100 x 101 = 10 100*
>
> *Tento součin je dvojnásobek původního součtu, takže když ho vydělíme dvěma, dostaneme výsledek 5 050.*

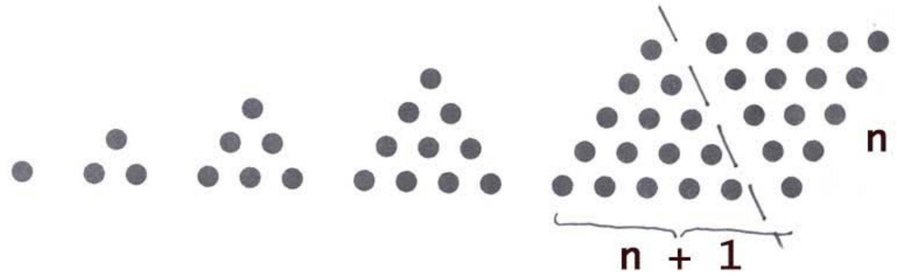
Trojúhelníková čísla

Výše uvedený příklad kvantitativního myšlení založený na číselných strukturách můžeme ještě dále rozpracovat, abychom ukázali souvislost této číselné struktury s jejím geometrickým zobrazením. Nejprve uvedeme vzorec, který vyjadřuje obecné řešení Gaussova problému: $1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1) / 2$.

Tento vzorec také zachycuje známou geometrickou strukturu: číslům ve tvaru n(n+1)/2 se říká trojúhelníková čísla, neboť jsou to právě ta čísla, která lze získat, když uspořádáme tečky do rovnostranného trojúhelníku.

Prvních pět trojúhelníkových čísel 1, 3, 6, 10, 15 je znázorněno na obrázku 5.

Obr. 5: Prvních pět trojúhelníkových čísel



Proporcionální uvažování

Bude zajímavé se podívat, jak žáci v různých zemích řeší problémy, ve kterých se nabízí použití různých strategií. Rozdíly lze očekávat zejména v úlohách, které lze řešit proporcionální úvahou. V některých zemích můžeme u určité úlohy očekávat užití převážně jedné strategie, v jiných zemích užití více strategií. Zřejmě se také budou vyskytovat podobné přístupy k řešení problémů, které nevypadají podobně. Tato očekávání jsou ve shodě s nedávnými výsledky výzkumu TIMSS (Mitchell *et al.*, 2000). Různé strategie řešení a vztahy mezi nimi si ukážeme na následujících třech úlohách.

1. *Dnes pořádáš večírek. Chceš nakoupit 100 plechovek limonád. Kolik balení po šesti plechovkách koupíš?*
2. *Rogallo s poměrem klesání 1 : 22 startuje z kolmé skály vysoké 120 metrů. Pilotka míří k místu vzdálenému 1 400 metrů. Doletí k tomuto místu (za předpokladu bezvětří)?*
3. *Škola si chce najmout mikrobusy (s 8 místy pro pasažéry) pro přepravu 98 žáků do školního tábora. Kolik mikrobusů bude škola potřebovat?*

Na první problém bychom mohli hledět jako na úlohu o dělení (100 : 6 = ?), kdy žákovi zbývá jen interpretovat řešení v původním kontextu (Jaký význam má zbytek?). Druhou úlohu lze řešit proporcionální úvahou (na každý metr výšky mohu uletět 22 metrů, takže když startuji ze 120 metrů...). Třetí problém budou mnozí řešit jako úlohu na dělení. Všechny tři problémy lze však řešit metodou tabulky poměrů:

Plechovky:	1	10	5	15	2	17
	6	60	30	90	12	102
Létání:	1	100	20	120		
	22	2 200	440	2 640		
Mikrobusy:	1	10	2	13		
	8	80	16	104		

Všimnout si této podobnosti je dovednost, která patří k matematické gramotnosti: matematicky gramotní žáci nemusejí hledat jeden vhodný „nástroj“ nebo algoritmus, ale mají po ruce celou řadu strategií, ze kterých si mohou vybírat.

Procenta

Karel si šel koupit bundu, která normálně stojí 50 zedů a byla zlevněna o 20 %. V Zedlandii se platí při prodeji ještě 5% daň. Prodavač nejprve připočetl 5% daň k ceně bundy a pak odečetl 20 %. Karel protestoval: chtěl, aby prodavač nejprve odečetl 20% slevu a pak vypočetl 5% daň.

Je v tom rozdíl?

Při nakupování se často setkáváme s problémy, které vyžadují tento typ kvantitativního uvažování a provádění příslušných výpočtů zpaměti. Schopnost efektivně je řešit patří k základům matematické gramotnosti.

Prostor a tvar

Tvar je důležité, vyvíjející se a nádherné téma matematiky se silnou vazbou k tradiční geometrii. Přesahuje ji však v obsahu, významu i metodách. Zacházení s reálnými tvary vyžaduje porozumění vizuálnímu světu kolem nás, jeho popis, kódování, dekódování a interpretaci vizuálních informací. K pochopení pojmu tvar by žáci měli umět zjišťovat, v čem jsou si objekty podobné a v čem se liší, analyzovat různé složky objektů a rozeznávat tvary v různých rozměrech a zobrazeních.

Důležité je neomezovat se na tvary jako na statické entity. Tvar jako entitu lze transformovat a tvary lze modifikovat. Tyto změny mohou být velmi elegantně znázorněny pomocí počítačové techniky. Při změně tvarů by žáci měli umět rozeznávat struktury a pravidelnosti. Ukazuje to příklad na obrázku 6.

Dalším významným dynamickým aspektem zkoumání tvarů je vzájemná poloha tvarů vůči sobě navzájem i vzhledem k poloze pozorovatele. Abychom toho dosáhli, musíme nejen rozumět vzájemné poloze objektů, ale měli bychom se také zabývat otázkami, jak vidíme, proč vidíme právě takto atd. Hlavní roli tu hraje vztah mezi tvary nebo obrazy a jejich zobrazeními ve dvou i třech rozměrech.

Je mnoho situací, které vyžadující tento druh myšlení. Uplatní se například tehdy, když chceme identifikovat a spojit fotografii města s plánem tohoto města, určit místo, odkud byla fotografie pořízena, nakreslit mapu, chápat, proč se blízké budovy zdají větší než vzdálené, proč se zdá, že se koleje železniční trati na obzoru stýkají apod. To všechno jsou otázky, které souvisejí s tematickým okruhem *prostor a tvar*.

Protože žáci žijí v trojrozměrném prostoru, měl by pro ně být běžný pohled na předměty ze tří kolmých směrů (např. zpředu, z boku a shora). Měli by si být vědomi užitečnosti a omezení různých zobrazení trojrozměrných tvarů, jak ilustruje příklad na obrázku 7. Měli by si nejen uvědomovat vzájemnou polohu objektů, ale také se umět orientovat v prostoru, v konstrukcích a tvarech. Tyto dovednosti se uplatní například při čtení a interpretaci mapy nebo při sestavování návodu, jak se dostat z bodu A do bodu B, pomocí souřadnic, běžného jazyka nebo obrázku.

Porozumění pojmu tvar zahrnuje také dovednost vytvořit dvojrozměrnou síť daného trojrozměrného tělesa a naopak, a to i když je těleso zobrazeno dvojrozměrně. Příklad je uveden na obrázku 8.

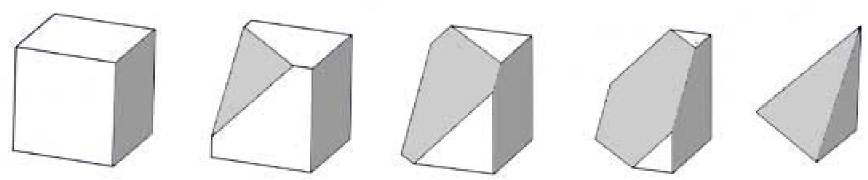
Závěrem uvedeme seznam nejdůležitějších aspektů tematického okruhu *prostor a tvar*:

- rozeznávání tvarů a struktur,
- popis, kódování a dekódování vizuální informace,
- chápání dynamických změn tvarů,
- podobnosti a odlišnosti,
- vzájemná poloha,
- dvojrozměrná a trojrozměrná zobrazení a vztahy mezi nimi,
- orientace v prostoru.

Příklady

Na obrázku 6 je znázorněn jednoduchý příklad, který demonstruje, že při pohledu na měnící se tvary musíme být flexibilní. Jedná se o krychli, která je „useknuta" (tj. je proveden její rovinný řez).

Obr. 6: Řezy krychle rovinou v různé poloze



Můžeme klást různé otázky, například:

Jaké tvary lze získat jedním rovinným řezem krychle?

Kolik stěn, hran a vrcholů vznikne, když krychli takto usekneme?

Následující tři příklady vyžadují dobrou obeznámenost se zobrazováním trojrozměrných tvarů. V prvním příkladu (viz obr. 7), je dán pohled z boku a zpředu na objekt sestavený z krychlí.

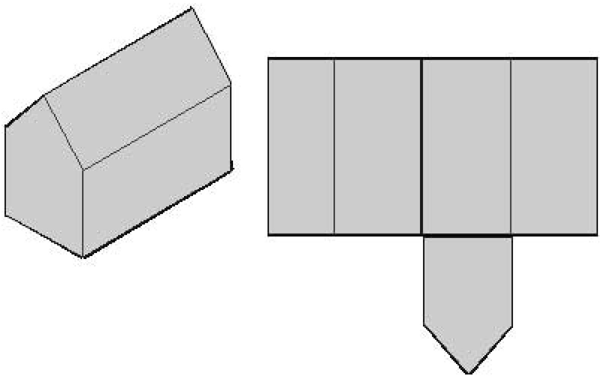
Obr. 7: Pohled z boku a zpředu na objekt složený z krychlí

Ptáme se:

Kolik krychlí bylo použito na vytvoření tohoto objektu?

Mnoho žáků i učitelů bude možná překvapeno, že maximální počet krychlí je 20 a minimální je 6 (de Lange, 1995).

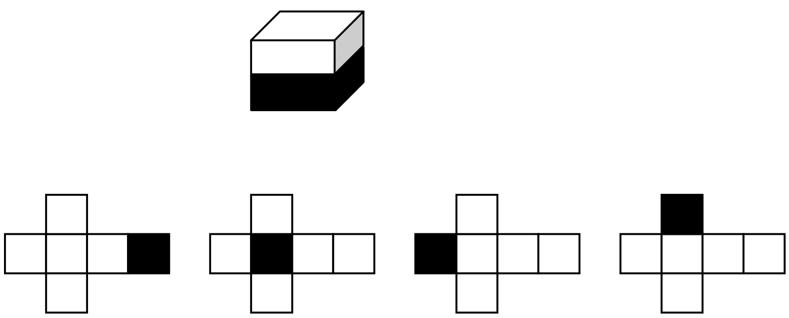
Obr. 8: Dvojrozměrné zobrazení stodoly a její (neúplná) síť



V příkladu na obrázku 8 je dáno dvojrozměrné zobrazení stodoly a její neúplná síť. Úloha spočívá v doplnění sítě stodoly.

Poslední příklad se podobá předcházejícímu a je znázorněn na obrázku 9 (upraveno podle Hershkovitz *et al*., 1996).

Obr. 9: Krychle s černým spodkem



Spodní polovina krychle je obarvena na černo. V každé ze čtyř sítí je spodní stěna již černá. Žáci mají dokončit obarvení sítí.

Změna a vztahy

Mít cit pro struktury změn podle Stewarta (1990) znamená:

- znázorňovat změny srozumitelnou formou,
- rozumět hlavním typům změn,
- rozeznávat jednotlivé typy změn při jejich výskytu,
- aplikovat tyto techniky na vnější svět,
- řídit měnící se svět ke svému prospěchu.

Změnu a vztahy lze vizuálně znázornit mnoha způsoby: numericky (např. tabulkou), symbolicky nebo graficky. Převod mezi těmito znázorněními má velký význam, stejně jako rozeznávání a chápání základních vztahů a typů změny. Žáci by měli znát pojmy lineární růst (aditivní proces), exponenciální růst (multiplikativní proces), periodický růst a o logaritmickém růstu by měli být informováni alespoň neformálně jako o speciálním případu exponenciálního růstu.

Žáci by také měli chápat vztahy mezi těmito modely – základní rozdíly mezi lineárními a exponenciálními procesy, skutečnost, že procentuální růst se shoduje s exponenciálním, kde se setkáváme s logaritmickým růstem a proč, rozlišování spojitých a diskrétních situací.

Se změnami se setkáváme v systémech vzájemně souvisejících objektů nebo u jevů, jejichž prvky se vzájemně ovlivňují. V příkladech uvedených na konci tohoto oddílu se všechny jevy mění s časem. Existuje však mnoho příkladů z reálného života, kde objekty spolu souvisejí i jinými způsoby. Například:

> *Když zkrátíme délku struny na kytaře na polovinu, bude nový tón o oktávu vyšší než původní tón. Tón tedy závisí na délce struny.*
>
> *Když si uložíme peníze do banky, víme, že zůstatek na účtu bude záviset na velikosti, frekvenci a počtu úložek a výběrů a na úrokové míře.*

Vztahy vyvolávají závislost. Závislost vyjadřuje, že vlastnosti a změny jistých matematických objektů mohou záviset na vlastnostech a změnách jiných matematických objektů. Matematické vztahy lze často vyjádřit pomocí rovnic nebo nerovností, můžeme se však setkat i s obecnějšími vztahy.

Tematický okruh *změna a vztahy* vyžaduje funkcionální myšlení. Pro patnáctileté žáky to znamená, že by měli mít povědomí o rychlosti změny, o gradientu a strmosti (i když ne nutně formálním způsobem) a o závislosti jedné proměnné na jiných. Měli by být schopni posuzovat, jak rychle procesy probíhají, a to i relativně.

Tento tematický okruh úzce souvisí s některými aspekty jiných tematických okruhů. Zkoumání číselných struktur může vést k nečekaným souvislostem: příkladem jsou

Fibonacciova čísla a zlatý řez. Zlatý řez je pojem, který hraje důležitou roli také v geometrii. Mnohem více příkladů změny a vztahů lze najít v tematickém okruhu *prostor a tvar*: např. růst obsahu v závislosti na růstu obvodu nebo průměru. Také eukleidovská geometrie vede ke zkoumání vztahů. Známým příkladem je vztah tří stran trojúhelníku. Jsou-li známy délky dvou stran trojúhelníku, třetí není určena, ale známe interval, ve kterém leží: krajní body tohoto intervalu tvoří absolutní hodnota rozdílu a součet délek dvou známých stran. Mezi různými prvky trojúhelníku existuje mnoho dalších podobných vztahů.

Také tematický okruh *neurčitost* vede k různým problémům, na něž lze hledět z úhlu změny a vztahů. Hodíme-li dvěma kostkami a na jedné padne 4, jaká je pravděpodobnost, že součet přesáhne 7? Odpověď (50 %) je založena na závislosti pravděpodobnosti jevu na množině příznivých případů. Hledaná pravděpodobnost je poměr všech příznivých případů ke všem možným případům, což je funkční závislost.

Příklady

Růst buněk

Lékaři sledují růst počtu buněk. Obzvlášť je zajímá den, kdy počet buněk dosáhne 60 000, protože pak budou muset zahájit experiment. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce:

Čas (dny)	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Počet buněk	597	893	1 339	1 995	2 976	2 976	14 719	21 956	32 763

Kdy dosáhne počet buněk 60 000?

Školní výlet

Školní třída si chce najmout autobus na výlet a informovala se u tří společností na cenu.

Společnost A účtuje 375 zedů základní poplatek plus 0,5 zedu za ujetý kilometr.

Společnost B účtuje 250 zedů základní poplatek plus 0,75 zedu za ujetý kilometr.

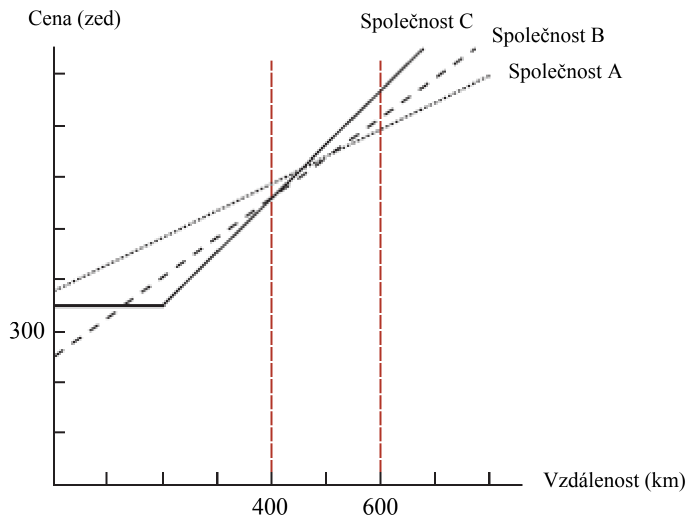
Společnost C účtuje pevnou cenu 350 zedů za prvních 200 kilometrů plus 1,02 zedu za kilometr nad 200 km.

Kterou společnost by si měla třída vybrat, když při výletě najezdí něco mezi 400 a 600 km?

Necháme-li stranou fiktivní prvky kontextu, mohl by se tento problém skutečně vyskytnout. K jeho řešení je třeba formulovat a aktivovat několik funkčních vztahů, rovnic a nerovnic. Řešit ho lze grafickými i algebraickými prostředky, případně jejich kombinací. To, že celková dopravní vzdálenost na výletě není přesně známa, spojuje problém také s tematickým okruhem *neurčitost*.

Grafické znázornění problému je uvedeno na obrázku 10.

Obr. 10: Ceny výletu u tří autobusových společností

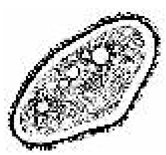


Dravec a kořist

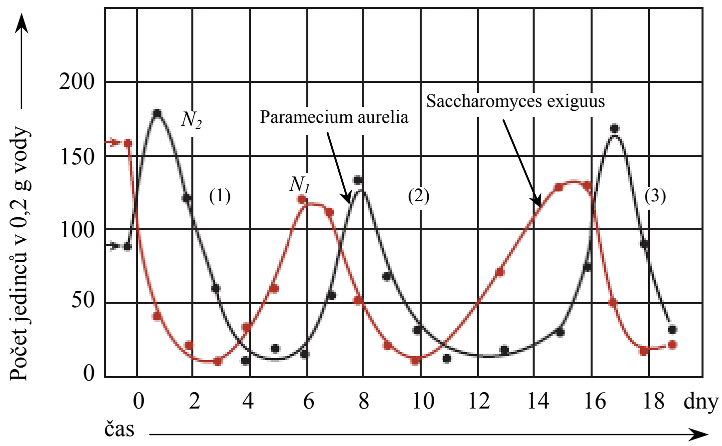
Následující graf ukazuje růst populace dvou živých organismů Paramecium a Saccharomyces.

Model dravec – kořist

Paramecium



Saccharomyces



Jeden z těchto dvou organismů (dravec) se živí druhým (kořistí). Můžeš z grafu usoudit, který je dravec a který kořist?

Jednu vlastnost vztahu mezi dravcem a kořistí lze vyjádřit takto: Rychlost růstu dravců je úměrná množství kořisti. Mají tuto vlastnost uvedené grafy?

Neurčitost

Věda a technika jen zřídka pracuje s určitostí. Věda se snaží zjistit, jak funguje svět, a do té míry, jak se jí to daří, dokážeme spolehlivě popsat, co se událo v minulosti, a přesně předpovědět, co se pravděpodobně stane v budoucnosti. Vědecké poznání je však, pokud vůbec někdy, zřídka absolutní, nemluvě o tom, že někdy je zcela chybné. I v těch nejodbornějších předpovědích je tedy vždy určitá nejistota.

Doporučení, která se týkají zařazování dat, statistiky a pravděpodobnosti do školních osnov, kladou důraz na analýzu dat. Výsledkem je, že se zejména statistika může jevit jako soubor specifických dovedností. O co v tematickém okruhu *neurčitost* skutečně jde, ukázal David S. Moore. Definice pro výzkum OECD/PISA vychází z jeho myšlenek publikovaných v knize *On the Shoulders of Giants* (Steen, 1990) a z myšlenek F. Jamese Rutherforda publikovaných v práci *Why Numbers Count* (Steen, 1997).

Cílem výuky o datech a náhodě je naučit žáky inteligentně zacházet s neurčitostí a různorodostí. Náhoda je těžko uchopitelný pojem: děti, které začínají své vzdělání diktáty a násobilkou, považují svět za deterministický. Rychle se naučí předpokládat, že správná je pouze jediná odpověď a ostatní jsou nesprávné, zejména mají-li odpovědi numerickou podobu. Náhoda je nevyzpytatelná a nepříjemná.

Statistika přináší do matematického vzdělávání něco jedinečného a důležitého: usuzování z neurčitých empirických dat. Tento typ statistického myšlení by měl být součástí mentální výbavy každého inteligentního občana. Jeho nejdůležitějšími prvky jsou:

- vědomí o všudypřítomnosti náhodnosti v procesech,
- potřeba dat o procesech,
- navrhování tvorby dat s vědomím náhodnosti,
- kvantifikace náhodnosti,
- vysvětlování náhodnosti.

Data nejsou pouhá čísla, ale čísla v kontextu. Chceme-li tedy datům rozumět a chceme-li je umět interpretovat, musíme znát jejich kontext. Jinak se omezujeme na pouhé provádění aritmetických operací. V nižších ročnících se statistika učí ne kvůli ní samotné, ale protože je to účinný způsob rozvíjení kvantitativního uvažování a aplikace aritmetiky a grafů k řešení problémů.

Shromáždění kvalitních dat o významných otázkách není jednoduché. Data použitá ve výzkumu OECD/PISA musejí být zajímavá, relevantní, musejí vycházet z praxe a musejí být žákům srozumitelná.

Data se získávají měřením určité charakteristiky, tedy její reprezentací čísly. Úvahy o měření vedou k hlubšímu pochopení toho, proč některá čísla vyjadřují informace a jiná jsou nepodstatná nebo nesmyslná. Především: co je řádný způsob měření? U délky je to celkem jasné – pravítko má pro mnoho účelů dostatečný stupeň přesnosti. U obsahu však mohou nastat potíže, neboť dokonce i u fyzikálních měření hraje roli neurčitost. Významný je nejen nástroj, ale i požadovaný stupeň přesnosti a variabilita měření.

Ústřední otázkou statistiky je organizace šetření na vzorcích. Analýza dat klade důraz na zkoumání dat, která jsou k dispozici, za předpokladu, že reprezentují rozsáhlejší soubor. Mají-li patnáctiletí žáci rozumět problematice, která je součástí tematického okruhu *neurčitost*, měli by znát pojem jednoduchého náhodně vybraného vzorku.

Známý příklad:

> *Ann Landersová, proslulá novinářka, se v roce 1975 zeptala čtenářů:*
>
> *„Kdybyste měli možnost vrátit se zpět, měli byste děti?“*
>
> *Odpovědělo 10 000 lidí a 70 % z nich prohlásilo: NE.*

Jak známo, v dobrovolných odpovědích převládají reakce lidí se silnými (negativními) postoji. Šetření se stejnou otázkou na náhodně vybraném vzorku v celonárodním měřítku ukázalo, že 90 % rodičů by chtělo mít opět děti.

Podstatou chybné analýzy dat je „nechat data mluvit“ a hledat v nich zákonitosti, aniž bychom se nejprve zabývali tím, zda reprezentují nějaký širší prostor.

Jevy mají neurčité jednotlivé výsledky a často je náhodná i struktura opakovaných výsledků. Bylo zjištěno, že naše intuitivní chápání náhody zásadně odporuje zákonům pravděpodobnosti (Garfield & Ahlgren, 1988; Tversky & Kahneman, 1974). Částečně je to způsobeno i omezeným kontaktem žáků s náhodností. Analýza dat nabízí přirozenou příležitost k získání takových zkušeností. Při výuce problematiky neurčitosti by proto analýza dat měla mít zásadně přednost před formální teorií pravděpodobnosti a statistiky. I na vysokoškolské úrovni má mnoho studentů potíže s pravděpodobností a statistikou kvůli mylným představám, kterých se při studiu formálních zákonitostí nedokázali zbavit. V tomto cyklu výzkumu OECD/PISA je problematika pravděpodobnosti zpravidla založena na situacích, v nichž se vyskytují prostředky s náhodnými účinky jako mince, hrací kostky a kola štěstí, nebo na nepříliš komplikovaných situacích z reálného světa, které lze analyzovat intuitivně nebo je lze snadno modelovat uvedenými prostředky.

Neurčitost se také vyskytuje v jevech, jako je přirozený rozptyl výšky žáků, školního prospěchu, příjmů ve skupině lidí atd. Velmi důležité je, aby i patnáctiletí žáci vnímali analýzu dat a náhodu v jejich úzké souvislosti. Jednou z možností je postup od jednoduché analýzy dat k vytváření dat, k pravděpodobnosti a k vyvozování závěrů.

Pro tuto oblast jsou specifické následující matematické pojmy a činnosti:

- vytváření dat – znalost vhodných způsobů měření určitých charakteristik, schopnost posoudit, zda mají data pro daný účel vypovídající hodnotu (velmi důležitý je tu kritický postoj), plánování statistického šetření,
- analýza dat, jejich prezentace a vizualizace, grafické znázornění dat, používání číselných popisných charakteristik jako průměr a medián,

- pravděpodobnost,
- statistika, která pro žáky, jichž se týká tento výzkum, hraje menší roli, protože formální přístup a příslušné metody jsou zpravidla zařazeny až do vyšších ročníků.

Příklady

Tematický okruh *neurčitost* ilustrují následující příklady.

Průměrný věk

Když je 40 % obyvatel jedné země starých alespoň 60 let, je možné, aby byl průměrný věk 30 let?

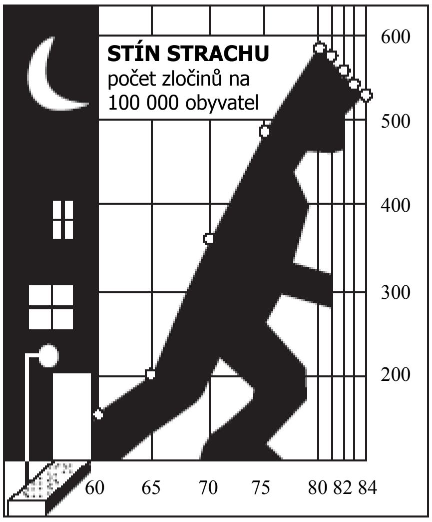
Rostoucí příjmy?

Vzrostly nebo klesly příjmy Zedlanďanů v posledních desetiletích? Medián peněžních příjmů na domácnost klesal: v roce 1970 byl 34 200 zedů, v roce 1980 byl 30 500 zedů a v roce 1990 byl 31 200 zedů. Příjmy na osobu však rostly: v roce 1970 činily 13 500 zedů, v roce 1980 13 850 a v roce 1990 15 777 zedů.

Domácnost tvoří všichni lidé, kteří společně žijí v jednom bytě. Vysvětli, jak je možné, že v Zedlandii příjmy na domácnost klesaly a přitom současně rostly příjmy na osobu.

Růst zločinnosti

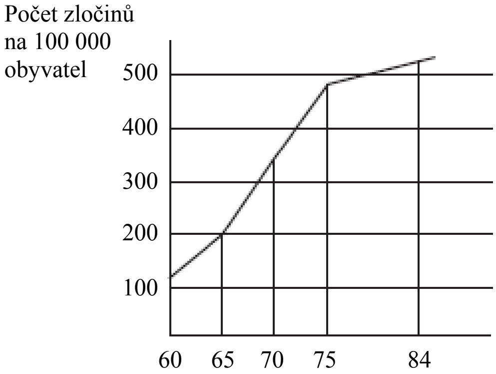
Následující graf pochází z jednoho zedlandského časopisu:



Graf ukazuje počet ohlášených zločinů na 100 000 obyvatel, zprvu v pětiletých intervalech, pak v jednoletých intervalech.

Kolik zločinů na 100 000 obyvatel bylo ohlášeno v roce 1960?

Výrobci poplašných systémů použili stejná data a vytvořili následující graf:



Počet zločinů se ztrojnásobil !!!
Zastavte další nárůst !

⬩ KUPTE SI POPLAŠNÝ SYSTÉM ⬩

Jak došli k tomuto grafu a proč?

Graf výrobců poplašných systémů příliš nepotěšil policii, protože ta chce ukázat, jak je v boji se zločinem úspěšná.

Navrhni graf, který by mohla použít policie, aby ukázala, že zločinnost v poslední době poklesla.

Literatura

Blum, W. (1996), „Anwendungsorientierter Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven“, in G. Kadunz *et al.* (eds.), *Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. vol. 23*, Hoelder-Pichler-Tempsky, Wien, Austria, pp. 15-38.

Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools (1982), *Mathematics Counts* (the Cockcroft report), Her Majesty‘s Stationery Office, London, United Kingdom.

de Corte, E., B. Greer & L. Verschaffel (1996), „Mathematics Teaching and Learning“, in D.C. Berliner & R.C. Calfee (eds.), *Handbook of Educational Psychology,* Macmillan, New York, NY, pp. 491-549.

Devlin, K. (1994, 1997), *Mathematics, the Science of Patterns,* Scientific American Library, New York, NY.

Dossey, J.A. (1997), „Defining and Measuring Quantitative Literacy“, in L.A. Steen (ed.), *Why Numbers Count: Quantitative Literacy for Tomorrow's America* (pp. 173-186), The College Board, New York, NY.

Fey, J. (1990), „Quantity“, in L.A. Steen (ed.), *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy,* National Academy Press, Washington, DC.

Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an Educational Task,* D. Reidel, Dordrecht, Netherlands.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel, Dordrecht, Netherlands.

Garfield, J. & A. Ahlgren (1988), „Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research“, *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), pp. 44-63.

Gee, J. (1998), *Preamble to a Literacy Program*, Department of Curriculum and Instruction, Madison, WI.

Grünbaum, B. (1985), „Geometry Strikes Again“, *Mathematics Magazine*, 58 (1), pp. 12-18.

Hershkovitz, R., B. Parzysz & J. Dormolen (1996), „Space and Shape“, in A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education, Part 1,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.

de Lange, J. (1987), *Mathematics, Insight and Meaning,* OW and OC, Utrecht University, Utrecht, Netherlands.

de Lange, J, (1995), „Assessment: No Change Without Problems“, in T.A. Romberg (ed.), *Reform in School Mathematics and Authentic Assessment,* Suny Press, Albany, NY.

de Lange, J. & H. Verhage (1992), *Data Visualization*, Sunburst, Pleasantville, NY.

LOGSE (1990), *Ley de Ordenacion General del Sistena Educativo*, Madrid, Spain.

Masters, G., R. Adams & M. Wilson (1999), „Charting Student Progress“, in G. Masters & J. Keeves (eds.), *Advances in Measurement in Educational Research Assessment,* Elsevier Science, Amsterdam, Netherlands.

Masters, G., & M. Forster (1996), *Progress Maps,* Australian Council for Educational Research, Melbourne, Australia.

Mathematical Association of America (MAA) (1923), *The Reorganization of Mathematics in Secondary Education: A Report of the National Committee on Mathematical Requirements,* The Mathematical Association of America, inc, Oberlin, OH.

Mathematical Sciences Education Board (MSEB) (1990), *Reshaping School Mathematics: A Philosophy and Framework of Curriculum*, National Academy Press, Washington, DC.

Mitchell, J., E. Hawkins, P. Jakwerth, F. Stancavage & J. Dossey (2000), *Student Work and Teacher Practice in Mathematics*, National Center for Education Statistics, Washington, DC.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000), *Principles and Standards for Mathematics*, NCTM, Reston, VA.

Neubrand, M., R. Biehler, W. Blum, E. Cohors-Fresenborg, L. Flade, N. Knoche, D. Lind, W. Löding, G. Möller & A. Wynands (Deutsche OECD/PISA-Expertengruppe Mathematik) (2001), „Grundlagen der Ergänzung des Internationalen OECD/PISA-Mathematik-Test in der Deutschen Zusazterhebung“, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 33 (2), pp. 33-45.

Newton, I. (1687), Philosophiæ naturalis principia mathematica Auctore Is. Newton, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali. Imprimatur S. Pepys, Reg. Soc. Præses. Julii 5. 1686. Londini, Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII. (English Translation: *Mathematical Principles of Natural Philosophy,* University of California Press, Berkeley, 1934.)

Niss, M. (1999), „Kompetencer og Uddannelsesbeskrivelse“ (Competencies and subject description), *Uddanneise,* 9, pp. 21-29.

Romberg, T. (1994), „Classroom Instruction that Fosters Mathematical Thinking and Problem Solving: Connections between Theory and Practice“, in A. Schoenfeld (ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, pp. 287-304.

Schupp, H. (1988), „Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen“ (Application-oriented mathematics lessons in the lower secondary between tradition and new impulses), *Der Mathematikunterricht*, 34 (6), pp. 5-16.

Steen, L.A. (ed.) (1990), *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy,* National Academy Press, Washington, DC.

Steen, L.A (ed.) (1997), *Why Numbers Count: Quantitative Literacy for Tomorrow's America*, The College Board, New York, NY.

Stewart, K. (1990), „Change“, in L.A. Steen (ed.), *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy,* National Academy Press, Washington, DC.

Tversky, A. & D. Kahneman (1974), „Judgments under Uncertainty: Heuristics and Biases“, *Science*, 185, pp. 1124-1131.