Matematické myšlení

Myšlení znamená v širším slova smyslu souhrn všech mentálních (psychických) činností, v užším slova smyslu jejich nejsložitější a patrně jen člověku vlastní část, která zpracovává a využívá informace.
Myšlení od jednotlivých vjemů a zkušeností postupuje k obecným pojmům a jejich prostřednictvím k praktickému i teoretickému zvládání světa. Navazuje tak na smyslové vnímání, využívá paměti a tvořivosti, se svými obsahy však zachází soustavným a více méně pravidelným způsobem. Tento specifický způsob spojování, rozlišování, porovnávání a souzení podstatně souvisí s řečí, která je jeho prostředkem a zároveň určujícím prostředím.
Matematické myšlení rozdělujeme do několika skupin: Konkrétní myšlení, abstraktní myšlení, funkční myšlení, myšlení algoritmické, prostorové myšlení a myšlení intuitivní.

Konkrétní myšlení se rozvíjí s přibývajícím věkem a s rostoucí abstraktností matem. Úvah.
Konkrétní myšlení postupně ustupuje do pozadí abstraktní myšlení se stává dominantní, předpoklad je vyšší úroveň myšlení. Člověk je schopen provádět operace pouze s pojmy, se slovy. Nepotřebuje přítomnost konkrétních předmětů, pro abstraktní myšlení je důležitý rozvoj slovní zásoby.
Konkrétní matematické myšlení ještě dále dělíme na
Statické myšlení - v mladším školním věku
Dynamické m. - ve středním a zejm. vyšším školním věku má nezastupitelnou úlohu,
Pokud u dítěte ještě splývá subjektivní s objektivním, pokud se zaměřuje k věcem a žije ve věcech, v zacházení s objekty, nemůže mít číslo v jeho životě izolovanou úlohu. Číslo není vlastností věcí, ale je výsledkem pochopení vztahů, kombinací a jejich uspořádání. Číslo je psychický produkt, je to rozumový pochod, nikoli smyslový fakt. Početní myšlenka má za základ materiální skutečnost.

Matematické myšlení není myšlením speciálním, nýbrž myšlením obecným, které je právě tak úzce spjato s poznáváním reality objektivního světa jako jazyk. Samozřejmě, že se tato realita nedá popsat pouze matematickým způsobem, takže matematické poznání má do jisté míry omezený charakter. Sféra působnosti matematiky je nutně užší nežli sféra působnosti jazyka, ale to ještě neznamená, že by jazyk sám byl schopen popsat všechny bohaté jevy přírodní, fyzikální, chemické a jiné (Koutský, 1952).

Konkrétní myšlení se rozvíjí s přibývajícím věkem a s rostoucí abstraktností matematických úvah.

Abstraktní myšlení

Abstrakce je hlavním rysem matematického myšlení. Co myslíme abstrakcí? Chceme-li je pochopit hlouběji a v souvislostech, je nutné jeho stránky oddělit a analyzovat je samostatně. To znamená uchopit jev z jedné, podstatné stránky (ve smyslu zkoumání) a upustit od ostatních stránek jevu. Říkáme, že se jev snažíme postihnout abstrakcí. Abstrakcí se vymezuje podstatná vlastnost jevu z hlediska obsahu a způsobu jeho zkoumání. Abstrakce v této první části vyjadřuje zpravidla pohyb od smyslově konkrétního k abstraktnímu, oddělenému vědomí.
Vytvořením nespojitého abstraktního vědění se v myšlení získává hlubší poznání a jevu nebo skupinách jevů. Syntézou abstraktního odděleného vědomí vzniká v myšlení nové vědění (pojem, teorie), které reprodukuje jev v rovině idejí, teorií (duševní svět studenta – viz Bolzano - Poperrovy světy). To je pohyb od konkrétního k abstraktnímu myšlení.
Matematické abstrakce poskytují vysoce jednostranný obraz skutečnosti a vyznačují se operativností a stupňovitostí. Matematika abstrahuje od všech konkrétních učení jevů a procesů. Např. pojmy číslo, bod, operace, algebraická struktura, vektorový prostor nemají svá konkrétní učení, i když vznikla abstrakcí jevů poznávané reality, vyjadřují kvalitativní a kvantitativní učení.
Abstrakce identifikací – ztotožňujeme předměty z hlediska jejich společné vnitřní vlastnosti (pojem přirozeného čísla vzniká postupně porovnáním dvou souborů (prsty rukou a počty předmětů – počítání na prstech). Pomocná množina – prsty se stává normativem společné vlastnosti – počtu prvků množin – viz Peanova axiomatizace přirozeného čísla

Abstrakce idealizací – zvolené formy nebo vztahy vlastní jevům a procesům úplně nebo zčásti oddělíme od obsahu. Vytvoříme tak idealizované objekty a operace, které jsou mezními představami. Například bod (kdy je bod úsečka?), přímka, kulová plocha, čtverec, obdélník, plocha, objem. Abstrakce se s věkem žáků vyvíjí stupňovitě, pojmy jsou stále abstraktnější, rozšiřuje se jijich obsah i rozsah.

Funkční myšlení
Důležitý je smysl pro kauzalitu (příčinnost jevů), cit pro závislosti – nesouvisí přímo s pojmem funkce a dalšími průvodními jevy pojmu funkce, vyvíjí se od předškolního věku jedince. Je pravděpodobné, že na vznik a úroveň funkčního myšlení působí i výchova v raném
dětství (důslednost rodičů, kauzalita a příčinnost dějů v rodině), dětská literatura – pohádky
(mají věci svůj řád?, jsou patrné příčiny a důsledky?, je konání zla trestáno a konání dobra odměňováno? – v českých pohádkách zpravidla ano)
Zavedeny v 17. stol. – matem. přestala zkoumat jen statické jevy, ale zkoumala změnu, pohyb.

Algoritmické myšlení
Algoritmickým myšlením rozumíme kognitivní potenci která zvědomuje, analyzuje a zpracovává intuitivně a spontánně uskutečňované myšlenkové procesy.
základem je algoritmus

- **proces postupné konstrukce hodnot –** na začátku je dán konečný systém výchozích údajů, v každém následujícím časovém úseku se tískává systém hodnot použitím určitého postupu ze systému hodnot předcházejících úseků, **DISKRÉTNOST**
- **systém hodnot,** získaný v kterémkoli časovém úseku **je určen jednoznačně** systémem hodnot získaných v předchozích úsecích; tato metoda musí být přesná, pochopitelná jiné osobě ve formě libovolného počtu pokynů a musí to být proces, který může být v libovolné době a libovolnou osobou opakován se stejným úspěchem. **DETERMINISMUS**
- **proces,** použitý k řešení daného typu úlohy po určitém počtu kroků **zastaví** a zastavení dá hledaný výsledek, **REZULTATIVNOST**
- použitý proces neslouží pouze k řešení jedné konkrétní úlohy, ale slouží k řešení celé **třídy úloh**, výchozí údaje se mohou měnit. **HROMADNOST**

Matematická úloha
Podle Kuřina: Je možné naučit řešit úlohy

Úlohou budeme rozumět jakoukoli výzvu k činnosti.
Přehled o nejběžnějších typech úloh, které se vyskytují ve školské matematice a jim odpovídajících otázek, můžeme shrnout do tabulky:

Úloha	Výzva	Otázka
Kalkulativní	Vypočítejte…	Kolik?
Rozhodovací	Rozhodněte...	Zda?
Určovací	Určete……..	Která?
Konstruktivní	Sestrojte…..	Jak?
Důkazové	Dokažte…..	Proč?

Kalkulativní

Vypočítejte $\frac{0{,}5\cdot 7+3^2}{7\cdot\sqrt{0.81}}$

Upravte $\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$

Rozhodovací
Rozhodněte, zda přirozená čísla 563 a 1860 jsou prvočísly

Rozhodněte, zda geometrický útvar ABC , kde A [1,3], B[-1,9], C [0,-10] je trojúhelník

Určovací
V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x+y+z=6$$
$$2x+3y-5z=-7$$
$$-3x+y+2z=5$$

Určete rovnici kružnice, která prochází body A [2,-1], B [5,-2], C [10,3]

Konstrukční
Je dán kruh K (S;6cm). Sestrojte kružnici se středem S a poloměrem r, která rozdělí kruh na dvě části se stejným obsahem.

Aplloniova úloha:
Sestrojte kružnici, která prochází třemi danými navzájem různými body A,B,C.

Důkazové

K číslu 82 je reverzním číslem 28 (82 – 28 = 54). Dokažte. (důkaz viz KMA_mysleni.pdf str, 25)
Dokažte, že křivka o rovnici 2x2 + y2 + 4x – 2y + 2 = 0 je elipsa

Podle rolí, které mají úlohy hrát ve vzdělávacím procesu, můžeme rozlišit (***Podle Kuřina: Je možné naučit řešit úlohy)***:

1. *Úlohy motivační*
2. *Úlohy instrukční*
3. *Úlohy procvičovací*
4. *Úlohy diagnostické*
5. *Úlohy kontrolní*

Podle náročnosti řešení úlohy pro studenta budeme rozlišovat ***Podle Kuřina: Je možné naučit řešit úlohy)***:

1. *Cvičení*
2. *Úlohy*
3. P*roblémy*

U cvičení vystačíme při řešení se znalostí postupu, který je v podstatě určen textem úlohy a který by si měl student po přečtení úlohy uvědomit. Tyto úlohy mají charakter matematického řemesla“, jsou obvykle prostými aplikacemi jednoho nebo několika algoritmů. U úloh druhé skupin řešitel kombinuje více algoritmů, jejich určení je podstatou řešení úlohy, jde v nich o obvyklou aplikaci probrané teorie.

Problémové úlohy:
Profesor Kuřina uvádí 30 úloh, které jsou podle něj vhodné pro takovou cestu
Úlohy, které neznáte, se pokuste řešit, případně zařadit do vyučování.

1. Může být pro některé přirozené n číslo $n^2 + n + 1$ druhou mocninou přirozeného čísla? Tvrzení zdůvodněte.
2. Sestrojte 8 (7) úseček tak, aby každá protínala právě 3 ze zbývajících.
3. Sestrojte geometrické útvary U, V , které splňují zároveň tyto 3 požadavky: a) U je částí V, b) U je shodný s V, c) V není částí U.
4. Dokažte, že každé prvočíslo větší než 5 můžeme psát buď ve tvaru $6k + 1$

nebo $6k + 5$, kde k je přirozené číslo.

5. Popište těleso, které vznikne rotací obdélníku kolem jeho úhlopříčky.
6. Určete množinu všech bodů roviny, které jsou stejně vzdáleny od daných polopřímek *VA, VB*.
7. Složte ze dvou shodných čtverců (po jejich vhodném rozstříhání) čtverec.
8. Složte ze dvou čtverců (po jejich vhodném rozstříhání) čtverec.
9. Sestrojte čtverec, který má stejný objem jako daný trojúhelník.
10. Rozdělte krychli na tři jehlany stejného objemu.
11. Rozdělte krychli na šest shodných jehlanů.
12. Rozdělte čtverec na čtyři shodné části. Uveďte alespoň deset řešení.
13. Osa pravého úhlu *ACB* trojúhelníku *ABC* protíná přponu v bodě *D*. Vypočítejte délku úsečky *CD* pomocí velikostí *a, b* odvěsen trojúhelníku *ABC*.
14. Existuje hranol, který má shodné všechny stěny, ale nemá shodné všechny hrany?
15. Na ramenech *AB, BC* rovnoramenného trojúhelníku *ABC* sestrojte po řadě *X, Y* tak, aby úsečky *AX, XY, YC* byly shodné. Řešte úlohu i pro trojúhelník, který není rovnoramenný.
16. Je možné, aby geometrický útvar měl dva různé středy souměrnosti?
17. Je dán trojúhelník *ABC*. Sestrojte kružnice se středy *A,B,C* tak, aby každé dvě měly vnější dotyk
18. Rozdělte čtverec na 2003 čtverců.
19. Dokažte, že výšky libovolného trojúhelníku procházejí jedním bodem.
20. Ukažte, že existuje 1 000 (1 000 000) za sebou jdoucích přirozených čísel, jež jsou všechna složená.
21. Sestrojte těleso jehož síť má tvar daného rovnostranného trojúhelníku. Kdo najde alespoň 2 taková tělesa?
22. Krychle je sjednocením 125 shodných krychlí. Kolik malých krychlí můžeme z velké krychle odstranit, aniž by se změnil původní půdorys, nárys a bokorys krychle?
23. Sestrojte mnohoúhelník, který má tuto vlastnost: z některého bodu jeho vnitřku (vnějšku) není vidět žádná jeho hrana.
24. Existuje těleso ohraničené shodnými čtverci? Je jich nekonečně mnoho!
25. Čtvercová zahrada je obehnána příkopem o šířce 2m. Je možné se do zahrady dostat pomocí dvou prken délky 2m? Prkna nemůžeme spojovat.
26. Určete největší počet částí, na které dělí rovinu *n* jejich přímek.
27. Rozdělte kolmý kruhový válec třemi rovinnými řezy na 8 shodných částí.
28. Ukažte, že existují dvě konvexní tělesa, která nejsou shodná, a při tom jejich povrchy se skládají ze sobě rovných množin mnohoúhelníků.

Strukturní myšlení

Snaží se postihnout soubory jevů dané oblasti jako zákonitě uspořádané celistvosti, které nabývají vlastností, jež nelze redukovat na vlastnosti jejích prvků. Základem je pojem struktury. V matematice se struktury vytvářejí na úrovni vysoce abstraktních matematických objektů, operací, axiomů, takže mají schopnost nacházet vnitřní souvislosti mezi objekty rozdílné podstaty.
Při vyučování jde např. o kombinatorické úlohy, úlohy s parametrem, vyšetřování množin bodů daných vlastností, o představy, které vedou k intuitivní představě algebraické struktury, apod.

Prostorové myšlení

Je založeno na geometrické představivosti (zvnitřnělá názornost od velmi konkrétních až po velmi abstraktních, příp. subjektivních představ. Je nutné pěstovat schopnosti a dovednosti (kompetence)

- úplné a správné představy – např. co je vrchol, úhlopříčka, strana, hrana, stěna, apod.,
- umět je vyjádřit - modelováním, slovně, …
- vytvořit si adekvátní vizuální představy – graficky
- schopnost představy – kinematicky i dynamicky ovládat geometrické představy i v jejich změně
- vytvářet úlohy – konstruovat v představách spolu se schopností rovinné a prostorové kombinatoriky
- vyjádřit – umět vyjádřit schémata vztahy a pojmy

Rozvíjení geometrické představivosti předpokládá rozvinutou schopnost a dovednost grafického vyjadřování.
Problémy:
nepřesné., neúplné představy (kosočtverec), neschopnost vybavit si konstrukce, obsah matematických, vyjádření, náčrty jejich využití k řešení, nalezení vztahů mezi objekty, potíže s prostorovou představivostí (přechod z roviny do prostoru), zejména stereometrické úlohy ve volném rovnoběžném promítání, složitější geometrické úlohy(žáci se ztrácí).

Metody didaktiky matematiky

Učitel matematiky může při vyučování matematice využít metody, které mají obecně metodologický význam nebo konkrétně metodologický význam.

1. Metodami, které mají pro matematiku konkrétně metodologický význam jsou: pokus, pozorování, srovnávání, analýza a syntéza, zobecnění a konkretizace. UPLATŇUJÍ SE EXPLICITNĚ

Kreativitu můžeme rozvíjet různými způsoby, různými cvičeními a metodami, které přispívají k jejímu rozvoji. Maňák a Švec dělí tyto metody na aktivizující a komplexní.
Aktivizující metody přispívají k překonávání stereotypů a hledají různá alternativní řešení. Vedou k cíli za pomoci aktivity studentů. Rozvíjí žákovu kreativitu, nezávislost a zvídavost (Maňák, Švec, 2003). Jak toho docílit? Uveďme některé z nich.
Rozhovor a diskuse - Dochází k vyměňování názorů ve třídě a společně se hledá řešení. Učitel by měl působit jako řídící člen a v závěru s pomocí studentů diskusi zhodnotit (Maňák, Švec, 2003).
Brainstorming bývá překládán jako „bouře mozků“. Při hodině studenti při řešení problému vymýšlí co největší množství nápadů. Všechny nápady je zaznamenáváme a nekritizujeme předem. Na závěr vybereme ty, které vedou k cíli.
Heuristická metoda, metoda řešení problému- *heuristika:* je metoda, pomocí objevujeme nové poznatky myšlením - metoda objevování. Je velmi časově náročná.
Situační metoda- řeší se reálné situace ze života. Důležité je poskytnout přístup k informacím, které jsou pro řešení situace
Inscenační metoda- jde o hraní určitých rolí. „*Podstatou inscenačních metod je sociální učení v modelových situacích*“2 (Bratská v Maňák, Švec, 2003,s.123).

Pozorování

Jednou z metod didaktiky matematiky, která vede ke kreativitě studentů je pozorování. Metoda poznávání skutečnosti na základě bezprostředního vnímání dochází k hlubšímu odhalení jevů a příčin.

Pokus.

Postup, jímž získáme, nebo ověřujeme poznatky. Předměty a jevy jsou zkoumány v uměle vytvořených podmínkách a tím zjistíme různé vlastnosti pozorovaných jevů.

Komparace.

Je myšlenková operace založená na stanovení shody, nebo rozdílu mezi zkoumanými objekty.
Musí probíhat systematicky:

- stanovíme kriterium
- srovnáváme pouze srovnatelné
- srovnání musí být úplné

Analýza a syntéza jsou operace myšlení, které se zúčastňují všech procesů myšlení

ANALÝZA

- Cesta myšlení od celku k části – cesta objevu

- Způsob myšlení od důsledku k příčině – studium matematických pojmů

SYNTÉZA

- Cesta od části k celku – zdůvodnění cesty objevu
- Přechod od příčiny k důsledku – důkazy vět, řešení matematických úloh

Analýza je cesta k objevu, syntéza zdůvodněním této cesty, jsou neoddělitelné, doplňují se. Vytvářejí **analyticko – syntetickou metodu,** při které implikaci vlastně nahrazujeme ekvivalencemi.
Používají se při důkazu vět:

- analytická metoda – výchozím bodem je samotné dokazované tvrzení, jehož pravdivost je zřejmá. Ukazuje způsob, jak důkaz vést, ale ten může být chybný.
- syntetická metoda – najde se takové pravdivé tvrzení, které cestou implikací převedeme na dokazované tvrzení. Neříká, proč právě dané tvrzení jsme zvolili za výchozí, jeví se jako umělá, nepřirozená

Zavádíme pojem **EKVIVALENTNÍ ÚPRAVA**

Pokud je při řešení užita neekvivalentní úprava(analytická metoda) stává se součástí řešení zkouška.

ZOBECŇOVÁNI (generalizace) Je poznávací proces, jímž se z jednotlivých znaků, pojmů, dospívá k obecnějším poznatkům, které nemusí být vždy pravdivé
SPECIALIZACE. Úzce souvisí se zobecňováním, dochází při ní k myšlenkovému vydělení některých znaků z množiny znaků zkoumaného objektu.
Užíváme ji případě, kdy chceme v matematice:

1. změnit obsahu pojmu (přirozená – celá – racionální - …reálná)
2. zaměnit konstantu za proměnnou (číselný výraz – výraz s proměnnou
   úlohy bez parametrů ⟶ úlohy s parametrem
   číselné výrazy ⟶ výrazy s proměnnou

2. Metodami, které mají obecně metodologický význam: indukce, dedukce, analogie. UPLATŇUJÍ SE IMPLICITNĚ, jsou zvláštním případem přeměny informace. Vytváří ze stávajícího vědění vědění nové.

DEDUKCE (Deductio – vyvození)

Je to metoda didaktiky matematiky, která má pro matematiku konkrétně metodologický význam. Deduktivní závěry jsou takové, jejichž vývody nepřesahují obsah objektů o nichž se hovoří v premisách. Premisa (lat. Předpoklad) je logická složka úsudku, z níž se jako z výchozí vyvozuje závěr

- dedukce umožňuje objasnit informaci, která je obsažena v premisách
- obohacuje poznání o nové charakteristiky, aniž by se překročil rámec premis

Indukce
Lat. inductio – přenesení.
Je to metoda didaktiky matematiky, která má pro matematiku konkrétně metodologický význam. Induktivní závěry jsou závěry, které rozšiřují informace získané při zkoumání jistého množství objektů (soubor objektů) na nové objekty (nové soubory). Indukce jako metoda v didaktice matematiky vytváří potenciálně otevřené systémy a tím ujasňuje výchozí informace v širších souvislostech, přičemž přesahuje, na rozdíl od dedukce, rozsah výchozího souboru objektů. Přenáší informace na nové soubory.
DRUHY INDUKTIVNÍCH ZÁVĚRŮ:

- úplné – vyčerpávají všechny částečné i jednotlivé případy
- neúplné – nevyčerpávají všechny částečné i jednotlivé případy

Závěr vyslovený na základě indukce nemusí být pravdivý, ale slouží k vyslovení hypotézy a ta se pak dokáže vyčerpáním a ověřením všech případů, nebo matematickou indukcí.

Analogie.
Řec. αναλογια - soulad, podoba
Je to metoda didaktiky matematiky, která má pro matematiku konkrétně metodologický význam. Při používání této metody využíváme toho, že závěry, v nichž se příslušný znak přenáší z jednoho objektu na druhý na základě toho, že u těchto objektů jsou některé znaky obecné, nebo společné. Závěry mají nejčastěji charakter tzv. MODELOVÁNÍ – přenos informace získané při zkoumání jednoho objektu (modelu) na druhý objekt (originál) a naopak. Jako indukce přesahuje rámec výchozích premis s přenosem výsledků poznání z modelu na originál a naopak. Při závěrech podle analogie má pravdivost získaného poznatku pravděpodobnostní charakter. Pokud existuje mezi originálem a modelem izomorfizmus, můžeme vlastnosti originálu přenést podle izomorfizmu na model a naopak. Při vyučování se často využívá závěrů podle analogie.